PISMENI ISPIT IZ UVODA U ANALIZU (M4 smer), 3.2.2016.

1. Dat je skup

$$X = \left\{ x \in [0, 2016] : \sqrt{\sin\left(\frac{2\pi(-1)^{[x]}}{2+x}\right)} \neq 0 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{[x]} : x \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

a) Odrediti infimum i supremum skupa X i proveriti da li skup X ima minimalni i maksimalni element.

b) Odrediti unutrašnje, adherentne, rubne, izolovane i tačke nagomilavanja skupa X.

2. Naći graničnu vrednost niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zadatog sa

$$a_1 = \sqrt[3]{6},\ a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n + 6},\ n \in \mathbb{N}.$$

3. a) Odrediti sve tačke nagomilavanja, kao i $\limsup$ i $\liminf$ sledećeg niza

$$f_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sin\frac{n\pi}{2}.$$

b) Izračunati

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3 + 3^2 + \cdots + 3^{n+1}}{7 + 7^2 + \cdots + 7^{n+1}};$$

c) Izračunati

$$\lim_{x\to 1^-} \pi \frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}}{\sin \pi x};$$

4. Odrediti domen i asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)}}{x}.$$

5. Data je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} + b & x \in (-\infty, 1), \\ e^{\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}(2-x^3)}, & x \in [1, \sqrt[3]{2}), \\ ax^3, & x \in [\sqrt[3]{2}, +\infty). \end{cases}$$

(a) Naći konstante a i b (ako je to moguće) tako da funkcija f bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

(b) Ispitati da li je funkcija f uniformno neprekidna na intervalu $[\sqrt[3]{2}, +\infty)$.

PISMENI ISPIT IZ UVODA U ANALIZU (M4 smer), 6.4.2016.

1. Dat je skup

$$A = \begin{cases} \dfrac{2}{3n}(-1)^n + \sin\dfrac{(n+1)\pi}{2} - 3, & n = 4k,\ k \in \mathbb{N} \\ \\ \dfrac{2}{3n}(-1)^n + \sin\dfrac{(n+1)\pi}{2}, & n \neq 4k,\ k \in \mathbb{N} \end{cases};$$

a) Odrediti infimum i supremum skupa A (i dokazati po definiciji da te vrednosti jesu infimum i supremum). Da li skup A ima minimalni i maksimalni element?

b) Odrediti unutrašnje, adherentne, rubne, izolovane i tačke nagomilavanja skupa A.

2. a) Da li je navedeno tvrđenje tačno?

Dati su nizovi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takvi da bar jedan od njih divergira. Tada niz $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergira. Obrazložiti odgovor.

b) Izračunati

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^n \sin n^2}{\sqrt{\frac{5}{2}+2}\sqrt{\frac{5}{2}+2^2}\cdots\sqrt{\frac{5}{2}+2^{2n-1}}\sqrt{\frac{5}{2}+2^{2n}}}$$

3. Izračunati:

$$a)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))}; \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{1+x}} - 1\right)^{\frac{2x^2+3}{2x}}$$

4. Odrediti domen i asimptote funkcije

$$f(x) = (x^2+5x+1)\ln\left(\frac{x^2-2}{x^2+5}\right) + \ln(1+e^x).$$

5. Date su funkcije $f(x) = x(x^2-1)$ i $g(x) = sgn(x)$.

a) Odrediti konstante a i b tako da funkcija

$$F(x) = \begin{cases} f\circ g(x), & x \le -2 \\ ax+b, & -2 < x \le 0 \\ e^{f(x)}, & x > 0 \end{cases}$$

bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

b) Da li je tako dobijena funkcija bijekcija?

c) Da li je funkcija F uniformno neprekidna na intervalu $[5,7]$?

d) Da li je funkcija F uniformno neprekidna na intervalu $(-\infty,-2]$?

Napomena: $f\circ g(x) = f(g(x))$

Uvod u analizu

3. jun 2016.

