PISMENI ISPIT IZ UVODA U ANALIZU (M4 smer), 3.2.2016.

1. Dat je skup

$$X = \left\{ x \in [0, 2016] : \sqrt{\sin\left(\frac{2\pi(-1)^{[x]}}{2+x}\right)} \neq 0 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{[x]} : x \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

a) Odrediti infimum i supremum skupa X i proveriti da li skup X ima minimalni i maksimalni element.

b) Odrediti unutrašnje, adherentne, rubne, izolovane i tačke nagomilavanja skupa X.

Rešenje:

Dodatak: Koja je razlika između skupa $\left\{ \frac{1}{[x]} : x \in \mathbb{R}^+ \right\}$ i $\left\{ \frac{1}{[x]} : x \geq 1 \right\}$? U nastavku posmatrati skup

$$X = \left\{ x \in [0, 2016] : \sqrt{\sin\left(\frac{2\pi(-1)^{[x]}}{2+x}\right)} \neq 0 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{[x]} : x \geq 1 \right\}.$$

a) Izraz $\frac{1}{[x]}$ u intervalu $[0, 1)$ nije definisan zbog deljenja sa nulom, pa onda ni zadati skup nije dobro definisan.

Važi:

$$\left\{ \frac{1}{[x]} : x \geq 1 \right\} = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Da bi funkcija $\sqrt{\sin\left(\frac{2\pi(-1)^{[x]}}{2+x}\right)}$ bila definisana treba nam da je

$$\sin\left(\frac{2\pi(-1)^{[x]}}{2+x}\right) \geq 0.$$

Kako $\frac{2\pi(-1)^{[x]}}{2+x} \in [-\pi, \pi]$, treba da eliminišemo one vrednosti x za koje izraz pripada intervalu $(-\pi, 0)$. Taj izraz će biti negativan za neparno $[x]$. Dobijamo

$$x \in [2k, 2k+1),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Kako nam treba

$$\sqrt{\sin\left(\frac{2\pi(-1)^{[x]}}{2+x}\right)} \neq 0$$

moramo da izbacimo sve vrednosti x za koje je izraz pod sinusnom funkcijom jednak $-\pi$ ili π. Znači izbacujemo $x = 0$ iz skupa X. Uzimajući u obzir uslov $x \in [0, 2016]$ i činjenicu da $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \in (0, 1]$ dobijamo

$$X = \left(\bigcup_{k=0}^{1007} [2k, 2k+1) \cup \{1, 2016\} \right) \setminus \{0\}$$

$$\inf X = 0,\ \min X \text{ ne postoji}$$

$$\sup X = 2016 = \max X$$

b)

$$X^o = \bigcup_{k=0}^{1007} (2k, 2k+1)$$

$$\bar{X} = \bigcup_{k=0}^{1007} [2k, 2k+1] \cup \{2016\}$$

$$X' = \bigcup_{k=0}^{1007} [2k, 2k+1]$$

$$\partial X = \bigcup_{k=0}^{2016} \{k\}$$

$$izX = \{2016\}$$

2. Naći graničnu vrednost niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zadatog sa

$$a_1 = \sqrt[3]{6},\ a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n + 6},\ n \in \mathbb{N}.$$

Rešenje: Niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zadat je rekurzivno.

$$a_1 = \sqrt[3]{6},\ a_2 = \sqrt[3]{\sqrt[3]{6} + 6}, \ldots$$

Primetimo prvo da su svi članovi niza pozitivni tj $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (matematička indukcija).

1. Dokažimo matematičkom indukcijom da je ovaj niz rastući tj da važi $a_n \leq a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$:

BI. $a_1 \leq a_2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{6} \leq \sqrt[3]{\sqrt[3]{6} + 6} \Leftrightarrow 6 \leq \sqrt[3]{6} + 6 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt[3]{6}$ što je tačno

IH. Pretpostavimo da za neko $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n \leq a_{n+1}$.

