Колоквијум 1 13.12.2016.

Основи геометрије 1 Професор: Војислав Петровић

Асистент: Самир Захировић

1. Доказати да прве две групе аксиома без тврђења "постоје три тачке које нису инцидентне ни са једном правом" не имплицирају тврђење "за сваке две тачке A и B постоји тачка C таква да је $A - C - B$".

2. Доказати да је петоугао $ABCDE$ конвексан акко су четвороуглови $ABCD$, $ABDE$ и $ACDE$ конвексни.

3. Нека су φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 и φ_5 конвексна тела међу којима се свака четири секу. Доказати да се тада сва ова тела секу.

   Једна идеја: Нека су P, Q, R, S и T тачке које припадају $\varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5$, $\varphi_1 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5$, $\varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5$, $\varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_5$ и $\varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4$, редом. Посматрати два случаја: када постоје неке четири од ових пет тачака које су компланарне, и када не постоје такве четири тачке. У другом случају посматрати тетраедар $PQRS$, и доказати тврђење у зависности од положаја тачке T.

Упутства за решења

1. Посматрајмо следећу интерпретацију појмова: скуп тачака је скуп целих бројева, скуп целих бројева је једина права, и скуп равни је празан скуп. Релација инциденције је дефинисана на уобичајени начин, а релација поретка је дефинисана тако да важи $X - Y - Z$ акко $X < Y < Z$ или $Z < Y < X$.

   За овако интерпретиране појмове важе прве две групе аксиома без тврђења "постоје три тачке које нису инцидентне ни са једном правом", а не важи "за сваке две тачке A и B постоји тачка C таква да је $A - C - B$", јер не постоји цео број између 1 и 2.

2. Пошто свака дијагонала дели многоугао два два конвексна многоугла, три дата четвороугла су конвексна.

   Пошто су $ABCD$ и $ABDE$ конвексни, онда је $\eta_{p(A,B)}(C, D)$ и $\eta_{p(A,B)}(D, E)$, што повлачи да су A, B и C у истој полуравни одређеном са $p(A, B)$. Аналогно се доказује исто тврђење за све остале странице петоугла сем за страницу BC. Јер је $ABCD$ конвексан, онда важи $\eta_{p(B,C)}(A, D)$, и преостаје да се докаже да је и тачка E у истој полуравни одређеном правом $p(B, C)$. Пошто је $ABDE$ конвексан, онда се његове дијагонале AD и BE секу у X, и пошто важи $A-X-D$ и $B-X-E$, онда је $\eta_{p(B,C)}(D, X)$ и $\eta_{p(B,C)}(X, E)$, па следи да су A, D и E у истој полуравни у односу на $p(B, C)$. Овим је доказано да је $ABCDE$ конвексан петоугао.

3. Посматрајмо најпре случај када су неке четири тачке од P, Q, R, S и T компланарне. Нека су то б.у.о. P, Q, R и S, и нека је $\alpha = r(P, Q, R, S)$. Нека су φ_1', φ_2', φ_3' и φ_4' редом $\varphi_1 \cap \alpha$, $\varphi_2 \cap \alpha$, $\varphi_3 \cap \alpha$ и $\varphi_4 \cap \alpha$. За φ_1', φ_2', φ_3' и φ_4' очигледно важе услови Хелијеве теореме, па следи да постоји тачка $X \in \varphi_1' \cap \varphi_2' \cap \varphi_3' \cap \varphi_4' \subseteq \varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4$. Такође, пошто $P, Q, R, S \in \varphi_5$, онда је према доказу Хелијеве теореме са вежби очигледно да $X \in \varphi_5$, па $X \in \varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5$. Овим је тврђење доказано за случај када су неке четири од ових пет тачака компланарне. (Ово је могло да се докаже и имитирајући доказ Хелијеве теореме са вежби.)

   Уколико никоје четири тачке нису компланарне, онда тачка T може или да буде садржана у унутрашности тетраедра $PQRS$, или у његовој спољашњости.

У првом случају може се доказати да $T \in \varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5$. У другом случају учава се да дуж ST сече неку од равни одређених странама тетраедра. Б.у.о, нека ST сече $r(P, Q, R)$ у тачки X.

