PISMENI ISPIT IZ UVODA U ANALIZU (M4 smer), 6.4.2016.

1. Dat je skup

$$A = \begin{cases} \dfrac{2}{3n}(-1)^n + \sin\dfrac{(n+1)\pi}{2} - 3, & n = 4k,\ k \in \mathbb{N} \\ \\ \dfrac{2}{3n}(-1)^n + \sin\dfrac{(n+1)\pi}{2}, & n \neq 4k,\ k \in \mathbb{N} \end{cases};$$

a) Odrediti infimum i supremum skupa A (i dokazati po definiciji da te vrednosti jesu supremum i infimum). Da li skup A ima minimalni i maksimalni element?

b) Odrediti unutrašnje, adherentne, rubne, izolovane i tačke nagomilavanja skupa A.

Rešenje:
Skup A možemo napisati kao:

$$A = \begin{cases} \dfrac{1}{6k} - 2, & n = 4k,\ k \in \mathbb{N} \\ \\ \dfrac{1}{3(2k-1)} - 1, & n = 4k-2,\ k \in \mathbb{N} \\ \\ -\dfrac{2}{3(2k-1)}, & n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N} \end{cases};$$

a) **1.** Treba pokazati $\sup A = 0$

(a) Dokazujemo $(\forall x \in A)\ x \leq 0$
Važi:

$$\frac{1}{6k} - 2 < 0,\ \frac{1}{3(2k-1)} - 1 < 0,\ -\frac{2}{3(2k-1)} < 0$$

(b) Dokazujemo $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)\ x > 0 - \varepsilon$
Neka je dato $\varepsilon > 0$.

$$-\frac{2}{3(2k-1)} > -\varepsilon \Leftrightarrow k > \frac{1}{2} + \frac{1}{3\varepsilon}$$

Biramo $k_0 = \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3\varepsilon}\right] + 1$ tako da važi $x_0 = -\dfrac{2}{3(2k_0-1)} > -\varepsilon$.

$0 \notin A \Rightarrow$ ne postoji maksimalni element skupa A

2. Treba pokazati $\inf A = -2$

(a) Dokazujemo $(\forall x \in A)\ x \geq -2$
Važi:

$$\frac{1}{6k} - 2 > -2,\ \frac{1}{3(2k-1)} - 1 > -2,\ -\frac{2}{3(2k-1)} > -2$$

(b) Dokazujemo $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)\ x < -2 + \varepsilon$
Neka je dato $\varepsilon > 0$.

$$\frac{1}{6k} - 2 < -2 + \varepsilon \Leftrightarrow k > \frac{1}{6\varepsilon}$$

Biramo $k_0 = \left[\dfrac{1}{6\varepsilon}\right] + 1$ tako da važi $x_0 = \dfrac{1}{6k} - 2 < -2 + \varepsilon$.

$-2 \notin A \Rightarrow$ ne postoji minimalni element skupa A

b)

$$A^\circ = \emptyset,\ izA = A$$

$$\bar{A} = A \cup \{-2,-1,0\},\ A' = \{-2,-1,0\},\ \partial A = \bar{A}$$

2. a) Da li je navedeno tvrđenje tačno?

Dati su nizovi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takvi da bar jedan od njih divergira. Tada niz $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergira. Obrazložiti odgovor.

b) Izračunati

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^n \sin n^2}{\sqrt{\frac{5}{2}+2}\sqrt{\frac{5}{2}+2^2}\cdots\sqrt{\frac{5}{2}+2^{2n-1}}\sqrt{\frac{5}{2}+2^{2n}}}$$

Rešenje:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^n \sin n^2}{\sqrt{\frac{5}{2}+2}\sqrt{\frac{5}{2}+2^2}\cdots\sqrt{\frac{5}{2}+2^{2n-1}}\sqrt{\frac{5}{2}+2^{2n}}} = 0$$

Uputstvo: nula puta ograničen niz. Koristiti teoremu o uklještenim nizovima.

3. Izračunati:

$$a)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))},\ b)\ \lim_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{1+x}}-1\right)^{\frac{2x^2+3}{2x}}$$

Rešenje:

$$a)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))} = -2,\ b)\ \lim_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{1+x}}-1\right)^{\frac{2x^2+3}{2x}} = e^3$$

4. Odrediti domen i asimptote funkcije

$$f(x) = (x^2+5x+1)\ln\left(\frac{x^2-2}{x^2+5}\right) + \ln(1+e^x).$$

Rešenje: $D_f = (-\infty,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},\infty)$

- Vertikalne asimptote

$$\lim_{x\to -\sqrt{2}^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to \sqrt{2}^+} f(x) = -\infty$$

Prave $x = -\sqrt{2}$ i $x = \sqrt{2}$ su vertikalne asimptote.

- Horizontalne asimptote

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -7+\infty = \infty$$

Nema horizontalne asimptote kada $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -7+\ln 1 = -7$$

Prava $y = -7$ je horizontalna asimptota kada $x \to -\infty$.

- Kosa asimptota

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2-2}{x^2+5}\right)^{x+5+\frac{1}{x}} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln e^x + \ln(\frac{1}{e^x}+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{e^x})}{x} = 1$$

$$k = 0 + 1 = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} (x^2+5x+1)\ln\left(\frac{x^2-2}{x^2+5}\right) + \ln(1+e^x) - x = -7 + 0 = -7$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^x) - x = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^x) - \ln e^x = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{1+e^x}{e^x} = \ln 1 = 0$$

Prava $y = x - 7$ je kosa asimptota.

5. Date su funkcije $f(x) = x(x^2-1)$ i $g(x) = sgn(x)$.

a) Odrediti konstante a i b tako da funkcija

$$F(x) = \begin{cases} f\circ g(x), & x \le -2 \\ ax+b, & -2 < x \le 0 \\ e^{f(x)}, & x > 0 \end{cases}$$

bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

b) Da li je tako dobijena funkcija bijekcija?

c) Da li je funkcija F uniformno neprekidna na intervalu $[5,7]$?

d) Da li je funkcija F uniformno neprekidna na intervalu $(-\infty,-2]$?

Rešenje:

$$a = \frac{1}{2},\ b = 1$$

Funkcija nije bijekcija jer nije injekcija. Npr važi $F(0) = F(1) = 1$.

Funkcija je uniformno neprekidna na intervalu (Kantorova teorema). Funkcija F je uniformno neprekidna na skupu $(-\infty,-2]$ jer je konstantna na tom intervalu.