PISMENI ISPIT IZ UVODA U ANALIZU (M4 smer), 4.4.2017.

1. Neka je X_1 domen funkcije $f_1(x) = \sqrt{11x+3} - \sqrt{6-3x} - \sqrt{9x+7} + \sqrt{x-2}$, a X_2 domen funkcije $f_2(x) = \frac{1}{\sin\frac{1}{x}}$. Dat je skup $X = X_1 \cup (\mathbb{R} \setminus X_2)$.

a) Odrediti infimum i supremum skupa X i proveriti da li skup X ima minimalni i maksimalni element.

b) Odrediti unutrašnje, adherentne, rubne, izolovane i tačke nagomilavanja skupa X.

Rešenje:

$$X_1 = \{2\},\ X_2 = \mathbb{R} \setminus \Big(\Big\{\frac{1}{k\pi},\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\Big\} \cup \{0\}\Big).$$

Tada

$$X = \{0, 2\} \cup \Big\{\frac{1}{k\pi},\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\Big\}.$$

$$\sup X = 2 \in X \Rightarrow \max X = 2$$

$$\inf X = -\frac{1}{\pi} \in X \Rightarrow \min X = -\frac{1}{\pi}.$$

$$X^0 = \emptyset, \quad \bar{X} = X, \quad X' = \{0\}, \quad \partial X = X \quad iz\, X = X \setminus \{0\}.$$

2. (a) Pronaći graničnu vrednost niza $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ako za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$ važi

$$\frac{10e^n - 21}{2e^n} < f_n < \frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.$$

(b) Dati su nizovi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takvi da važi

$$a_n < b_n < a_{n+1} \text{ i } a_n \le a,\ b_n \le a, \text{ za sve } n \in \mathbb{N}.$$

Da li nizovi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiraju? Ukoliko je odgovor potvrdan, kakav je odnos između graničnih vrednosti tih nizova?

Rešenje:

(a) Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10e^n-21}{2e^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} = 5$, na osnovu Teoreme o uklještenim nizovima sledi

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 5.$$

(b) Nizovi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ su ograničeni sa gornje strane sa a i rastući, pa na osnovu Teoreme o monotonim nizovima sledi da oni konvergiraju, a na osnovu Teoreme o uklještenim nizovima sledi da $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \le a$.

3. Izračunati:

$$(a)\ \lim_{x\to 1} \arcsin \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, \qquad (b)\ \lim_{x\to\infty} \left(\ln \sqrt[k]{e^{kx}+k} - \sqrt{x^2-kx}\right),\ k\in\mathbb{N}/$$

Rešenje:

$$(a)\ \lim_{x\to 1} \arcsin \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \arcsin \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Prethodno je korišćeno da je funkcija $f(x) = \arcsin x$ neprekidna.

$$(b)\ \lim_{x\to\infty} \left(\ln \sqrt[k]{e^{kx}+k} - \sqrt{x^2-kx}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\ln \sqrt[k]{e^{kx}(1+\frac{k}{e^{kx}})} - \sqrt{x^2-kx}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\ln e^x + \ln \sqrt[k]{1+\frac{k}{e^{kx}}} - \sqrt{x^2-kx}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\ln \sqrt[k]{1+\frac{k}{e^{kx}}} + x - \sqrt{x^2-kx}\right).$$

Kako limesi

$$\lim_{x\to\infty} \ln \sqrt[k]{1+\frac{k}{e^{kx}}} = \ln 1 = 0$$

i

$$\lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2-kx}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{kx}{x+\sqrt{x^2-kx}} = \frac{k}{2}$$

postoje možemo da razdvojimo limese pa sledi

$$\lim_{x\to\infty} \left(\ln \sqrt[k]{e^{kx}+k} - \sqrt{x^2-kx}\right) = 0 + \frac{k}{2} = \frac{k}{2}.$$

4. Data je funkcija

$$f(x) = \frac{x^3 \operatorname{tg} x}{x^2 - x}.$$

(a) Odrediti domen funkcije f.