IK. Dokazujemo da je za $n+1$ zadovoljeno $a_{n+1} \leq a_{n+2}$
Polazimo od $a_n \leq a_{n+1}$.

$$a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow a_n + 6 \leq a_{n+1} + 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{a_n + 6} \leq \sqrt[3]{a_{n+1} + 6} \Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}.$$

Dakle, niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je rastući.

2. Zatim, dokazujemo da je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen sa gornje strane sa 2 tj da važi $a_n \leq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Matematička indukcija:

BI. Dokazujemo za $n = 1$. $a_1 = \sqrt[3]{6} \leq 2 = \sqrt[3]{8}$

IH. Pretpostavimo da za neko $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n \leq 2$.

IK. Dokazujemo da važi $a_{n+1} \leq 2$.

$$a_{n+1} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{a_n + 6} \leq 2 \Leftrightarrow a_n + 6 \leq 8 \Leftrightarrow a_n \leq 2$$

pa na osnovu indukcijske hipoteze za ključujemo da je niz ograničen sa donje strane sa 2.

Kako je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rastući i ograničen sa gornje strane, na osnovu teoreme o monotonim nizovima zaključujemo da je niz konvergentan i da postoji neko A takvo da važi

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

3. Tražimo A

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{a_n+6} = \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty} a_n + 6} = \sqrt[3]{A+6},$$

gde smo koristili neprekidnost funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x+6}$. Dakle, $A^3 = A+6$. Odnosno $A^3 - A - 6 = 0$. Kako važi $A^3 - A - 6 = (A-2)(A^2+2A+3) = 0$, a jednačina $A^2+2A+3 = 0$ nema realnih nula zaključujemo da je rešenje $A = 2$. Dakle, $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

3. a) Odrediti sve tačke nagomilavanja, kao i $\limsup$ i $\liminf$ sledećeg niza

$$f_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \sin\frac{n\pi}{2}.$$

b) Izračunati

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+3^2+\cdots+3^{n+1}}{7+7^2+\cdots+7^{n+1}};$$

c) Izračunati

$$\lim_{x\to 1^-} \pi \frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}}{\sin \pi x};$$

Rešenje:

a) Imamo tri tačke nagomilavanja:

- $n = 2k$; $(-1)^{2k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k} + \sin\frac{2k\pi}{2} = \left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k} + \sin k\pi \to e$, $k\to\infty$
- $n = 4k-1$; $(-1)^{4k-1}\left(1+\frac{1}{4k-1}\right)^{4k-1} + \sin(2k\pi - \frac{\pi}{2}) = -\left(1+\frac{1}{4k-1}\right)^{4k-1} + (-1) \to -e-1$, $k\to\infty$
- $n = 4k-3$; $(-1)^{4k-3}\left(1+\frac{1}{4k-3}\right)^{4k-3} + \sin(2k\pi - \frac{3\pi}{2}) = -\left(1+\frac{1}{4k-1}\right)^{4k-1} + 1 \to -e+1$, $k\to\infty$

Tačke nagomilavanja: $-e-1, -e+1, e$

$\liminf f_n = -e-1$, $\limsup f_n = e$

b)

$$\frac{3+3^2+\cdots+3^{n+1}}{7+7^2+\cdots+7^{n+1}} = \frac{3(1+3+\cdots+3^n)}{7(1+7+\cdots+7^n)} = \frac{3\frac{1-3^{n+1}}{1-3}}{7\frac{1-7^{n+1}}{1-7}} = \frac{3(-6)(1-3^{n+1})}{(-2)7(1-7^{n+1})}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+3^2+\cdots+3^{n+1}}{7+7^2+\cdots+7^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{7}\frac{\frac{1}{7^{n+1}} - \left(\frac{3}{7}\right)^{n+1}}{\frac{1}{7^{n+1}} - \left(\frac{7}{7}\right)^{n+1}} = \frac{9}{7}\cdot\frac{0-0}{0-1} = 0$$

c) Pravimo smenu $t = 1-x$, $t\to 0^+$ kada $x\to 1^-$

$$\lim_{x\to 1^-} \pi\frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}}{\sin\pi x} = \lim_{t\to 0^+} \pi\frac{\sqrt{\frac{t}{1-t}}}{\sin(\pi-\pi t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\pi t}{\sin\pi t}\sqrt{\frac{1}{t(1-t)}} = 1\cdot\infty = \infty$$

