PISMENI ISPIT IZ UVODA U ANALIZU (M4 smer), 12.9.2017.

1. Skup X je domen funkcije

$$F(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 6}}{[x](x-6)}.$$

a) Odrediti infimum i supremum skupa X i proveriti da li skup X ima minimalni i maksimalni element.

b) Odrediti unutrašnje, adherentne, rubne, izolovane i tačke nagomilavanja skupa X.

Rešenje:

$$F(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 6}}{[x](x-6)} = \frac{\sqrt{(x+1)(x-2)(x-3)}}{[x](x-6)}.$$

F je definisana ako $(x+1)(x-2)(x-3) \geq 0$, $x \neq 6$ i $[x] \neq 0$ pa je skup X jednak

$$X = \big([-1,2] \cup [3,+\infty)\big) \setminus \big(\{6\} \cup [0,1)\big) = [-1,0) \cup [1,2] \cup [3,6) \cup (6,+\infty).$$

Imamo

$$\sup X = +\infty \text{ i } \max X \text{ ne postoji},$$
$$\inf X = -1 \in X \Rightarrow \min X = -1$$
$$X^0 = (-1,0) \cup (1,2) \cup (3,6) \cup (6,+\infty), \qquad \bar{X} = X \cup \{0,6\} = X',$$
$$\partial X = \{-1,0,1,2,3,6\}, \qquad izX = \emptyset.$$

2. Dat je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sa opštim članom

$$a_n = 2^{(-1)^n} + (2 + \frac{1}{n}) \cos\big(\frac{n\pi}{3}\big).$$

(a) Odrediti sve tačke nagomilavanja niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kao i limes superior i limes inferior.

(b) Da li je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan?

Rešenje:

(a)

$$a_{6k} = 2 + \big(2 + \frac{1}{6k}\big)\cos(2\pi) = 2 + \big(2 + \frac{1}{6k}\big) \xrightarrow{k\to\infty} 4,$$
$$a_{6k-1} = \frac{1}{2} + \big(2 + \frac{1}{6k-1}\big)\cos(\frac{5\pi}{3}) = 2 + \big(2 + \frac{1}{6k-1}\big)\frac{1}{2} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2},$$
$$a_{6k-2} = 2 + \big(2 + \frac{1}{6k-2}\big)\cos(\frac{4\pi}{3}) = 2 + \big(2 + \frac{1}{6k-2}\big)(-\frac{1}{2}) \xrightarrow{k\to\infty} 2 - 1 = 1,$$
$$a_{6k-3} = \frac{1}{2} + \big(2 + \frac{1}{6k-3}\big)\cos(\frac{3\pi}{3}) = 2 + \big(2 + \frac{1}{6k-3}\big)(-1) \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2},$$
$$a_{6k-4} = 2 + \big(2 + \frac{1}{6k-4}\big)\cos(\frac{2\pi}{3}) = 2 + \big(2 + \frac{1}{6k-4}\big)(-\frac{1}{2}) \xrightarrow{k\to\infty} 2 - 1 = 1,$$
$$a_{6k-5} = \frac{1}{2} + \big(2 + \frac{1}{6k-5}\big)\cos(\frac{\pi}{3}) = 2 + \big(2 + \frac{1}{6k-5}\big)\frac{1}{2} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Dakle, niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima 4 tačke nagomilavanja i to su

$$-\frac{3}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 4.$$

$$\liminf a_n = -\frac{3}{2}, \qquad \limsup a_n = 4.$$

(b) Niz nije konvergentan, jer ima više od jedne tačke nagomilavanja.

3. Izračunati:

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{8n^3-3n^2}-2n\right), \qquad (b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2n]{n!\sqrt{2n\pi}}}{\sqrt{n}}, \qquad (c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\ln\sqrt{n}}.$$

Rešenje:

$$(a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{8n^3-3n^2}-2n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{8n^3-3n^2}-2n\right)\frac{(\sqrt[3]{8n^3-3n^2})^2+2n\sqrt[3]{8n^3-3n^2}+4n^2}{(\sqrt[3]{8n^3-3n^2})^2+2n\sqrt[3]{8n^3-3n^2}+4n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-3n^2-8n^3}{(\sqrt[3]{8n^3-3n^2})^2+2n\sqrt[3]{8n^3-3n^2}+4n^2} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4},$$

$$(b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2n]{n!\sqrt{2n\pi}}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2n]{n^n e^{-n}(\sqrt{2n\pi})^2}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sqrt{e^{-1}}\,\sqrt[2n]{2n\pi}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{e}},$$

jer

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{2n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\pi} = 1.$$