Ако се X налази у унутрашности троугла $\triangle PQR$, онда је X тражена заједничка тачка. Претпоставимо даље да $X \notin \mathrm{Int}\,\triangle PQR$. Нека, б.у.о. $X \in \mathrm{Int}\,\angle PQR$. Онда QX сече дуж PR у Y, и онда је Y тражена тачка. Ако X не припада унутрашности ни једног угла овог троугла, онда нека б.у.о. $X \in \mathrm{Int}\,\angle pQr$, где је $p = pp(QP)^*$ и $r = p(QR)^*$. У том случају Q је заједничка тачка пет конвексних скупова Q. Овим је доказано да $\in \varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5 \neq \emptyset$.

Колоквијум 2 17.1.2017.

Основи геометрије 1

Професор: Војислав Петровић

Асистент: Самир Захировић

Апсолутна геометрија

1. Нека је $\angle\alpha s\beta$ диедар, $\angle\alpha s\beta < d$, и нека је γ раван нормална на ивицу диедра s коју сече у тачки S. Нека су a и b полуправе које исходе из S, $a \subseteq \alpha$ и $b \subseteq \beta$, које су садржане у различитим полупросторима у односу на γ. Доказати да је $\angle ab > \angle\alpha\beta$.

   Једна идеја: Уочити полуправе m и n, $m, n \perp s$, $m \subseteq \alpha$ и $n \subseteq \beta$, и доказати да је $\angle mn < \angle an$. Потом посматрајући триедар S_{anb} доказати да је $\angle an < \angle ab$.

2. Нека су a и b различите компланарне праве које имају заједничку нормалу n. Нека A и B пресечне тачке a и n, и b и n, редом, и нека су $C \in a$ и $D \in b$ у истој полуравни одређеној правом n такве да важи $AC \cong BD$. Доказати да важи $\sigma_A \circ \sigma_C = \sigma_B \circ \sigma_D$ акко важи Еуклидова аксиома паралелности.

Еуклидска геометрија

3. Нека симетрала угла код темена A троугла $\triangle ABC$ сече страницу BC у тачки F. Нека је d и e праве такве да је $d \parallel p(A, C)$ и $F \in d$, и $e \parallel p(A, B)$ и $F \in e$. Нека d сече страницу AB у D, и нека e сече страницу AC у E. Доказати да је $DE \perp AF$.

Упутства за решења

1. Приметимо да је $m = \omega_\alpha(n)$. Следи на основу задатка доказаног са вежби да је $\angle mn < \angle an$ (права која продире кроз раван заклапа мањи угао са правом која је одређена њеном ортогоналном пројекцијом него са било којом другом правом која садржи тачку продора).

   (Горњу неједнакост могуће је доказати и на овај начин: одаберемо $N \in n$, и $M = \omega_\alpha(N) = \omega_m(N)$ и $A = \omega_a(N)$. Онда, пошто је $\triangle NMA$ правоугли са правим углом код темена M, следи да је $MN < AN$. Одавде, на основу леме доказане на вежбама, посматрајучи правоугле троуглове $\triangle SAN$ и $\triangle SMN$ закључујемо да је $\angle an = \angle ASN > \angle MSN = \angle mn$.)

   Посматрајмо даље триедар S_{anb}. Лако се уочава да је угао нормалног пресека његовог диедра $\angle n$ туп, а да је угао нормалног пресека диедра $\angle b$ оштар. Следи да је $\angle n > \angle b$, па пошто је у триедру наспрам већег диедра већа пљосан следи $\angle ab > \angle an$.

   Дакле, следи $\angle mn < \angle an < \angle ab$ што је требало доказати.

2. Приметимо да је $ABDC$ Сакеријев четвороугао.

   ($\Leftarrow$) Претпоставимо да важи Еуклидова аксиома паралелност, и нека је $m = p(C, D)$. Онда је $ABDC$ правоугаоник, и важи $a, b \perp m$. Следи:

   $$\sigma_A = \sigma_n \circ \sigma_a, \qquad \sigma_B = \sigma_n \circ \sigma_b,$$
   $$\sigma_C = \sigma_a \circ \sigma_m, \qquad \sigma_D = \sigma_b \circ \sigma_m.$$

   Онда важи:

   $$\sigma_A \circ \sigma_C = \sigma_n \circ \sigma_a \circ \sigma_a \circ \sigma_m = \sigma_n \circ \sigma_m = \sigma_n \circ \sigma_b \circ \sigma_b \circ \sigma_m = \sigma_B \circ \sigma_D$$

   чиме је прва импликација доказана.

