Колоквијум 1 29.4.2017.

Основи геометрије 2 Професор: Војислав Петровић

Асистенти: Владо Уљаревић и Самир Захировић

1. Нека је дата кружница k и тачка A ван ње. Наћи ГМТ тежишта троуглова $\triangle ABC$ када се тачке B и C крећу по k.

2. Конструисати троугао ако је дата једна његова симетрална дуж, и дужи на које она дели одговарајућу страницу тог троугла.

3. Дат је оштроугли троугао $\triangle ABC$ и његова описана кружница k. Нека тангента на k у тачки A сече праву $p(B,C)$ у P. Нека је M средиште дужи AP, и нека је тачка R други пресек праве $p(M,B)$ и кружнице k. Ако је S други пресек праве $p(P,R)$ и кружнице k, доказати да је $CS \parallel AP$.

   Једна идеја: Најпре показати сличност троуглова $\triangle MRP$ и $\triangle MPB$ користећи потенцију из тачке M, и затим доказати тврђење задатка.

Упутства за решења

1. Нека је l кружница са пречником OA, где је O центар кружнице k. Означимо са $\kappa = \operatorname{Int} k \setminus (l \setminus O)$, односно унутрашњост кружнице k којој су одузете све тачке које припадају кружници l сем тачке O. Тражено ГМТ је $\kappa' = h_A^{\frac{2}{3}}(\kappa)$.

   Уочимо најпре да за тачку $X \not\equiv O$ унутрашности кружнице k важи $\angle AXO = 90^\circ$ акко $X \in l$. Ово за $X \not\equiv O$ повлачи следеће: темена тетиве кружнице k су колинеарна са A акко $X \in l$. (Наравно, једина таква тетива кружнице k је она која је нормална на пречник који садржи тачку X.) Докажимо сада да је κ' тражено ГМТ.

   Ако је $\triangle ABC$ троугао такав да $B, C \in k$, онда је на основу горњих разматрања јасно да средиште A_1 дужи BC припада κ, а пошто тежиште троугла дели тежишну дуж у односу $2:1$, онда тежиште троугла припада κ'. Овим је једна инклузија доказана.

   Нека сада $T \in \kappa'$. Нека је $A_1 = h_A^{\frac{3}{2}}(T)$. Пошто $A_1 \in \kappa$, на основу разматрања из другог пасуса следи да постоји тетива BC кружнице k којој је A_1 средиште, и тако да је T тежиште троугла $\triangle ABC$. Овим је доказана и друга инклузија.

2. Дати троугао се конструише тако што се најпре констуишу тачке $A - C_1 - B$, где су AC_1 и C_1B дужи на које симетрална дуж CC_1 дели страницу AB. Затим се конструише Аполонијева кружница (уколико C_1 није средиште AB, а у том случају се овакав троугао лако конструише) која садржи све тачке X такве да је $|AX| : |XB| = |AC_1| : |C_1B|$. Потом се тачка C добија као пресек Аполонијеве кружнице, и кружнице са центром у C_1 и полупречником подударним симетралној дужи. Овакав троугао постоји акко је симетрална дуж краћа од пречника Аполонијеве кружнице. У том случају овај троугао је јединствено одређен.

3. На основу потенције из тачке M на кружницу k следи:

$$|MP|^2 = |MA|^2 = |MR| \cdot |MB|, \text{ што повлачи}$$
$$\frac{|MP|}{|MR|} = \frac{|MB|}{|MR|},$$

   Пошто је $\angle PMR = \angle BMP$ и $\frac{|MP|}{|MR|} = \frac{|MB|}{|MR|}$, следи $\triangle PMR \sim \triangle BMP$, па је $\angle MPR = \angle MBP$. Онда следи:

$$\angle APS = \angle MPR = \angle MBP = \angle RBC = \angle RSC = \angle PSC$$

пошто су $\angle RBC$ и $\angle RSC$ периферијски углови над истом тетивом. Одавде следи $AP \parallel CS$.

Колоквијум 2 1.6.2017.

Основи геометрије 2 Професор: Војислав Петровић

Асистенти: Владо Уљаревић и Самир Захировић

1. Доказати да равнострани тетраедар има све подударне тежишне дужи.

2. Дужи AB и CD се секу у тачки O под правим углом. Над дужима OA, OB, OC и OD, као над пречницима, конструисане су кружнице. Доказати да су пресечне тачке (различите од O) поменутих кружница концикличне.

