Колоквијум 1 13.12.2016.

Основи геометрије 1 Професор: Војислав Петровић

Асистент: Самир Захировић

1. Доказати да прве две групе аксиома без тврђења "постоје три тачке које нису инцидентне ни са једном правом" не имплицирају тврђење "за сваке две тачке A и B постоји тачка C таква да је $A - C - B$".

2. Доказати да је петоугао $ABCDE$ конвексан акко су четвороуглови $ABCD$, $ABDE$ и $ACDE$ конвексни.

3. Нека су φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 и φ_5 конвексна тела међу којима се свака четири секу. Доказати да се тада сва ова тела секу.

   Једна идеја: Нека су P, Q, R, S и T тачке које припадају $\varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5$, $\varphi_1 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5$, $\varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5$, $\varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_5$ и $\varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4$, редом. Посматрати два случаја: када постоје неке четири од ових пет тачака које су компланарне, и када не постоје такве четири тачке. У другом случају посматрати тетраедар $PQRS$, и доказати тврђење у зависности од положаја тачке T.

Упутства за решења

Колоквијум 1

1. Посматрајмо следећу интерпретацију појмова: скуп тачака је скуп целих бројева, скуп целих бројева је једина права, и скуп равни је празан скуп. Релација инциденције је дефинисана на уобичајени начин, а релација поретка је дефинисана тако да важи $X - Y - Z$ акко $X < Y < Z$ или $Z < Y < X$.

   За овако интерпретиране појмове важе прве две групе аксиома без тврђења "постоје три тачке које нису инцидентне ни са једном правом", а не важи "за сваке две тачке A и B постоји тачка C таква да је $A - C - B$", јер не постоји цео број између 1 и 2.

2. Пошто свака дијагонала дели многоугао два два конвексна многоугла, три дата четвороугла су конвексна.

   Пошто су $ABCD$ и $ABDE$ конвексни, онда је $\eta_{p(A,B)}(C, D)$ и $\eta_{p(A,B)}(D, E)$, што повлачи да су A, B и C у истој полуравни одређеном са $p(A, B)$. Аналогно се доказује исто тврђење за све остале странице петоугла сем за страницу BC. Јер је $ABCD$ конвексан, онда важи $\eta_{p(B,C)}(A, D)$, и преостаје да се докаже да је и тачка E у истој полуравни одређеном правом $p(B, C)$. Пошто је $ABDE$ конвексан, онда се његове дијагонале AD и BE секу у X, и пошто важи $A - X - D$ и $B - X - E$, онда је $\eta_{p(B,C)}(D, X)$ и $\eta_{p(B,C)}(X, E)$, па следи да су A, D и E у истој полуравни у односу на $p(B, C)$. Овим је доказано да је $ABCDE$ конвексан петоугао.

3. Посматрајмо најпре случај када су неке четири тачке од P, Q, R, S и T компланарне. Нека су то б.у.о. P, Q, R и S, и нека је $\alpha = r(P, Q, R, S)$. Нека су φ'_1, φ'_2, φ'_3 и φ'_4 редом $\varphi_1 \cap \alpha$, $\varphi_2 \cap \alpha$, $\varphi_3 \cap \alpha$ и $\varphi_4 \cap \alpha$. За φ'_1, φ'_2, φ'_3 и φ'_4 очигледно важе услови Хелијеве теореме, па следи да постоји тачка $X \in \varphi'_1 \cap \varphi'_2 \cap \varphi'_3 \cap \varphi'_4 \subseteq \varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4$. Такође, пошто $P, Q, R, S \in \varphi_5$, онда је према доказу Хелијеве теореме са вежби очигледно да $X \in \varphi_5$, па $X \in \varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5$. Овим је тврђење доказано за случај када су неке четири од ових пет тачака компланарне. (Ово је могло да се докаже и имитирајући доказ Хелијеве теореме са вежби.)

   Уколико никоје четири тачке нису компланарне, онда тачка T може или да буде садржана у унутрашности тетраедра $PQRS$, или у његовој спољашњости.

   У првом случају може се доказати да $T \in \varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5$. У другом случају учава се да дуж ST сече неку од равни одређених странама тетраедра. Б.у.о, нека ST сече $r(P, Q, R)$ у тачки X.

   Ако се X налази у унутрашности троугла $\triangle PQR$, онда је X тражена заједничка тачка. Претпоставимо даље да $X \notin \operatorname{Int} \triangle PQR$. Нека, б.у.о. $X \in \operatorname{Int} \angle PQR$. Онда QX сече дуж PR у Y, и онда је Y тражена тачка. Ако X не припада унутрашности ни једног угла овог троугла, онда нека б.у.о. $X \in \operatorname{Int} \angle pQr$, где је $p = pp(QP)^*$ и $r = p(QR)^*$. У том случају Q је заједничка тачка пет конвексних скупова Q. Овим је доказано да $\in \varphi_1 \cap \varphi_2 \cap \varphi_3 \cap \varphi_4 \cap \varphi_5 \neq \emptyset$.