

- Доказати да прве две групе аксиома без тврђења "постоје три тачке које нису инцидентне ни са једном правом" не имплицирају тврђење "за сваке две тачке  $A$  и  $B$  постоји тачка  $C$  таква да је  $A - C - B$ ".
- Доказати да је петоугао  $ABCDE$  конвексан акко су четвороуглови  $ABCD$ ,  $ABDE$  и  $ACDE$  конвексни.
- Нека су  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $\varphi_4$  и  $\varphi_5$  конвексна тела међу којима се свака четири секу. Доказати да се тада сва ова тела секу.

Једна идеја: Нека су  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  и  $T$  тачке које припадају  $\varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5$ ,  $\varphi_1 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5$ ,  $\varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5$ ,  $\varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_5$  и  $\varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4$ , редом. Посматрати два случаја: када постоје неке четири од ових пет тачака које су компланарне, и када не постоје такве четири тачке. У другом случају посматрати тетраедар  $PQRS$ , и доказати тврђење у зависности од положаја тачке  $T$ .

### Упутства за решења

#### Колоквијум 1

- Посматрајмо следећу интерпретацију појмова: скуп тачака је скуп целих бројева, скуп целих бројева је једина права, и скуп равни је празан скуп. Релација инцидентности је дефинисана на уобичајени начин, а релација поретка је дефинисана тако да важи  $X - Y - Z$  акко  $X < Y < Z$  или  $Z < Y < X$ .

За овако интерпретиране појмове важе прве две групе аксиома без тврђења "постоје три тачке које нису инцидентне ни са једном правом", а не важи "за сваке две тачке  $A$  и  $B$  постоји тачка  $C$  таква да је  $A - C - B$ ", јер не постоји цео број између 1 и 2.

- Пошто свака дијагонала дели многоугао два два конвексна многоугла, три дата четвороугла су конвексна.

Пошто су  $ABCD$  и  $ABDE$  конвексни, онда је  $\eta_{p(A,B)}(C, D)$  и  $\eta_{p(A,B)}(D, E)$ , што повлачи да су  $A$ ,  $B$  и  $C$  у истој полуравни одређеном са  $p(A, B)$ . Аналогно се доказује исто тврђење за све остале странице петоугла сем за страницу  $BC$ . Јер је  $ABCD$  конвексан, онда важи  $\eta_{p(B,C)}(A, D)$ , и преостаје да се докаже да је и тачка  $E$  у истој полуравни одређеном правом  $p(B, C)$ . Пошто је  $ABDE$  конвексан, онда се његове дијагонале  $AD$  и  $BE$  секу у  $X$ , и пошто важи  $A - X - D$  и  $B - X - E$ , онда је  $\eta_{p(B,C)}(D, X)$  и  $\eta_{p(B,C)}(X, E)$ , па следи да су  $A$ ,  $D$  и  $E$  у истој полуравни у односу на  $p(B, C)$ . Овим је доказано да је  $ABCDE$  конвексан петоугао.

- Посматрајмо најпре случај када су неке четири тачке од  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  и  $T$  компланарне. Нека су то б.у.о.  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $S$ , и нека је  $\alpha = r(P, Q, R, S)$ . Нека су  $\varphi'_1$ ,  $\varphi'_2$ ,  $\varphi'_3$  и  $\varphi'_4$  редом  $\varphi_1 \cap \alpha$ ,  $\varphi_2 \cap \alpha$ ,  $\varphi_3 \cap \alpha$  и  $\varphi_4 \cap \alpha$ . За  $\varphi'_1$ ,  $\varphi'_2$ ,  $\varphi'_3$  и  $\varphi'_4$  очигледно важе услови Хелијеве теореме, па следи да постоји тачка  $X \in \varphi'_1 \cap \varphi'_2 \cap \varphi'_3 \cap \varphi'_4 \subseteq \varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4$ . Такође, пошто  $P, Q, R, S \in \varphi_5$ , онда је према доказу Хелијеве теореме са вежби очигледно да  $X \in \varphi_5$ , па  $X \in \varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5$ . Овим је тврђење доказано за случај када су неке четири од ових пет тачака компланарне. (Ово је могло да се докаже и имитирајући доказ Хелијеве теореме са вежби.)

Уколико никоје четири тачке нису компланарне, онда тачка  $T$  може или да буде садржана у унутрашности тетраедра  $PQRS$ , или у његовој спољашњости.

У првом случају може се доказати да  $T \in \varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5$ . У другом случају учавача се да дуж  $ST$  сече неку од равни одређених странама тетраедра. Б.у.о, нека  $ST$  сече  $r(P, Q, R)$  у тачки  $X$ .

Ако се  $X$  налази у унутрашности троугла  $\triangle PQR$ , онда је  $X$  тражена заједничка тачка. Претпоставимо даље да  $X \notin \text{Int} \triangle PQR$ . Нека, б.у.о.  $X \in \text{Int} \angle PQR$ . Онда  $QX$  сече дуж  $PR$  у  $Y$ , и онда је  $Y$  тражена тачка. Ако  $X$  не припада унутрашности ни једног угла овог троугла, онда нека б.у.о.  $X \in \text{Int} \angle pQr$ , где је  $p = pp(QP)^*$  и  $r = p(QR)^*$ . У том случају  $Q$  је заједничка тачка пет конвексних скупова  $Q$ . Овим је доказано да  $\in \varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5 \neq \emptyset$ .