   Једна идеја: Посматрати инверзију са погодно одабраним центром и произвољним полупречником.

3. У кружном ПМХП конструисати Сакеријев четвороугао $ABCD$ ($\angle A \cong \angle B \cong d$) тако да његово теме A лежи у центру апсолуте.

Упутства за решења

1. На основу задатка са вежби знамо да се све четири тежишне дужи тетраедра секу у једној тачки - тежишту тог тетраедра. Нека је $ABCD$ тетраедар, и нека су T_A и T_B тежишта страна $\triangle BCD$ и $\triangle ACD$, редом, и нека је T тежиште тетраедра $ABCD$ (и важи $[AT_A] \cap [BT_B] = \{T\}$). Нека је E средхиште ивице CD. Очигледно важи $A - T_B - E$ и $B - T_B - E$, па су A, B, T_A, T_B, E. Пошто је $|AT_B| = |\frac{2}{3}|AE| = \frac{2}{3}|BE| = |BT_A|$, онда је ABT_AT_B једнакокраки трапез. Следи $|AT_A| = |BT_B|$. Аналогно се доказује и једнакост за преостале тежишне дужи тетраедра.

2. Означимо са k_1, k_2, k_3 и k_4 кружнице над пречницима OA, OB, OC и OD, редом. Нека је $k_1 \cap k_3 = \{O, P\}$, $k_2 \cap k_3 = \{O, Q\}$, $k_2 \cap k_4 = \{O, R\}$ и $k_1 \cap k_4 = \{O, S\}$. Доказујемо да су тачке P, Q, R и S концикличне. Користимо инверзију i_O произвољног полупречника, при чему ћемо са звездицама означавати слике објеката. Праве $p(A, B)$ и $p(C, D)$ остају фиксне јер пролазе кроз центар инверзије. Приметимо да је $k_1^* \parallel p(C, D) \parallel k_2^*$ је кружнице k_1 и k_3 пролазе кроз центар инверзије O и додирују $p(C, D)$ у O. Аналогно, $k_3^* \parallel p(A, B) \parallel k_4^*$. С обзиром да је је $p(A, B) \perp p(C, D)$ следи да је $k_1^*, k_2^* \perp p(A, B)$ и $k_3^*, k_4^* \perp p(C, D)$. Другим речима, четвороугао $P^*Q^*R^*S^*$ је правоугаоник. Дакле, тачке P^*, Q^*, R^* и S^* су концикличне, па како та кружница (на којој леже) не пролази кроз O следи да су и P, Q, R и S концикличне.

   Додатни коментар: Задатак се могао решити и применом инверзије са центром у некој од поменутих тачака пресека. Такође, могуће је решити задатак без инверзије. Наиме, лако се доказује да тачке P, Q, R и S леже на страницама четвороугла $ACBD$, па се уочавањем неколико тетивних четвороуглова на слици и рутинским израчунавањем углова може добити тражени резултат.

3. Конструисати два међусобно нормална пречника r_1 и r_2 апсолуте a. Нека је центар апсолуте A, и нека је тачка B произвољна тачка на r_1 различита од A, и нека је D произвољна тачка на r_2 различита од A. Конструишимо h-праву нормалну на r_1 која садржи тачку B (она се добија консруисањем кружнице са пречником BB', где је $B' = i_a(B)$. Конструишемо h-симетралу h-дужи AB s (јасно је да је s еуклидски кружни лук). Нека је $C = i_s(D)$. Конструишемо још h-дужи BC

и CD. Пошто је BC h-осносиметрична слика дужи AD, јасно је $ABCD$ Сакеријев четвороугао.

Додатни коментар: Приметимо да смо могли и да избегнемо конструисање h-симетрале дужи AB. Уместо тога могли смо на r_1 произвољно да одаберемо тачке S на r_1 и D на r_2 различите од A, и затим да конструишемо h-нормалу s на r_1 кроз тачку S, а потом да конструишемо B и C као $i_s(A)$ и $i_s(D)$, редом.

Колоквијум 1 28.6.2017.
Основи геометрије 2 Професор: Војислав Петровић
Асистенти: Владо Уљаревић и Самир Захировић

1. У трапезу $ABCD$ са основицама AB и CD дијагонале се секу у E. Доказати да E лежи на радикалној оси Ојлерових кружница троуглова $\triangle AED$ и $\triangle BEC$.

