Колоквијум 1 29.4.2017.
Основи геометрије 2 Професор: Војислав Петровић
Асистенти: Владо Уљаревић и Самир Захировић

1. Нека је дата кружница k и тачка A ван ње. Наћи ГМТ тежишта троуглова $\triangle ABC$ када се тачке B и C крећу по k.

2. Конструисати троугао ако је дата једна његова симетрална дуж, и дужи на које она дели одговарајућу страницу тог троугла.

3. Дат је оштроугли троугао $\triangle ABC$ и његова описана кружница k. Нека тангента на k у тачки A сече праву $p(B, C)$ у P. Нека је M средиште дужи AP, и нека је тачка R други пресек праве $p(M, B)$ и кружнице k. Ако је S други пресек праве $p(P, R)$ и кружнице k, доказати да је $CS \parallel AP$.

   Једна идеја: Најпре показати сличност троуглова $\triangle MRP$ и $\triangle MPB$ користећи потенцију из тачке M, и затим доказати тврђење задатка.

Упутства за решења

1. Нека је l кружница са пречником OA, где је O центар кружнице k. Означимо са $\kappa = \mathrm{Int}\ k \setminus (l \setminus O)$, односно унутрашњост кружнице kкојој су одузете све тачке које припадају кружници l сем тачке O. Тражено ГМТ је $\kappa' = h_A^{\frac{2}{3}}(\kappa)$.

   Уочимо најпре да за тачку $X \not\equiv O$ унутрашности кружнице k важи $\angle AXO = 90^\circ$ акко $X \in l$. Ово за $X \not\equiv O$ повлачи следеће: темена тетиве кружнице k су колинеарна са A акко $X \in l$. (Наравно, једина таква тетива кружнице k је она која је нормална на пречник који садржи тачку X.) Докажимо сада да је κ' тражено ГМТ.

   Ако је $\triangle ABC$ троугао такав да $B, C \in k$, онда је на основу горњих разматрања јасно да средиште A_1 дужи BC припада κ, а пошто тежиште троугла дели тежишну дуж у односу $2 : 1$, онда тежиште троугла припада κ'. Овим је једна инклузија доказана.

   Нека сада $T \in \kappa'$. Нека је $A_1 = h_A^{\frac{3}{2}}(T)$. Пошто $A_1 \in \kappa$, на основу разматрања из другог пасуса следи да постоји тетива BC кружнице k којој је A_1 средиште, и тако да је T тежиште троугла $\triangle ABC$. Овим је доказана и друга инклузија.

2. Дати троугао се конструише тако што се најпре констуишу тачке $A - C_1 - B$, где су AC_1 и C_1B дужи на које симетрална дуж CC_1 дели страницу AB. Затим се конструише Аполонијева кружница (уколико C_1 није средиште AB, а у том случају се овакав троугао лако конструише) која садржи све тачке X такве да је $|AX| : |XB| = |AC_1| : |C_1B|$. Потом се тачка C добија као пресек Аполонијеве кружнице, и кружнице са центром у C_1 и полупречником подударним симетралној дужи. Овакав троугао постоји акко је симетрална дуж краћа од пречника Аполонијеве кружнице. У том случају овај троугао је јединствено одређен.

3. На основу потенције из тачке M на кружницу k следи:

$$|MP|^2 = |MA|^2 = |MR| \cdot |MB|, \text{ што повлачи}$$
$$\frac{|MP|}{|MR|} = \frac{|MB|}{|MR|},$$

Пошто је $\angle PMR = \angle BMC$ и $\frac{|MP|}{|MR|} = \frac{|MB|}{|MR|}$, следи $\triangle PMR \sim \triangle BMC$, па је $\angle MPR = \angle MBP$. Онда следи:

$$\angle APB = \angle MPR = \angle MBP = \angle RBC = \angle RSC = \angle PSC$$

пошто су $\angle RBC$ и $\angle RSC$ периферијски углови над истом тетивом. Одавде следи $AP \parallel CS$.