PISMENI ISPIT IZ UVODA U ANALIZU (M4 smer), 8.2.2017.

1. Dat je skup

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \frac{x^2+x-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x-3}}{|\sin\frac{1}{x}|} \geq 0 \right\} \cup \{-11\}.$$

a) Odrediti infimum i supremum skupa X i proveriti da li skup X ima minimalni i maksimalni element.

b) Odrediti unutrašnje, adherentne, rubne, izolovane i tačke nagomilavanja skupa X.

Rešenje:
$\sqrt{x-3}$ je definisan za $x \geq 3$ i $\frac{\sqrt{x-3}}{|\sin\frac{1}{x}|}$ je uvek pozitivno ili 0. Pri tome $\frac{1}{|\sin\frac{1}{x}|}$ nije definisano kada je $\sin\frac{1}{x} = 0$ tj. kada $\frac{1}{x} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ili $x = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Međutim, broj oblika $\frac{1}{k\pi}$ ne pripada intervalu $[3, \infty)$. Imamo

$$\frac{x^2+x-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x-3}}{|\sin\frac{1}{x}|} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x} \geq 0$$

što je zadovoljeno za $x \in [-2, 0) \cup [1, \infty)$. Dakle,

$$X = \Big([3,\infty) \cap \big([-2,0) \cup [1,\infty)\big)\Big) \cup \{-11\} = [3,\infty) \cup \{-11\}.$$

(a)

$$\sup X = \infty \notin X \Rightarrow \max X \text{ ne postoji},$$
$$\inf X = -11 \in X \Rightarrow \min X = -11.$$

(b)

$$X^0 = (3,\infty), \quad \bar{X} = X, \quad X' = [3,\infty), \quad \partial X = \{-11, 3\} \quad iz\, X = \{-11\}.$$

2. Dat je neprazan i ograničen sa gornje strane skup A.

(a) Da li skup $B = \{\alpha x : \ x \in A\}$, $\alpha < 0$ ima infimum? Obrazložiti.

(b) Pronaći infimum skupa B (ukoliko postoji) i dokazati da to jeste infimum.

Rešenje:

(a) Skup A je neprazan i ograničen sa gornje strane pa na osnovu Principa supremuma ima supremum. Kako skup B dobijamo tako što elemente skupa A množimo sa konstantnom manjom od 0, sledi da je i B neprazan ali ograničen sa donje strane pa na osnovu Principa infimuma ima infimum.

(b) Označimo sa $s = \sup A$. Dokazaćemo da je $\alpha s = \inf B$. Iz $s = \sup A$ znamo

S1 $\big(\forall x \in A\big)\, x \leq s$

S2 $\big(\forall \varepsilon > 0\big)(\exists x \in A)\, x > s - \varepsilon$.

Treba pokazati

I1 $\big(\forall y \in B\big)\, y \geq \alpha s$

I2 $\big(\forall \varepsilon > 0\big)(\exists y \in B)\, y < \alpha s + \varepsilon$.

Iz $S1$ dobijamo $\big(\forall x \in A\big)\, \alpha x \geq \alpha s \Leftrightarrow \big(\forall y \in B\big)\, y \geq \alpha s$ što je $I1$.
Iz $S2$ imamo $\big(\forall \varepsilon > 0\big)(\exists x \in A)\, \alpha x < \alpha s - \alpha\varepsilon$.
Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Kako $S2$ važi za proizvoljno ε važiće i za $\bar{\varepsilon} = -\frac{1}{\alpha}\varepsilon > 0$. Za takvo $\bar{\varepsilon}$ izraz u $S2$ je oblika $\alpha x < \alpha s - \alpha\bar{\varepsilon} = \alpha s + \varepsilon$ pa za proizvoljno $\varepsilon > 0$ važi

$$(\exists y \in B)\, y < \alpha s + \varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bilo proizvoljno sledi $I2$.