   Једна идеја: Означити са C' пројекцију тачке C на BD, а са D' пројекцију тачке D на AC. Са C'' означити средиште дужи BE, а са D'' средиште AE. Користећи потенцију тачке E у односу на кружницу на којој леже C, D, C' и D' (објаснити зашто су ове тачке концикличне), те сличност $\triangle AEB$ са још једним троуглом извести једнакост $ED' \cdot ED'' = EC' \cdot EC''$ и одатле тврђење задатка.

2. Конструисати оштроугли троугао $\triangle ABC$ ако су дати његови углови $\angle A$ и $\angle B$, и обим троугла одређеног $\triangle CED$, где су D и E подножја нормала из темена A и B, редом.

   Једна идеја: У анализи најпре одредити углове $\angle CED$ и $\angle CDE$.

3. Нека је дата права p и тачка A ван ње. Одредити ГМТ ортоцентара троуглова $\triangle ABC$, где тачке B и C клизе по правој p.

Упутства за решења

1. Због правих углова код C' и D' закључујемо да је четвороугао $CDD'C'$ тетиван. На основу потенције тачке E у односу на описану кружницу четвороугла $CDD'C'$ закључујемо да важи $|EC| \cdot |ED'| = |ED| \cdot |EC'|$. Ово имплицира

$$\frac{|EC|}{|ED|} = \frac{|EC'|}{|ED'|}.$$

   Пошто троуглови $\triangle ABE$ и $\triangle CDE$ имају све подударне углове, важи $\triangle ABE \sim \triangle CDE$, па следи

$$\frac{|EC|}{|ED|} = \frac{|EA|}{|EB|} = \frac{|ED''|}{|EC''|} \text{ што повлачи}$$
$$\frac{|EC'|}{|ED'|} = \frac{|ED''|}{|EC''|}.$$

   Дакле, важи $|EC'| \cdot |EC''| = |ED'| \cdot |ED''|$, па је потенција тачке E у односу на Ојлерове кружнице троуглова $\triangle AED$ и $\triangle BCE$ једнака, и E припада радикалној оси ове две кружнице.

2. Лако се уочава да је четвороугао $ABDE$ тетиван (због правих углова код D и E), па је $\angle BAC \cong 180° - \angle BDE \cong \angle EDC$. Аналогно се показује и да је $\angle ABC \cong DEC$. Као у задатку са вежби можемо да конструишемо троугао $\triangle EDC$, а затим у пресеку

$p(A,C)$ и нормале на $p(B,C)$ кроз D конструишемо теме A. Аналогно можемо да конструишемо и теме B.

Троугао $\triangle EDC$ постоји и јединствен је (на основу горе поменутог задатка са вежби), и пошто је $\angle C < 90°$, онда и троугао $\triangle ABC$ постоји и јединствен је.

3. Нека је a права која садржи A и нормална је на p. Пошто је $a \perp BC$, онда је јасно да сваки ортоцентар троугла $\triangle ABC$ лежи на правој a.

   Докажимо и другу инклузију. Нека $X \in a$. Нека је $a \cap p = \{O\}$. Лако се уочава да за $X \equiv O$ и $X \equiv A$ одговарајуће тачке B и C постоје. Ако $X \in (OA)$, онда можемо произвољно да одаберемо тачку B на p различиту од O, а потом тачку C одредимо у пресеку нормале из A на $p(B,X)$ и праве p. На сличан начин се могу одредити тачке B и C на p и у случају $O-A-X$. У случају $X-O-A$ такође на сличан начин можемо одабрати тачке B и C, али при избору тачке B онда морамо да водимо рачуна да је $\angle XBA \neq 90°$ како бисмо осигурали да B и C буду различите тачке. (Дакле, одаберемо B на правој p различиту од O, и ван кружнице којој је пречник AX.)

Колоквијум 2 28.6.2017.

Основи геометрије 2 Професор: Војислав Петровић

Асистенти: Владо Уљаревић и Самир Захировић

1. Нека је $ABCD$ тетраедар, и нека је α раван нормална на $r(B,C,D)$ која садржи теме A и центар описане крузнице стране $\triangle BCD$. Аналогно дефинишимо и равни β, γ и δ. Доказати да се ове четири равни секу у једној тачки.

   Једна идеја: Доказати да је тражена тачка пресека нека значајна тачка тетраедра.

2. Нека се кружнице k и k' додирују изнутра у тачки A, и нека је k' мања кружница. Нека је $B \in k'$ различита од A. Нека је C друга тачка пресека праве $p(A,B)$ и кружнице k, и нека тангента на k' кроз B сече k у D и E. Доказати да је $p(C,E)$ тангента на описану кружницу троугла $\triangle ABE$.