1. Dat je skup $X = \left\{ \frac{(-1)^n}{2n} + \cos\left(\frac{(-1)^n n\pi}{2}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$.

(a) Odrediti infimum i supremum skupa X (pokazati po definiciji) i proveriti da li skup X ima minimalni i maksimalni element;

(b) Odrediti unutrašnje, adherentne, rubne, izolovane tačke i tačke nagomilavanja skupa X.

2. Koristeći nejednakost: $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$, pokazati po definiciji da je granična vrednost niza $\left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ jednaka nuli.
Bonus bodovi: pokazati da važi korišćena nejednakost.

3. Data je funkcija $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

(a) Odrediti domen funkcije f.

(b) Odrediti tačke prekida i vrste tih prekida (obrazložiti).

(c) Odrediti asimptote grafika funkcije $g(x) = \frac{1}{x} f(x)$.

4. Izračunati: (a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{e^{\frac{x-1}{2}} - \sqrt{(x-1)e^{x-1} + x}}$; (b) $\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \ln\left(\frac{x+2016}{2016}\right)$.

5. Dokazati da je $f(x) = \ln x^A + Ax + 1$ uniformno neprekidna na $(1, +\infty)$, za neko $A > 0$.

PISMENI ISPIT IZ UVODA U ANALIZU (M4 smer), 31.8.2016.

1. Dat je skup

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ln \frac{1}{3e^{x-1}} > 1 \quad \text{ili} \quad \sqrt{\frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2x})}} \leq 1 \right\}.$$

a) Odrediti infimum i supremum skupa X. Da li skup X ima minimalni i maksimalni element?

b) Odrediti unutrašnje, adherentne, rubne, izolovane i tačke nagomilavanja skupa X.

2. Ispitati konvergenciju i naći graničnu vrednost niza

$$0 \leq x_1 \leq 4, \;\; x_{n+1} = \frac{1}{4} x_n (4 - x_n), \; n \in \mathbb{N}.$$

3. Izračunati:

$$a) \; \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-\frac{2^x}{\ln x}}}{\operatorname{ctg}^2 x + 1}, \qquad b) \; \lim_{x \to 2} \frac{(1 + \frac{(x-2)^2}{15})^3 - 1}{x^2 - 4}$$

4. Odrediti domen i asimptote funkcije $f(x) = e^{\frac{1}{x-3}} + \operatorname{arcctg}\left(\frac{x-1}{x^2-9}\pi\right) + \sqrt{x+4}$.

5. Dokazati da je funkcija $f(x) = \cos(Bx) + Ax + 2$ uniformno neprekidna na $(0, +\infty)$.

Uvod u analizu

30.9.2016.

1. Neka je skup X

$$X = \left\{ x \notin (-1,1) : \frac{x^3+4x^2-x-4}{x^2+2x} \leq 0 \right\} \cup \left\{ 1 + \frac{1}{1+[x]} : x \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

(a) Odrediti infimum i supremum skupa X i proveriti da li skup X ima minimalni i maksimalni element;

(b) Odrediti unutrašnje, adherentne, rubne, izolovane tačke i tačke nagomilavanja skupa X.

Napomena: Za dato $x \in \mathbb{R}$, najveći ceo deo $[x] = z \in \mathbb{Z}$ tako da je $z \leq x < z+1$.

2. Izračunati: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 1! + 3\cdot 2! + \cdots + (2n-1)n!}{(n+1)!}$.

3. Izračunati: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$, gde su $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Data je funkcija $f(x) = \dfrac{\sqrt{Ax^6+4x^4}}{x+5} + B\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{x}\ln x,\ A \geq 0.$

(a) Odrediti domen funkcije f.

(b) Odrediti konstante A i B takve da funkcija f ima kosu asimptotu i bar jednu vertikalnu asimptotu.

(c) Za tako izabrane vrednosti konstanti, pronaći asimptote funkcije f.

5. Odrediti konstantu A tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$$

bude neprekidna na $\mathbb{R}$. Da li je tako dobijena funkcija uniformno neprekidna na intervalu $[0,\pi]$?