## Апсолутна геометрија

1. Нека је  $\angle\alpha\beta$  диедар,  $\angle\alpha\beta < d$ , и нека је  $\gamma$  равна нормална на ивицу диедра  $s$  коју сече у тачки  $S$ . Нека су  $a$  и  $b$  полуправе које исходе из  $S$ ,  $a \subseteq \alpha$  и  $b \subseteq \beta$ , које су садржане у различитим полупросторима у односу на  $\gamma$ . Доказати да је  $\angle ab > \angle\alpha\beta$ .

Једна идеја: Уочити полуправе  $m$  и  $n$ ,  $m, n \perp s$ ,  $m \subseteq \alpha$  и  $n \subseteq \beta$ , и доказати да је  $\angle mn < \angle an$ . Потом посматрајући триедар  $S_{anb}$  доказати да је  $\angle an < \angle ab$ .

2. Нека су  $a$  и  $b$  различите компланарне праве које имају заједничку нормалу  $n$ . Нека  $A$  и  $B$  пресечне тачке  $a$  и  $n$ , и  $b$  и  $n$ , редом, и нека су  $C \in a$  и  $D \in b$  истој полуравни одређеној правом  $n$  такве да важи  $AC \cong BD$ . Доказати да важи  $\sigma_A \circ \sigma_C = \sigma_B \circ \sigma_D$  ако важи Еуклидова аксиома паралелности.

## Еуклидска геометрија

3. Нека симетрала угла код темена  $A$  троугла  $\triangle ABC$  сече страницу  $BC$  у тачки  $F$ . Нека је  $d$  и  $e$  праве такве да је  $d \parallel p(A, C)$  и  $F \in d$ , и  $e \parallel p(A, B)$  и  $F \in e$ . Нека  $d$  сече страницу  $AB$  у  $D$ , и нека  $e$  сече страницу  $AC$  у  $E$ . Доказати да је  $DE \perp AF$ .

## Упутства за решења

## Колоквијум 2

1. Приметимо да је  $m = \omega_\alpha(n)$ . Следи на основу задатка доказаног са вежби да је  $\angle mn < \angle an$  (права која продире кроз равна заклапа мањи угао са правом која је одређена њеном ортогоналном пројекцијом него са било којом другом правом која садржи тачку продора).

(Горњу неједнакост могуће је доказати и на овај начин: одаберемо  $N \in n$ , и  $M = \omega_\alpha(N) = \omega_m(N)$  и  $A = \omega_a(N)$ . Онда, пошто је  $\triangle NMA$  правоугли са правим углом код темена  $M$ , следи да је  $MN < AN$ . Одавде, на основу леме доказане на вежбама, посматрајући правоугле троуглове  $\triangle SAN$  и  $\triangle SMN$  закључујемо да је  $\angle an = \angle ASN > \angle MSN = \angle mn$ .)

Посматрајмо даље триедар  $S_{anb}$ . Лако се уочава да је угао нормалног пресека његовог диедра  $\angle n$  туп, а да је угао нормалног пресека диедра  $\angle b$  оштар. Следи да је  $\angle n > \angle b$ , па пошто је у триедру наспрам већег диедра већа пљосан следи  $\angle ab > \angle an$ .

Дакле, следи  $\angle mn < \angle an < \angle ab$  што је требало доказати.

2. Приметимо да је  $ABDC$  Сакеријев четвороугао.

( $\Leftarrow$ ) Претпоставимо да важи Еуклидова аксиома паралелност, и нека је  $m = p(C, D)$ . Онда је  $ABDC$  правоугаоник, и важи  $a, b \perp m$ . Следи:

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \sigma_n \circ \sigma_a, & \sigma_B &= \sigma_n \circ \sigma_b, \\ \sigma_C &= \sigma_a \circ \sigma_m, & \sigma_D &= \sigma_b \circ \sigma_m.\end{aligned}$$

Онда важи:

$$\sigma_A \circ \sigma_C = \sigma_n \circ \sigma_a \circ \sigma_a \circ \sigma_m = \sigma_n \circ \sigma_m = \sigma_n \circ \sigma_b \circ \sigma_b \circ \sigma_m = \sigma_B \circ \sigma_D$$

чиме је прва импликација доказана.

( $\Rightarrow$ ) Претпоставимо да важи  $\sigma_A \circ \sigma_C = \sigma_B \circ \sigma_D$ . Нека су  $m_1$  и  $m_2$  нормале на  $a$  у  $C$  и  $b$  у  $D$ , редом. Онда важи:

$$\sigma_n \circ \sigma_{m_1} = \sigma_n \circ \sigma_a \circ \sigma_a \circ \sigma_{m_1} = \sigma_A \circ \sigma_C = \sigma_B \circ \sigma_D = \sigma_n \circ \sigma_b \circ \sigma_b \circ \sigma_{m_2} = \sigma_n \circ \sigma_{m_2},$$

што повлачи  $\sigma_{m_1} = \sigma_{m_2}$ , па је  $m_1 \equiv m_2$ . Следи да је  $ABDE$  правоугаоник, па пошто постоји четвороугао коме је збир унутрашњих углова  $4d$  (па и троугао коме је збир унутрашњих углова  $2d$ ), онда важи Еуклидова аксиома паралелности.

- Пошто је  $ADFE$  паралелограм, важи  $AD \cong FE$  и  $DF \cong EA$ . Пошто је  $\angle EAF \cong \angle DAF \cong \angle EFA$ , троугао  $\triangle AFE$  је једнакокрак, па је  $AE \cong FE$ , што повлачи  $AD \cong DF \cong FE \cong EA$ . Дакле,  $ADFE$  је ромб, што повлачи да се његове дијагонале  $AF$  и  $DE$  секу под правим углом.