   ($\Rightarrow$) Претпоставимо да важи $\sigma_A \circ \sigma_C = \sigma_B \circ \sigma_D$. Нека су m_1 и m_2 нормале на a у C и b у D, редом. Онда важи:

   $$\sigma_n \circ \sigma_{m_1} = \sigma_n \circ \sigma_a \circ \sigma_a \circ \sigma_{m_1} = \sigma_A \circ \sigma_C = \sigma_B \circ \sigma_D = \sigma_n \circ \sigma_b \circ \sigma_b \circ \sigma_{m_2} = \sigma_n \circ \sigma_{m_2},$$

   што повлачи $\sigma_{m_1} = \sigma_{m_2}$, па је $m_1 \equiv m_2$. Следи да је $ABDE$ правоугаоник, па пошто постоји четвороугао коме је збир унутрашњих углова $4d$ (па и троугао коме је збир унутрашњих углова $2d$), онда важи Еуклидова аксиома паралелности.

3. Пошто је $ADFE$ паралеограм, важи $AD \cong FE$ и $DF \cong EA$. Пошто је $\angle EAF \cong \angle DAF \cong EFA$, троугао $\triangle AFE$ је једнакокрак, па је $AE \cong FE$, што повлачи $AD \cong DF \cong FE \cong EA$. Дакле, $ADFE$ је ромб, што повлачи да се његове дијагонале AF и DE секу под правим углом.

Колоквијум 1 6.2.2017.

Основи геометрије 1

Професор: Војислав Петровић

Асистент: Самир Захировић

1. Да ли прве две групе аксиома без аксиоме II_2 имплицирају тврђење "постоји бесконачно много тачака"? Доказати.

2. Нека су дати троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ такви да је $\angle A \cong \angle D$ и $BC \cong EF$. Доказати да је $AB > DE$ акко $\angle C > \angle F$.

   Једна идеја: Претпоставити да је $AB > DE$. Уочити тачке E' и F' на $pp[A, B)$ и $pp[A, C)$, редом, тако да је $AE' \cong DE$ и $AF' \cong DF$. Најпре одредити распоред тачака A, C и F', и затим доказати да је $\angle C > \angle F$. Потом доказати другу импликацију.

3. Нека је O тачка равни α, и нека полуправа p исходи из O, није нормална на α, и није садржана у α. Нека је q полуправа одређена ортогоналном пројекцијом полуправе p на раван α, и нека су a и b полуправе равни α које исходе из O. Ако су $\angle aq$ и $\angle bq$ оштри, и ако је $\angle aq > \angle bq$, доказати да је $\angle ap > \angle bp$.

Упутства за решења

Колоквијум 1

1. Импликација није тачна јер постоји модел са коначно много тачака који задовољава прве две групе аксиома без аксиоме II_2. Као пример таквог модела могуће је одабрати модел код којег је скуп тачака $\{A, B, C, D\}$, скуп правих скуп свих његових двочланих подскупова, а скуп равни скуп свих трочланих подскупова, где је релација инциденције дефинисана на уобичајени начин, и релација распореда је празна релација.

2. Претпоставимо да важи распоред $A - F' - C$. Лако се примећује да су $\angle CF'E'$ и $\angle CE'B$ тупи као спољашњи углови тупоуглих троуглова $\triangle AE'F'$ и $\triangle AE'C$. Пошто је у троуглу наспрам тупог угла највећа страница тог троугла, следи важи $E'F' < E'C < BC$, чиме се добија контрадикција. Слично се доказује да не може да важи ни $F' \equiv C$.

   Дакле, важи $A - C - F'$. Даље, лако се уочава да се дужи $(E'F')$ и (BC) секу (рецимо, јер важи $\eta_{p(B,C)}(E', F')$ и $\eta_{p(E',F')}(B, C)$, што имплицира да се (E', F') и (B, C) секу). Означимо тачку пресека са M. Онда важи:

$$\angle ACB \cong \angle ACM > CF'M \cong \angle AF'E' \cong \angle DFE$$

   при чему неједнакост следи из односа спољашњег угла и несуседног унутрашњег угла троугла $\triangle CMF'$, а последња подударност следи из подударности троуглова $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$.