   Једна идеја: Посматрати инверзију $i_C^{\sqrt{|CA|\cdot|CB|}}$. Извести закључке о сликама кружница k' и k, и тачке E. Затим доказати тврђење задатка.

3. Конструисати исечак величине четвртине круга у кружном ПМХП, ако је центар круга задат, и различит од центра апсолуте.

Упутства за решења

1. Пресечна тачка је O, центар описане сфере тетраедра. Пошто је O једнако удаљена од A, B и C, онда она лежи на нормали на $r(A,B,C)$ кроз O, па пошто ова нормала лежи у δ, онда је и $O \in \delta$. Аналогно се показује да O припада и осталим наведеним равнима, чиме је тврђење задатка доказано. (Ово следи и из задатка са вежби.)

2. Нека је $l = k(C, \sqrt{|CA|\cdot|CB|})$. Онда је $i_l(A) = B$ (и $i_l(B) = A$). Из овога се лако може закључити да је $i_l(k') = k'$. (Нека је $i_l(k') = k_1'$, и нека су O и O_1 центри од k' и k_1', редом. Пошто важи $O, O_1 \in p(C,O) \cap s_{AB}$, онда је $O \equiv O_1$. Пошто k' и $'_1$ имају заједничке центре и бар једну заједничку тачку, онда је $k' \equiv k_1'$.) Даље, k се слика

на праву којој је B једина заједничка тачка са k', па је $i_l(k) = p(D,E)$. Дакле, важи и $i_l(E) = E$, и $E \in l$.

Нека је k_0 описана кружница троугла $\triangle ABE$. Важи $E \in k_0$, и пошто је $|CE|^2$ једнако потенцији C у односу на k_0, онда је $p(C,E)$ тангента кружнице k_0, што је требало доказати.

3. Нека су a и O апсолута и њен центар, редом. Нека је A h-тачка различита од O. Конструишимо $A' = i_a(A)$. Одаберимо $B \in (OA)$, и нека је $B' = i_k(B)$, где је k кружница којој је AA' пречник. Конструишимо затим кружницу k_1 са пречником BB_1, и нека C једна пресечна тачка k и k_1. Онда за тражени кружни исечак можемо да одаберемо фигуру ограничену с дужи AB, и мањим луковима $\widehat{BC}$ и $\widehat{AC}$.

Колоквијум 1 6.9.2017.
Основи геометрије 2 Професор: Војислав Петровић
Асистенти: Владо Уљаревић и Самир Захировић

1. Дат је прав угао $\angle aOb$, и нека дуж AB задате дужине клизи у његовој унутрашњости тако да A клизи по a, а B по краку b. Одредити ГМТ средишта дужи AB.

2. Пресек дијагонала конвексног четвороугла $ABCD$ је тачка M. Нека симетрала угла $\angle ACD$ сече праву $p(A,B)$ у K. Ако важи

$$|MA| \cdot |MC| + |MA| \cdot |CD| = |MB| \cdot |MD|,$$

доказати да важи $\angle BKC \cong \angle CDB$.

Једна идеја: Означити са k кружницу са центром у C и полупречником подударним са CD. Нека је E пресечна тачка $p(A,C)$ и k таква да је $A{-}C{-}E$. Применом потенције доказати да је $ABED$ тетиван. Одредити однос углова $\angle ACD$ и $\angle ABD$. Извести закључак о још једном четвороуглу, и доказати тражену подударност.

3. Конструисати правоугли троугао, ако је задата његова тежишна дуж која одговара правом углу, и ако је дужина те тежишне дужи геометријска средина дужина катета.

Упутства за решења

1. Нека је $|AB| = d$. Означимо са $\mathscr{S}$ део кружнице $k(O, \frac{d}{2})$ који се налази у унутрашњости датог правог угла. Доказаћемо да је $\mathscr{S}$ тражено ГМТ.

Нека је X средиште дужи AB такве да $A \in a$ и $B \in b$. Онда је OX тежишна дуж која одговара хипотенузи у правоуглом троуглу AOB, па је $|OX| = \frac{d}{2}$. Дакле, $X \in \mathscr{S}$.

Нека $X \in \mathscr{S}$. Докажимо да је X средиште неке дужи дужине d са крајевима на краковима датог правог угла. Означимо са α угао који OX заклапа са a. Полуправа (у полуравни која садржи a) са почетком у X која са OX заклапа угао $180° - 2\alpha$ сече a у A' под углом α, па је $|XA'| = \frac{d}{2}$. Слично, продужетак преко X сече полуправу b у B' под углом $90° - \alpha$, па је $|XB'| = \frac{d}{2}$. Коначно, $|A'B'| = d$.

