# Verovatnoća – pismeni ispit
# 1. april 2019.

1. Dve mašine proizvode artikle iste vrste. Verovatnoća da artikal bude prve klase iznosi 0.92 za prvu, a 0.8 za drugu mašinu. Prva mašina proizvodi tri puta više artikala nego druga i svi artikli se stavljaju u isto skladište. Odrediti verovatnoću da među 5 slučajno odabranih artikala, sa vraćanjem, bude tačno dva artikla prve klase.

   **Rešenje:** Označimo sa $p$ verovatnoću da je slučajno odabran artikal prve klase. Važi

   $$p = \frac{3}{4}0.92 + \frac{1}{4}0.8 = \frac{3.56}{4} = 0.89.$$

   Slučajna promenljiva $X$ koja predstavlja broj izabranih artikala prve klase od 5 odabranih ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(5, p)$. Dakle,

   $$P(X = 2) = \binom{5}{2} p^2 (1 - p)^3.$$

2. Neka $X$ predstavlja slučajno izabran broj iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Neka se $Y$ bira iz istog skupa brojeva, ali takvih da je $Y$ deljivo sa $X$. Odrediti raspodelu za $Y$ i zajedničku raspodelu za $(X, Y)$. Da li su $X$ i $Y$ nezavisne slučajne promenljive? Dokazati.

   **Rešenje:**

| $X \setminus Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/25 | 1/25 | 1/25 | 1/25 | 1/25 | 1/5 |
| 2 | 0 | 1/10 | 0 | 1/10 | 0 | 1/5 |
| 3 | 0 | 0 | 1/5 | 0 | 0 | 1/5 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1/5 | 0 | 1/5 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/5 | 1/5 |
| $\sum$ | 1/25 | 7/50 | 6/25 | 17/50 | 6/25 | 1 |

   $$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/25 & 7/50 & 6/25 & 17/50 & 6/25 \end{pmatrix}$$

   $X$ i $Y$ nisu nezavisne slučajne promenljive.

3. Slučajan vektor $(X, Y)$ ima uniformnu raspodelu na trouglu $T$ sa temenima u $(0, 0), (2, 0)$ i $(0, 1)$.

   (a) Odrediti $e(y) = E(X|Y = y)$.

   (b) Odrediti verovatnoću da tačka sa duži $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x = e(y),\ y \in [0, 2]\}$ upadne u trougao $T$.

   **Rešenje:**

   (a) Imamo $m(T) = \int_0^2 \int_0^{1-\frac{x}{2}} dy\, dx = 1$ i

   $$\varphi_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in T \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

   Znamo

   $$\varphi_{X|Y=y}(x) = \frac{\varphi_{(X,Y)}(x, y)}{\varphi_Y(y)}, \quad \varphi_Y(y) = \begin{cases} \int_0^{2(1-y)} dx = 2(1 - y), & y \in (0, 1] \\ 0, & y \notin (0, 1] \end{cases}$$

   pa dobijamo

   $$\varphi_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{2(1 - y)}, \quad 0 < x \leq 2(1 - y),\ 0 < y \leq 1.$$

Inače $\varphi_{X|Y=y}(x) = 0$. Dakle,

$$e(y) = E(X|Y = y) = \begin{cases} \int_0^{2(1-y)} \frac{1}{2(1-y)} x\, dx = 1 - y, & y \in (0, 1] \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

(b) Imamo $A = [0, 1]$, pa će svaka tačka sa te duži upasti u $T$. Dakle, tražena verovatnoća je 1.

4. Odrediti za koje vrednosti parametara $a, b, c \in \mathbb{R}$ funkcija

$$f(t) = e^{itb+c(e^{it}-1)} + a$$

može biti karakteristična funkcija slučajne promenljive sa očekivanjem 2. Odrediti jednu takvu slučajnu promenljivu.

**Rešenje:** Znamo da karakteristična funkcija neke slučajne promenljive zadovoljava

$$f_X(0) = 1, \quad f'_X(0) = iE(X).$$

Kako je $f(0) = 1 + a$, mora da važi $a = 0$ da bi $f$ bila karakteristična funkcija. Takođe,

$$f'(t) = ie^{itb}e^{c(e^{it}-1)}(b + ce^{it}),$$

pa dobijamo $b + c = 2$.

Ako je $b = 2, c = 0$, imamo $f(t) = e^{2it}$, pa $X = 2$. Slučajna promenljiva koja zadovoljava te uslove je oblika $X = 2 - c + Y$, gde $Y : \mathcal{P}(c)$, $c > 0$.

5. U jednoj kancelariji MUP-a je za danas 21 osoba zakazala izradu pasoša. Poznato je da samo jedan službenik obavlja te poslove i njegov radni dan traje 8 sati. Vreme (u minutima) koje svaka osoba nezavisno od ostalih provede za šalterom je slučajna promenljiva

$$X : \begin{pmatrix} 5 & 20 & 30 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Ako se zna da se usled kvara na računaru dogodio zastoj u pravljenju pasoša koji je trajao 45 minuta, odrediti verovatnoću da svi koji su zakazali i prođu na šalteru.

**Rešenje:** Neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_i$, $X_i = X$, za svako $i$ slučajna promenljiva koja označava vreme koje potrebno da $n$ ljudi napravi putne isprave. Imamo

$$E(X) = 1 + 8 + 12 = 21, \quad E(X^2) = 5 + 160 + 360 = 525, \quad D(X) = 525 - 441 = 84.$$

Vremena provedena za šalterom su nezavisna pa važi

$$E(S_n) = n \cdot 21, \quad D(S_n) = 84 \cdot n.$$

Svi uslovi Centralne granične teoreme (pretpostavljamo da je $n = 21$ dovoljno veliko) su ispunjeni i

$$\begin{aligned} P\{0 < S_{21} \leq 8 \cdot 60 - 45\} &= P\Big\{\frac{-21 \cdot 21}{\sqrt{21 \cdot 84}} < S^*_{21} \leq \frac{435 - 21 \cdot 21}{\sqrt{21 \cdot 84}}\Big\} \\ &= \Phi\Big(-\frac{6}{42}\Big) - \Phi(-10.5) = \Phi(10.5) - \Phi(0.14286) \\ &= 0.5 - 0.05567 = 0.443. \end{aligned}$$