3. Нека $P \in p$, и нека су $Q = \omega_{\overline{q}}(P)$, $A = \omega_{\overline{a}}(Q)$, $B = \omega_{\overline{b}}(Q)$ ($\overline{q}$, $\overline{a}$ и $\overline{b}$ су праве одређене одговарајућим полуправама). Пошто су $\angle pq$, $\angle aq$ и $\angle bq$ оштри углови, онда важи и $Q \in q$, $A \in a$ и $B \in b$. На основу леме доказане на вежбама посматрајући троуглове $\triangle OQB$ и $\triangle OQA$ следи $AQ > BQ$ јер је $\angle QOA > \angle QOB$. Посматрајући правоугле троуглове $\triangle BQP$ и $\triangle AQP$ лако се доказује да је $AP > BP$, и на основу Теореме три нормале следи $\angle OBP \cong \angle OAP \cong d$. Даље, користећи лему са вежби посматрајући правоуглове троуглове $\triangle OAP$ и $\triangle OBP$ закључујемо да је $\angle AOP > \angle BOP$ јер је $AP > BP$, и овим је доказано тврђење.

Колоквијум 2 6.2.2017.

Основи геометрије 1 Професор: Војислав Петровић

Асистент: Самир Захировић

Апсолутна геометрија

1. Нека су A, B и C три неколинеарне тачке равни α, и нека су A_1, B_1 и C_1 тачке у истом полупростору одређеном са α такве да је $AA_1 \cong BB_1 \cong CC_1$ и $AA_1, BB_1, CC_1 \perp \alpha$. Нека је T_1 тежиште троугла $\triangle A_1B_1C_1$. Доказати да је $T = \omega_\alpha(T_1)$ тежиште троугла $\triangle ABC$.

2. Нека су a и b дужи такве да је $a > b$. Доказати да постоји правоугли троугао коме је хипотенуза подударна са a и коме је једна катета подударна са b.

Еуклидска геометрија

3. Нека је троугао $\triangle ABC$ једнакокрак са крацима AC и BC, и нека се његове тежишне дужи t_a и t_b секу под правим углом. Доказати да је $h_c = \frac{3c}{2}$.

Упутства за решења

Колоквијум 2

1. Означимо са D_1, E_1, F_1, D, E и F средишта дужи B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1, BC, CA и AB, редом. Четвороугао ABB_1A_1 је Сакеријев, и на основу задатка са вежби $p(F, F')$ је симетрала дужи AB и A_1B_1. Следи да је $FF_1 \perp AB$, па пошто $p(F, F_1)$ лежи у равни $r(ABB_1A_1)$ нормалној на $r(A, B, C)$, онда је $p(F, F_1) \perp \alpha$, што повлачи да је $F = \omega_\alpha(F_1)$. Следи да је $\omega_\alpha([C_1F_1]) = [CF]$ (довољно је уочити и да је $\omega_\alpha([C_1F_1]) \subseteq p(C, F)$, може се и с тиме доказати тврђење). Аналогно се доказује да је $\omega_\alpha([A_1D_1]) = [AD]$. Следи $T = \omega(T_1) = \omega([A_1D_1] \cap [C_1F_1]) = [AD] \cap [CF]$, па је T тежиште троугла $\triangle ABC$.

2. Нека је k кружница са полупречником дужине a и са центром O, и нека $K \in k$. Нека је $A \in (OK)$ такво да је $OA \cong b$. Нека је n права нормална на $p(O, K)$ која садржи A. Пошто n садржи унутрашњу тачку кружнице k, онда се k и n секу (на основу доказане теореме са предавања). Нека је B та пресечна тачка. Онда је $\triangle OAB$ тражени троугао.

3. Нека је T тежиште троугла $\triangle ABC$, и нека је C_1 средиште његове основице AB. Пошто је $\triangle C_1BT$ једнакокрак, и пошто тежиште дели тежишну дуж у односу $2:1$ следи $CC_1 = CT + TC_1 = 2 \cdot TC_1 + TC_1 = 2 \cdot C_1B + C_1B = \frac{3c}{2}$.

Колоквијум 1 6.2.2017.

Основи геометрије 1 Професор: Војислав Петровић

Асистент: Самир Захировић

1. Нека је дат $\triangle ABC$ у ком важи $BC < AB \cong AC$. Доказати да постоји описана кружница датог троугла.