3. a) Odrediti sve tačke nagomilavanja, kao i $\limsup$ i $\liminf$ sledećeg niza

$$f_n = 2^{(-1)^n} + \cos\big(\frac{\pi}{3} + \frac{2n-1}{2}\pi\big).$$

b) Izračunati

$$i)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + n \cdot 2017} \qquad ii)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2017}{1+2017} + \frac{2017}{1+4034} + \ldots + \frac{2017}{1+n\cdot 2017}}.$$

c) Izračunati

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{\sin x - \cos x}.$$

Rešenje:

a)

$$f_{2k} = 2^1 + \cos\big(\frac{\pi}{3} + \frac{2\cdot 2k - 1}{2}\pi\big) = 2 + \cos\big(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi\big) = 2 + \cos\big(-\frac{\pi}{6}\big) = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$f_{2k-1} = 2^{-1} + \cos\big(\frac{\pi}{3} + \frac{2\cdot 2k - 2 - 1}{2}\pi\big) = \frac{1}{2} + \cos\big(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\big) = \frac{1}{2} + \cos\big(-\frac{7\pi}{6}\big) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima dve tačke nagomilavanja: $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $2+\frac{\sqrt{3}}{2}$ pa važi

$$\liminf f_n = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \limsup f_n = 2+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b)

$$i)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+n\cdot 2017} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n(\frac{1}{n}+2017)} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{(\frac{1}{n}+2017)} = 1\cdot 1 = 1.$$

$$ii)\ \sqrt[n]{\frac{2017}{1+2017}+\frac{2017}{1+4034}+\ldots+\frac{2017}{1+n\cdot 2017}} \le \sqrt[n]{n\frac{2017}{1+2017}} \to 1, \text{ kada } n\to\infty$$

i

$$\sqrt[n]{\frac{2017}{1+2017}+\frac{2017}{1+4034}+\ldots+\frac{2017}{1+n\cdot 2017}} \ge \sqrt[n]{n\frac{2017}{1+n\cdot 2017}} = \sqrt[n]{n}\frac{\sqrt[n]{2017}}{\sqrt[n]{1+n\cdot 2017}} \to 1, \text{ kada } n\to\infty$$

Na osnovu Teoreme o uklještenim nizovima sledi

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2017}{1+2017}+\frac{2017}{1+4034}+\ldots+\frac{2017}{1+n\cdot 2017}} = 1.$$

c)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{\sin x-\cos x}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{\operatorname{tg}x-1}\frac{\operatorname{tg}x-1}{\sin x-\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{(\operatorname{tg}x-1)+1}-1}{\operatorname{tg}x-1}\frac{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}{\sin x-\cos x} = \frac{1}{3}\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

4. Data je funkcija

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}e^{-\frac{5}{x}}.$$

(a) Odrediti domen funkcije f.

(b) Odrediti asimptote funkcije f.

Rešenje:

(a) $D_f = (-\infty,0)\cup(0,1]\cup(2,+\infty)$.

(b) Tražimo vertikalne asimptote

$$\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}e^{-\frac{5}{x}} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot e^{+\infty} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}e^{-\frac{5}{x}} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\infty} = 0,$$
$$f(1) = 0,$$
$$\lim_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}e^{-\frac{5}{x}} = \sqrt{\frac{1}{0^+}}e^{-\frac{5}{2}} = +\infty.$$

Funkcija f ima vertikalne asimptote $x=0$ i $x=2$.

Tražimo horizontalne asimptote

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}e^{-\frac{5}{x}}=1\cdot e^0=1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}e^{-\frac{5}{x}}=1\cdot e^0=1.$$

$y=1$ je horizontalna asimptota funkcije f kada $x\to\pm\infty$. Nema kosih asimptota.

5. Data je funkcija

$$f(x)=\begin{cases}(B+1)e^x, & x\in(-\infty,0),\\ A, & x=0,\\ \dfrac{\ln(x+1)}{x^{1/2}}, & x\in(0,+\infty).\end{cases}$$

(a) Odrediti konstante A i B tako da funkcija f bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

(b) Da li je funkcija f uniformno neprekidna na intervalu $[1,14)$?

Rešenje: Na $(-\infty,0)$ i $(0,\infty)$ funkcija f je neprekidna kao zbir, razlika, proizvod, količnik i kompozicija elementarnih funkcija. Preostaje da pronađemo konstante tako da f bude neprekidna i u 0. Treba da važi

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)=A.$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(B+1)e^x=B+1,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{x^{1/2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}x^{1/2}=1\cdot0=0.$$

Dakle, imamo

$$B+1=0=A\Rightarrow A=0,\ B=-1.$$

Za $A=0$ i $B=-1$ f je neprekidna na $\mathbb{R}$ pa je neprekidna i na $[1,14]$. Na osnovu Kantorove teoreme sledi da je f uniformno neprekidna na $[1,14]$, a kako je $(1,14)\subset[1,14)$ sledi da je f uniformno neprekidna na $[1,14)$.