(b) Pronaći bar dve vertikalne asimptote funkcije f.

(c) Odrediti kose asimptote funkcije f.

Rešenje: Kako

$$f(x) = \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{x - 1}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \Big(\{1\} \cup \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}\Big).$$

Vertikalne asimptote:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{x - 1} = -\infty, \ \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{x - 1} = +\infty$$

pa je prava $x = 1$ vertikalna asimptota.
Neka je $k \geq 0$. Tada

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^-} \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{x - 1} = \frac{(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^2}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi - 1} \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^+} \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{x - 1} = \frac{(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^2}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi - 1} \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

pa je prava $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^+$ vertikalna asimptota. Funkcija f nema horizontalne asimptote.

Kose asimptote:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{x^2 - x} = \textit{ne postoji},$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = ?$$

Imajući u vidu da funkcija f ima beskonačno mnogo vertikalnih asimptota, može se zaključiti da nije moguće da ona ima i kose asimptote (videti grafik 1).

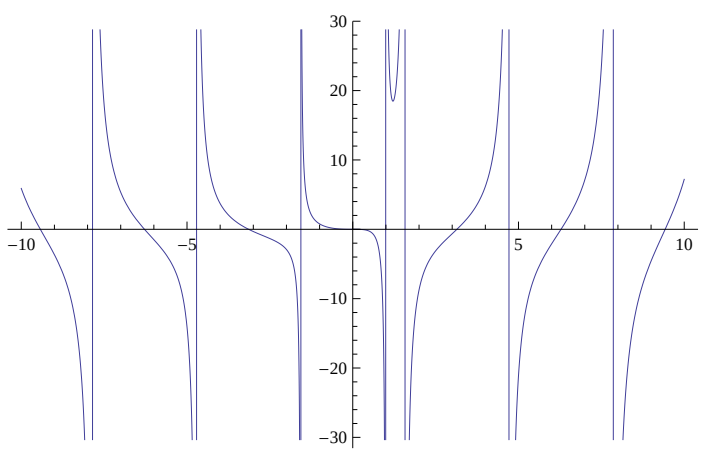

Figure 1: Zadatak 4

5. Date su funkcije $f(x) = x^2$ i $g(x) = x - 3$.

(a) Da li je funkcija

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{f \circ g(x)}{g(x)}, & x \leq 3, \\ \dfrac{g \circ f(x)}{g(x)}, & x > 3, \end{cases}$$

neprekidna na $\mathbb{R}$?

(b) Dokazati da je funkcija $g(x)$ uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$.

Kompoziciju funkcija f i g definišemo sa $f \circ g(x) = f(g(x))$.

Rešenje:

(a)

$$F(x) = \begin{cases} x - 3, & x \leq 3, \\ \frac{x^2-3}{x-3}, & x > 3. \end{cases}$$

Funkcije f i g su neprekidne na $\mathbb{R}$. Funkcija F je neprekidna na $x < 3$ i $x > 3$ kao kompozicija i količnik neprekidnih funkcija. Da bi F neprekidna u $x = 3$ treba da važi

$$F(3) = \lim_{x \to 3^-} F(x) = \lim_{x \to 3^+} F(x),$$

a kako je $F(3) = 0$ i

$$\lim_{x \to 3^+} F(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{g \circ f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 3}{x - 3} = +\infty,$$

sledi da F nije neprekidna u $x = 3$, pa time ni na $\mathbb{R}$.

(b) Dokazaćemo po definiciji da je funkcija $g(x)$ uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$. Treba pokazati

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon.$$

Fiksiramo $\varepsilon > 0$ i tražimo $\delta > 0$ takvo da za sve x_1, x_2 takve da $|x_1 - x_2| < \delta$ sledi $|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$.

$$|g(x_1) - g(x_2)| = |x_1 - 3 - (x_2 - 3)| = |x_1 - x_2| < \varepsilon.$$

Dovoljno je da izaberemo $\delta = \varepsilon$. Kako je ε bilo proizvoljno sledi da tvrđenje važi za svako ε.