4. Odrediti domen i asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)(x^3-6x^2+12x-8)}}{x}.$$

Rešenje: Domen:

$$(x-1)(x^3-6x^2+12x-8) = x^4-7x^3+18x^2-20x+8 = (x-1)(x-2)^3 \geq 0$$

$$D_f = ((-\infty,1] \cup [2,+\infty)) \setminus \{0\}$$

- Vertikalne asimptote

$$f(1) = f(2) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{(x-1)(x^3-6x^2+12x-8)}}{x} = \frac{\sqrt{8}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{(x-1)(x^3-6x^2+12x-8)}}{x} = \frac{\sqrt{8}}{0^+} = +\infty$$

Imamo jednu vertikalnu asimptotu i to je $x = 0$.

- Horizontalne asimptote

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}}{x} = \pm\infty$$

Nema horizontalnih asimptoti.

- Kose asimptote

Kod određivanja granične vrednosti glavnu ulogu imaju članovi polinoma parnog stepena pa ćemo isti rezultat dobiti i za $+\infty$ i $-\infty$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}-x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4-7x^3+18x^2-20x+8-x^4}{x(\sqrt{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}+x^2)} = -\frac{7}{2}$$

Kosa asimptota: $y = x - \frac{7}{2}$

5. Data je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} + b & x \in (-\infty, 1), \\ e^{\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}(2-x^3)}, & x \in [1, \sqrt[3]{2}), \\ ax^3, & x \in [\sqrt[3]{2}, +\infty). \end{cases}$$

(a) Naći konstante a i b (ako je to moguće) tako da funkcija f bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

(b) Ispitati da li je funkcija f uniformno neprekidna na intervalu $[\sqrt[3]{2}, +\infty)$.

Rešenje:

(a) Funkcija f je neprekidna na intervalima $(-\infty, 1)$, $(1, \sqrt[3]{2})$ i $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$ kao zbir, razlika, proizvod, količnik i kompozicija elementarnih (neprekidnih) funkcija.

Treba ispitati neprekidnost u tačkama $x_0 = 1$ i $x_0 = \sqrt[3]{2}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} + b = e^{\frac{1}{0^-}} + b = b$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}(2-x^3)} = f(1) = e^{\frac{1}{4}}$$

Dakle, da bi f bila neprekidna u $x = 1$ treba da važi

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = e^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow b = e^{\frac{1}{4}}.$$

$$\lim_{x\to \sqrt[3]{2}^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} ax^3 = f(\sqrt[3]{2}) = 2a.$$

$$\lim_{x\to \sqrt[3]{2}^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}(2-x^3)} = e^{\frac{1}{2}}$$

Dakle, da bi f bila neprekidna u $x = \sqrt[3]{2}$ treba da važi

$$\lim_{x\to \sqrt[3]{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \sqrt[3]{2}^-} f(x) = f(\sqrt[3]{2}) = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}.$$

(b) Dokazaćemo da funkcija nije uniformno neprekidna na intervalu $[\sqrt[3]{2}, +\infty)$. Uzmimo nizove date sa $x_n = \sqrt[3]{n+1}$, $y_n = \sqrt[3]{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$|x_n - y_n| = |\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}| = \frac{(\sqrt[3]{n+1})^3 - (\sqrt[3]{n})^3}{(\sqrt[3]{n+1})^2 + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + (\sqrt[3]{n})^2} \to 0,\ n \to \infty$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |ax_n^3 - ay_n^3| = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}(n+1-n) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Dakle, funkcija nije uniformno neprekidna na intervalu $[\sqrt[3]{2}, +\infty)$.