   Једна идеја: На симетрали странице BC на одређен начин уочити тачку једнако удаљену од тачака A и B.

2. Нека је дат троугао $\triangle ABC$, и нека $D \in (BC)$. Доказати да важи

$$AD > \frac{1}{2}(AB + AC - BC).$$

Упутства за решења

1. Нека су A_1 и B_1 средишта основица BC и AC, редом, и нека је T тежиште троугла $\triangle ABC$. BB_1 је тежишна линија троугла $\triangle BC$, и пошто је $BC < AB$ следи да је $\angle AB_1B > \angle CB_1B$ (посматрајући троуглове $\triangle AB_1B$ и $\triangle CB_1B$), и да је угао $\angle AB_1B$ туп. Онда, на основу hk леме посматрајући угао $\angle AB_1B$ следи да s_b симетрала странице AC сече дуж AT у тачки O. Пошто је троугао $\triangle ABC$ једнакокрак, онда је $[AT] \subseteq s_a$, где је s_a симетрала странице BC.

   На основу задатка доказаног на вежбама, пошто се симетрале две странице троугла $\triangle ABC$ секу, све три симетрале троугла се секу у једној тачки, и та тачка је центар његове описане кружнице.

2. Користећи неједнакост троугла добијамо:

$$\begin{aligned} AD + CD &> AC \text{ и} \\ AD + DB &> AB, \text{ што повлачи} \\ 2AD + BC \cong 2AD + CD + DB &> AB + AC, \text{ а ово даље имплицира} \\ AD &> \frac{1}{2}(AB + AC - BC). \end{aligned}$$

Колоквијум 2 6.2.2017.

Основи геометрије 1

Професор: Војислав Петровић

Асистент: Самир Захировић

Апсолутна геометрија

1. Нека су a, b и c праве из истог прамена. Наћи фиксне тачке следеће трансформације:

$$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_a \circ \sigma_b.$$

Једна идеја: Подсетити се шта представља композиција три осне симетрије с осама из истог прамена, и потом искористити чињеницу да је осна симетрија пресликавање које је само себи инверзно.

2. Нека права p не сече раван α. Доказати да, ако p и α имају заједничку нормалу, онда је ортогонална пројекција праве p на α отворена дуж или права.

Еуклидска геометрија

3. Нека је троугао $\triangle ABC$ једнакокрак са основицом AB, и нека $D \in (AB)$. Нека су $M = \omega_{p(A,C)}(D)$ и $N = \omega_{p(B,C)}(D)$. Ако је P подножје нормале из A на $p(B, C)$, доказати да је $AP = DM + DN$.

Упутства за решења

1. Пошто је композиција три осне симетрије осна симетрија, и пошто је осна симетрија сама себи инверзна, онда је $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma c = (\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma c)^{-1} = \sigma_c^{-1} \circ \sigma_b^{-1} \circ \sigma_a^{-1} = \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$. Онда следи:

$$\begin{aligned}\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_a \circ \sigma_b &= \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_a \circ \sigma_b \\ &= \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_b = \sigma_c.\end{aligned}$$

Одавде следи да су фиксне тачке задатог пресликавања тачно све тачке праве c.

2. Нека је заједничка нормала праве p и равни α права t, која их сече у P и P', редом.

На вежбама је доказано да је пројекција праве на раван тачка, или отворена дуж, или отворена полуправа, или права. Очигледно ортогонална пројекција праве p на раван α није тачка. Претпоставимо да је ортогонална пројекција праве p на α полуправа $q = pp(A', P')$. Нека је B' тачка таква да је $A' - P' - B'$ и $A'P' \cong B'P'$. Онда постоји тачка B на p таква да је $\omega_\alpha(B) = B'$. Нека је A тачка таква да је $A - P - B$ и $AP \cong BP$. Лако се може доказати да је $B' = \omega_\alpha(B)$. Овим је добијена контрадикција, па ортогонална пројекција p на α може бити само отворена дуж или права.

3. Нека је E подножје нормале из тачке D на дуж AP. Онда је $EDNP$ правоугаоник, и $\triangle ADM \cong \triangle DAE$. Одатле следи:

$$AP = AE + ED = DM + DN.$$