1 Nizovi

Definicija 1. **Niz** je funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
– $a_n := a(n)$, $n \in \mathbb{N}$ opšti član niza
– $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz čiji je opšti član a_n

Definicija 2. Niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je **ograničen sa gornje (donje) strane** ako

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq (\geq) M$$

Definicija 3. Niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je **ograničen** ako

$$(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\, |a_n| \leq M$$

2 Granična vrednost niza

Definicija 4. $a \in \mathbb{R}$ je granična vrednost niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i kažemo da je niz konvergentan ili da konvergira ka a.

U slučaju da $a = \pm\infty$ ili da granična vrednost ne postoji, kažemo da niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergira. Specijalno:

Definicija 5. Niz divergira ka $+\infty$ $(-\infty)$, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty)$, ako

$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M(< -M).$$

Teorema 1. *Granica konvergentnog niza je jedinstvena.*

Teorema 2. *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Teorema 3. *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *tada je* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Odredjeni izrazi:

$$\begin{aligned}
\infty + \infty &= \infty \\
\infty \cdot \infty &= \infty \\
\frac{1}{\pm\infty} &= 0 \\
\frac{1}{0^+} &= +\infty \\
\frac{1}{0^-} &= -\infty \\
\frac{1}{0} &= \text{nije definisano} \\
0^{+\infty} &= 0 \\
(0^+)^{-\infty} = \frac{1}{0^+} &= +\infty
\end{aligned}$$

Neodredjeni izrazi:

$$\begin{aligned}
\infty - \infty &= ? \\
\frac{\infty}{\infty} &= ? \\
0 \cdot \infty &= ? \\
\frac{0}{0} &= ? \\
1^{\infty} &= ? \\
0^0 &= ? \\
\infty^0 &= ?
\end{aligned}$$

3 Osobine konvergentnih nizova

Neka je: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$

- $a < b \Rightarrow (\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1)\ a_n < b_n$
- $(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1)\ a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$

Teorema o uklještenim nizovima
Ako je $a = c$ i $a_n \leq b_n \leq c_n$ počevši od nekog $n \in \mathbb{N}$, tada je i $b = a$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^k = a^k,\ k \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
  $\lim\limits_{n\to\infty} (m \cdot a_n) = m \cdot a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}, k \in \mathbb{N}$, za k paran pp $a_n \geq 0$

Nula nizovi ($\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je nula niz ako je $a = 0$)

- proizvod ograničenog niza i nula niza je nula niz
- ako je a=0 i $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, onda $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|} = +\infty$
- ako je $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz tako da $\lim\limits_{n\to\infty} |d_n| = +\infty$, tada je $\{\frac{1}{d_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ nula niz