Verovatnoća – pismeni ispit
11. septembar 2019.

1. Verovatnoća da se knjiga nalazi u biblioteci je p. Ako je knjiga u biblioteci, može se nalaziti na nekoj od n polica. Pregledano je m $(m < n)$ polica i knjiga nije nađena. Kolika je sada verovatnoća da je knjiga u biblioteci?

   Rešenje:

   Neka je A događaj da je knjiga u biblioteci, a B događaj da knjiga nije na nekoj od pregledanih m polica. Tražimo $P(A|B)$ i važi

   $$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})}.$$

   Imamo $P(B|A) = \frac{n-m}{n}$, $P(B|\overline{A}) = 1$, $P(\overline{A}) = 1 - p$ pa gornja formula (nakon sređivanja) postaje

   $$P(A|B) = \frac{p(n-m)}{n - mp}.$$

2. Data je slučajna promenljiva

   $$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}.$$

   Neka je $X = -2 + aY$, $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X.

   (b) Neka je $a = 1$. Za koje vrednosti važi $F_X(x) = \frac{7}{12}$?

   Rešenje: Imamo

   $$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1 \\ 1/3, & 1 < y \leq 2 \\ 7/12, & 2 < y \leq 3 \\ 1, & y > 3. \end{cases}$$

   Ako je $a = 0$, važi $F_X(x) = P\{-2 < x\} = \begin{cases} 1, & x > -2 \\ 0, & x \leq -2 \end{cases}.$

   Ako $a > 0$,

   $$F_X(x) = F_Y\Big(\frac{x+2}{a}\Big),$$

   dok za $a < 0$ važi

   $$F_X(x) = 1 - P\{Y = \frac{x+2}{a}\} - F_Y\Big(\frac{x+2}{a}\Big).$$

   Dakle, za $a = 1$

   $$F_X(x) = F_Y(x+2) = \frac{7}{12} \quad \text{ako i samo ako} \quad 2 < x + 2 \leq 3,$$

   pa $0 < x \leq 1$.

3. Date su slučajne promenljive $X : \mathcal{U}(1, 2)$ i $Y|X = x : \mathcal{U}(1, 1 + \frac{x+1}{2})$. Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Z = 2X + Y$.

   Rešenje: Imamo

   $$\varphi_{(X,Y)}(x, y) = \varphi_X(x)\varphi_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \frac{2}{x+1}, & x \in (1, 2),\ y \in (1, 1 + \frac{x+1}{2}) \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Definišimo dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu (Z, V), gde $V = X$. Tada je ||J||=1 i imamo

$$\varphi_{(Z,V)}(z, v) = 1 \cdot \varphi_{(X,Y)}(x(z, v), y(z, y)),$$

gde $x(z, v) = v$ i $y(z, v) = z - 2v$. Dakle

$$\varphi_{(Z,V)}(z, v) = \begin{cases} \frac{2}{v+1}, & v \in (1, 2),\ z \in (1 + 2v, \frac{3}{2} + \frac{5}{2}v) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Dobijamo

$$\varphi_Z(z) = \begin{cases} \int_1^{\frac{z-1}{2}} \frac{2}{v+1} dv = 2 \ln \frac{z+1}{4}, & z \in (3, 4] \\ \int_{\frac{2z-3}{5}}^{\frac{z-1}{2}} \frac{2}{v+1} dv = 2 \ln \frac{5}{4}, & z \in (4, 5] \\ \int_{\frac{2z-3}{5}}^{2} \frac{2}{v+1} dv = 2 \ln \frac{5}{z+1}, & z \in (5, 6.5] \\ 0 & z \notin (3, 6.5]. \end{cases}$$

4. Slučajne promenljive X_n, $n = 1, 2, ...$ imaju $\mathcal{U}(0, \dfrac{1}{n^2})$ raspodelu, a slučajne promenljive Y_n, $n = 1, 2, ...$ nezavisne od X_n, $n = 1, 2, ...$ su zadate zakonom raspodele verovatnoća:

$$Y_n : \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{n^2} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},\ n = 1, 2, ...$$

   (a) Ispitati sve četiri vrste konvergencija niza $Z_1, Z_2, ...$ definisanog sa

$$Z_n = X_n + Y_n, \quad n = 1, 2, ...$$

   (b) Odrediti karakterističnu funkciju od Z_n.

Rešenje:

   (a) Važi $E(X_n) = \frac{1}{2n^2}$, $E(Y_n) = \frac{1}{n^2}$, $E(X_n^2) = \frac{1}{3n^4}$, $E(Y_n^2) = \frac{2}{n^4}$. Kandidat za slučajnu promenljivu kojoj konvergira Z_n je $Z = 0$, jer $E(Z_n) = \frac{3}{2n^2} \to 0$, $n \to \infty$. Kako je $E(Z_n^2) = \frac{10}{3}\frac{1}{n^4} \to 0$, Z_n konvergira ka 0 srednje kvadratno, u verovatnoći i raspodeli kada $n \to \infty$. Skoro sigurna konvergencija sledi iz

$$P(\{|Z_n| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{E(Z_n^2)}{\varepsilon^2} = \frac{10}{3\varepsilon^2 n^4}.$$

   (b) Važi

$$f_{X_n}(t) = \frac{n^2}{it}\big(e^{it/n^2} - 1\big)$$
$$f_{Y_n}(t) = \frac{1}{2}\big(e^{it/n^2} + 1\big),$$

   pa iz nezavisnosti sledi

$$f_{Z_n}(t) = f_{X_n}(t) f_{Y_n}(t) = \frac{n^2}{2it}\big(e^{2it/n^2} - 1\big).$$

5. U osiguravajućem društvu je osigurano 10 000 lica istih godina starosti i iste socijalne strukture. Verovatnoća nastupanja smrti u toku iste godine je ista za sva osigurana lica i iznosi 0.006. Svako osigurano lice uplaćuje 1. januara 1200 din, a u slučaju smrti, njegovi rođaci dobijaju od osiguravajućeg društva 100 000 din. Naći verovatnoću da osiguravajuće društvo pretrpi gubitke (u jednoj godini).

Rešenje: Neka je sa S_n označena slučajna promenljiva koja predstavlja broj umrlih u godini ako je n osiguranih. Kako je $S_n : \mathcal{B}(n, 0.006)$ važi $E(S_n) = n \cdot 0.006$ i $D(S_n) = n \cdot 0.006 \cdot 0.994$. Prihod osiguravajućeg društva je $Z_n = 1200n - 100000S_n$. Tada

$$E(Z_n) = n(1200 - 100000 \cdot 0.006) = 600n, \quad D(Z_n) = 10^{10} n \cdot 0.006 \cdot 0.994.$$

Koristeći Moavr-Laplasovu (ili Centralnu graničnu) teoremu tražimo

$$P\{Z_{100000} < 0\} = P\Big\{ -\infty < Z^*_{100000} < \frac{-600 \cdot 10^4}{\sqrt{600 \cdot 0.994 \cdot 10^9}} \Big\} = 0.5 - \Phi\Big(\underbrace{\sqrt{\frac{600}{9.94}}}_{>5} \Big) = 0$$