2. Једнакост из услова задатка је еквивалентна са $|MA|\cdot(|MC|+|CD|)=|MB|\cdot|MD|$, односно $|MA|\cdot(|MC|+|CE|)=|MB|\cdot|MD|$. Дакле, $|MA|\cdot|ME|=|MB|\cdot|MD|$, па су на основу задатка са вежби тачке A,B,E и D концикличне. Из особина периферијских и централних углова над истом тетивом добијамо да је $\angle ACD=2\angle ABD$, што нам са условом $\angle ACD=2\angle KCD$ даје $\angle ABD=\angle KCD$, тј. $\angle KBD=\angle KCD$. Доказали смо да су тачке K,B,C и D концикличне, па је $\angle BKC=\angle CDB$.

3. Означимо са a,b и c дужине две катете и хипотенузе. Услови задатка су сада обједињени у једнакост $\sqrt{ab}=\frac{c}{2}$. Како је $ab=\frac{c^2}{4}$, користећи формулу за површину троугла, добијамо да је $h_c=\frac{c}{4}$, где је h_c висина на хипотенузу. Сада лако конструишемо тражени троугао. Наиме, прво констришемо полукружницу са пречником $|AB|=c$, па на растојању $\frac{c}{4}$ конструшемо праву паралелну са $p(A,B)$. У пресеку конструисане праве и полукружнице добијамо тачку C.

Колоквијум 2 6.9.2017.

Основи геометрије 2 Професор: Војислав Петровић

Асистенти: Владо Уљаревић и Самир Захировић

1. Нека је $ABCD$ тетраедар, и нека су равни α, β и γ нормалне на ивице BC, AC и AB, редом, и нека све три садрже D. Доказати да је пресек α, β и γ права.

2. Нека су $\triangle ABC$ троугао, O центар његове описане кружнице k, I_A центар његове спољa приписане кружнице k_A наспрам темена A, и D, E и F додирне тачке спољa приписане кружнице са правама $p(A,C)$, $p(B,C)$ и $p(A,B)$, редом. Нека је O_1 центар Ојлерове кружнице k_O троугла $\triangle DEF$. Доказати да су O, O_1 и I_A колинеарне.

   Једна идеја: Доказати да је $i_{k_A}(k_O)=k$.

3. За задату h-тачку A и h-дуж BC у кружном Поенкареовом моделу хиперболичне планиметрије конструисати h-кружницу којој је h-центар A и h-полупречник подударан са BC.

Упутства за решења

1. Означимо са h_D праву која садржи висину тетраедра из темена D. Како је $p(A,B)\perp\alpha$ следи да је $r(A,B,C)\perp\alpha$. Узимајући у обзир да је $D\in\alpha$ и $D\in h_D$ закључујемо да $h_D\subset\alpha$. Аналогно, $h_D\subset\beta$ и $h_D\subset\gamma$, па је $\alpha\cap\beta\cap\gamma=h_D$.

2. Нека су X,Y и Z средишта дужи DF, FE и ED, редом. Докажимо да се инверзијом i_{k_A} тачке X, Y и Z сликају у A, B и C, редом. Како је $\angle XI_AF\cong FI_AA$ и $\angle I_AXF\cong\angle I_AFA\cong d$ имамо да је $\triangle XI_AF\sim\triangle FI_AA$. Из сличности добијамо $\frac{I_AX}{I_AF}=\frac{I_AF}{I_AA}$, односно $I_AX\cdot I_AA=I_AF^2$, чиме смо доказали да је $i_{k_A}(X)=A$. Аналогно за Y и Z, па је $i_{k_A}(k_O)=k$. Како се кружница k_O слика у k следи да су њихови центри и центар инверзије колинеарни, што је и требало доказати.

3. Без умањења општости претпоставимо да је $A\equiv B$. Ако то није случај можемо h-осномсиметрично пресликати B у A. Нека су s_1 и s_2 две произвољне h-праве кроз A различите од h-праве AC. Означимо $C'=i_{s_1}(C)$ и $C''=i_{s_2}(C)$. Како је у питању h-осна симетрија h-дужи AC' и AC'' леже на кружници са центром у A и полупречником AC, па је тражена кружница она која садржи C, C' и C''.