Колоквијум 1 2.4.2016.

Основи геометрије 1 Професор: Војислав Петровић

Асистент: Самир Захировић

1. Нека су $\mathcal{I}$ и $\mathcal{II}$ прва и друга група аксиома, респективно. Нека је $\mathcal{II}^* = (\mathcal{II} \setminus \{II_2\}) \cup \{II_2^*\}$, при чему је:

   - II_2^*: За сваке две тачке A и B постоји тачка C таква да је $A - C - B$.

   Доказати да скупови тврђења $\mathcal{I} \cup \mathcal{II}$ и $\mathcal{I} \cup \mathcal{II}^*$ нису еквивалентни.
   Једна идеја: Пронаћи модел једног скупа тврђења који није модел другог. Као овакав модел могуће је одабрати погодан подскуп простора E^3 са одговарајућим интерпретацијама појмова тачка, права и раван.

2. Нека су B и C тачке равни α и нека је $A \notin \alpha$. Нека је $A_0 = \omega_\alpha(A)$. Доказати да је $A_0B < A_0C \Leftrightarrow AB < AC$.

3. Нека је $ABCD$ неконвексан четвороугао такав да је B у унутрашњости троугла $\triangle ACD$. Означимо са P и Q пресечне тачке $p(A, B)$ и $[CD]$, и $p(BC)$ и $[AD]$, респективно. Ако је $BPDQ$ тангентан четвороугао, доказати да важи $AB+CD = BC + AD$.

Колоквијум 2 2.4.2016.

Основи геометрије 1 Професор: Војислав Петровић

Асистент: Самир Захировић

Апсолутна геометрија

1. Нека се се праве p и q секу, и нека су p и q фиксне праве транслација τ_1 и τ_2, редом. Доказати да је $\tau_2 \circ \tau_1$ транслација.

2. Нека је $ABCD$ Сакеријев четвороугао. Доказати да се његове дијагонале полове акко важи еуклидска аксиома паралелности.

Еуклидска геометрија

3. Нека су P, Q и R средишта страница BC, CA и AB троугла $\triangle ABC$, редом, и нека је A' подножје висине из темена A. Доказати да је $\angle QA'B \cong \angle RPC$.
   Једна идеја: Посматрати четвороугао $QRPA'$.

Упутства за решења

Колоквијум 1

1. Затворени полупростор са одговарајућим интерпретацијама појмова тачка, права и раван, и релације $X - Y - Z$ је модел скупа тврђења $\mathcal{I} \cup \mathcal{II}^*$, при чему ово није модел скупа $\mathcal{I} \cup \mathcal{II}$, јер за произвољну тачку A равни α која одређује овај полупростор, и за произвољну тачку B која је у затвореном полупростору али није у α не постоји тачка C таква да је $A - B - C$.

2. Нека је $BA_0 < CA_0$. Онда постоји $D \in (CA_0)$ таква да је $BA_0 \cong DA_0$. Лако се показује да је онда $\triangle BA_0A \cong \triangle DA_0A$, те је $DA \cong BA$, и лако се уочава да је $\angle CDA$ туп. Ово имплицира $BA \cong DA < CA$, што је требало показати.

   Да бисмо показали да важи и друга импликација, претпоставимо да је $BA < CA$, и претпоставимо да је $BA_0 \geq CA_0$. На основу малопре показаног, или је $BA > CA$ или је $BA \cong CA$, што је у контрадикцији са претпоставком.

3. Означимо додирне тачке кружнице уписане у четвороугао $BPDQ$ са његовим страницама BP, PD, DQ и QB са X, Y, Z и T, редом. Онда је:

$$\begin{aligned}|AB| + |CD| &= |AX| - |XB| + |CY| + |YD| = |AZ| - |TB| + |CT| + |ZD| \\ &= (|AZ| + |ZD|) + (|CT| - |TB|) = |AD| + |BC|,\end{aligned}$$

чиме је тврђење доказано.

Колоквијум 2

1. Нека се p и q секу у тачки A. Транслација τ_1 може да се представи као компомозиција две осне симетрије чије су осе нормалне на p и од којих једна садржи A. Нека су то праве a_1 и b ($A \in a$), и аналогно важи за τ_2. Дакле, нека је $\tau_1 = \sigma_b \circ \sigma_{a_1}$, и нека је $\tau_2 = \sigma_{a_2} \circ \sigma_c$. Означимо са B и C пресечне тачке b са p, и c са q, редом. Онда је:

$$\tau_1 \circ \tau_2 = \sigma_b \circ \sigma_{a_1} \circ \sigma_{a_1} \circ \sigma_c = \sigma_B \circ \sigma_A \circ \sigma_A \circ \sigma_C = \sigma_B \circ \sigma_C,$$

а композиција две централне симетрије је транслација.

2. Ако важи еуклидска аксиома паралелности, онда је Сакеријев четвороугао правоугаоник, па му се дијагонале полове.

   Претпоставимо сада да се дијагонале AC и BD полове, и означимо њихову пресечну тачку са S. Онда се лако показује да су троуглови $\triangle ABS$ и $\triangle CDS$ подусарни, као и троуглови $\triangle BCS$ и $\triangle ADS$. Овако добијамо да су сва четири угла Сакеријевог четвороугла $ABCD$ подударна, тј. сва четири су права, и важи да је збир његових унутрашних углова $4d$. Ово имплицира да важи еуклидска аксиома паралелности.

3. Како је RP средња линија троугла, онда је $|RP| = \frac{1}{2}|AC|$, и како је троугао $\triangle AA'C$ правоугли, онда је $|A'Q| = \frac{1}{2}|AC|$, те је $|RP| = |QA'|$. Такође, важи и $QR||BC$, па је $QRPA'$ једнакокраки трапез, што имплицира подударност задатих углова.