Pod (c) koristimo Štolcovu teoremu. Uslovi Štolcove su zadovoljeni jer

$$P_n = \ln\sqrt{n} \text{ je strogo rastući niz i } \lim_{n\to\infty} P_n = +\infty.$$

Neka je $Q_n = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$. Postoji

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n-Q_{n-1}}{P_n-P_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}\frac{1}{n}}{\frac{1}{2}\ln(\frac{n}{n-1})} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n-1})^n} = \frac{1}{2}\frac{1}{\ln e} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, važi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\ln\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{Q_n-Q_{n-1}}{P_n-P_{n-1}} = \frac{1}{2}.$$

4. Odrediti oblik racionalne funkcije f sa sledećim osobinama:

(a) Imenilac i brojilac funkcije f su polinomi stepena ne većeg od 2.

(b) f ima dve vertikalne asimptote $x = 2$ i $x = -2$.

(c) f je parna i ima horizontalnu asimptotu $y = 1$.

(d) Važi $f(0) = -\frac{1}{4}$.

Rešenje: Iz a) i činjenice da je f racionalna sledi da je f oblika

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}.$$

Kako f ima vertikalne asimptote $x = -2$ i $x = 2$ zaključujemo da su -2 i 2 nule imenioca (f nije definisana u -2 i 2) pa imamo $dx^2 + ex + f = d(x-2)(x+2)$. Iz c) sledi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{d(x-2)(x+2)} = 1 \Rightarrow a = d$$

i

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow \frac{ax^2 - bx + c}{a(x-2)(x+2)} = \frac{ax^2 + bx + c}{a(x-2)(x+2)} \Rightarrow 2bx = 0\,\forall x \Rightarrow b = 0.$$

Sada je f oblika

$$f(x) = \frac{ax^2 + c}{a(x-2)(x+2)}.$$

$$f(0) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{c}{-4a} = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = c.$$

Dobijamo funkciju

$$f(x) = \frac{a(x^2+1)}{a(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)}.$$

5. (a) Da li postoji konstanta A takva da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}(1+x)}{1+x}, & x < -1, \\ A, & -1 \le x \le 2, \\ \frac{\ln(3-x)}{2-x}, & 2 < x < 3, \\ \frac{x^2-6x+9}{x-3}, & x \ge 3 \end{cases}$$

neprekidna na intervalu $(-\infty, 2.5)$?

(b) Da li f ima vertikalnih asimptota? Ako ima odrediti ih.

(c) Da li je f uniformno neprekidna na intervalu $(2, +\infty)$?

Rešenje:

(a) Funkcija f je neprekidna na intervalima $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ (ukoliko postoji konstanta A), $(2, 3)$ i $(3, +\infty)$. Da bi funkcija f bila neprekidna u -1 treba da važi

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = A.$$

Kako

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{\operatorname{tg}(1+x)}{1+x} = 1,$$

sledi $A = 1$. Prethodno je korišćen tablični limes

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1.$$

Da bi f bila neprekidna u 2 treba da važi

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = A = 1.$$

Kako

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(3-x)}{2-x} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(2+(2-x))}{2-x} = 1$$

sledi da za $A = 1$ funkcija f jeste neprekidna na $(-\infty, 2.5)$. Na $[-1, 2]$ je konstantna. Prethodno je korišćen tablični limes

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

(b) Iz (a) znamo da je na $(-\infty, 2.5)$ (čak štaviše neprekidna je i na $(-\infty, 3)$) funkcija f neprekidna i $f(2.5) < \infty$ pa ne može imati vertikalnu asimptotu. Za $x \in (3, +\infty)$ imamo $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x-3} = x - 3$ pa je i na tom intervalu f neprekidna. Znači da je jedina problematična tačka $x = 3$. Imamo

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{\ln(3-x)}{2-x} = \frac{\ln 0^+}{-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x-3) = 0.$$

Dakle, f ima vertikalnu asimptotu $x = 3$ (i ima prekid u tački $x_0 = 3$).

(c) f nije neprekidna na $(2, +\infty)$ pa sledi da nije ni uniformno neprekidna.