Verovatnoća – pismeni ispit i rešenja (M4 smer)
24. januar 2019.

1. Dušan je dobio po tri kupona za ručak u *Kineskom restoranu* i *KFC*-u (kuponi iz istog restorana se međusobno ne razlikuju). Prvog dana Dušan slučajno izvlači jedan kupon, ali na ručak vodi i drugaricu pa troši dva kupona u restoranu čiji je kupon izvukao, dok drugog i trećeg dana izvlači po jedan kupon od preostalih i ide sam na ručak. Odrediti verovatnoću da će Dušan trećeg dana ručati u *Kineskom restoranu*, kao i verovatnoću da će Dušan sva tri dana ručati u *Kineskom restoranu.*
Rešenje: Neka je sa A označen događaj da Dušan trećeg dana ruča u *Kineskom restoranu.* Označimo događaje

$$H_1 : \text{Dušan prvog dana ruča u } \textit{Kineskom restoranu}$$
$$B_1 : \text{Dušan drugog dana ruča u } \textit{kineskom restoranu}$$

Imamo $P(H_1) = \frac{1}{2}$ i $P(B_1) = P(H_1)P(B_1|H_1) + P(\overline{H_1})P(B_1|\overline{H_1}) = \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$. Važi

$$P(A) = \sum_{k=1}^{4} P(A|A_k)P(A_k),$$

gde

$$A_1 = H_1B_1, \quad A_2 = H_1\overline{B_1}, \quad A_3 = \overline{H_1}B_1, \quad A_4 = \overline{H_1}\ \overline{B_1}$$

i

$$P(A_1) = P(H_1)P(B_1|H_1) = \frac{1}{2}\frac{1}{4},\ P(A_2) = \frac{1}{2}\frac{3}{4},\ P(A_3) = \frac{1}{2}\frac{3}{4},\ P(A_4) = \frac{1}{2}\frac{1}{4},$$

pa dobijamo

$$P(A) = \frac{1}{8}\cdot 0 + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{8}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Verovatnoća da će Dušan sva tri dana ručati u *Kineskom restoranu* je

$$P(H_1B_1A) = P(H_1B_1)P(A|H_1B_1) = 0,$$

jer bi u tom slučaju bila potrebna 4 kupona iz *Kineskog restorana.*

2. Slučajan vektor (X, Y) ima gustinu raspodele

$$\varphi_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 16e^{-4y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Naći funkciju raspodele i funkciju gustine slučajne promenljive $W = \frac{Y}{X}$.
Rešenje: Tražimo zajedničku funkciju gustine dvodimenzionalne slučajne promenljive (W, Z), gde $W = \frac{Y}{X}$, $Z = X$. Determinanta Jakobijan matrice te transformacije je

$$|J| = -z,$$

pa važi

$$\varphi_{(W,Z)}(w, z) = \begin{cases} 16ze^{-4wz}, & 0 < z < zw \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

To znači da oblast $A = \{(x,y):\ x>0, y>x\}$ slikamo u oblast $A' = \{(w,z):\ z>0, w>1\}$. Za $w \leq 1$ važi $\varphi_W(w) = 0$, a za $w > 1$ imamo

$$\varphi_W(w) = \int_0^\infty 16ze^{-4wz}dz = \underbrace{-z\frac{4}{w}e^{-4wz}\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \frac{4}{w}e^{-4wz}dz = -\frac{1}{w^2}e^{-4wz}\Big|_{z=0}^\infty = \frac{1}{w^2}.$$

Koristili smo da za $\lambda > 0$ važi

$$\int e^{-\lambda wz}dz = -\frac{1}{\lambda w}e^{-\lambda wz},$$

i da eksponencijalna funkcija nadjača stepenu. Dakle

$$\varphi_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2}, & w > 1 \\ 0, & w \leq 1. \end{cases}$$

Dalje, za $w \leq 1$ važi $F_W(w) = 0$, dok za $w > 1$ imamo

$$F_W(w) = P\{W < w\} = \int_1^w \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t}\Big|_1^w = 1 - \frac{1}{w}.$$

3. Dva lica su se dogovorila da se nađu na određenom mestu između 18 i 19 časova. Svako od njih dolazi na mesto susreta nezavisno od drugog u svakom momentu naznačenog intervala (može se smatrati da momenti dolazaka imaju ravnomernu raspodelu). Ko stigne prvi, čeka drugog. Naći matematičko očekivanje i standardno odstupanje vremena čekanja.

Rešenje: X - dolazak jednog lica, Y - dolazak drugog lica, $X, Y : \mathcal{U}(18, 19)$. $Z = |X - Y|$ - vreme čekanja. Zbog nezavisnosti:

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x-y|\varphi_X(x)\varphi_Y(y)dxdy = \int_{18}^{19}\int_{18}^{19} |x-y| \cdot 1dxdy \\ &= \int_{18}^{19}\int_{y}^{19} (x-y)dxdy + \int_{18}^{19}\int_{18}^{y} (y-x)dxdy = ... = \frac{1}{3} \quad (20 \text{ min}) \\ E(Z^2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-y)^2\varphi_X(x)\varphi_Y(y)dxdy = \int_{18}^{19}\int_{18}^{19} (x-y)^2 \cdot 1dxdy = \frac{1}{6} \\ D(Z) &= E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{1}{18}, \quad \sqrt{D(Z)} = \frac{1}{\sqrt{18}} = 0.2357\ h \approx 14 \text{ min} \end{aligned}$$

4. Neka su $X_1, X_2, ...$ nezavisne slučajne promenljive sa zakonom raspodele:

$$X_n : \begin{pmatrix} -n & 0 & n \\ \frac{3}{(n+1)^2} & 1 - \frac{5}{(n+1)^2} & \frac{2}{(n+1)^2} \end{pmatrix}, \ n = 1, 2, ...$$

Ispitati sve četiri vrste konvergencije niza $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Rešenje: $E(X_n) = \frac{-n}{(n+1)^2} \to 0$, kada $n \to \infty$, pa ispitujemo konvergenciju ka nuli. Skoro sigurna konvergencija:

$$P\{|X_n| \geq \varepsilon\} = \begin{cases} 0, & n < \varepsilon, \\ \frac{3+2}{(n+1)^2}, & n \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da $n_0 \geq \varepsilon$. Tada

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| \geq \varepsilon\} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{5}{(n+1)^2} < \infty$$

jer $\frac{5}{(n+1)^2} \backsim \frac{5}{n^2}$, a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira. Odavde sledi da X_n konvergira ka 0 skoro sigurno. Ovo implicira konvergenciju u verovatnoći i u raspodeli.

Srednje kvadratna konvergencija:

$$E(X_n^2) = \frac{5n^2}{(n+1)^2} \to 5, \ n \to \infty$$

pa X_n ne teži ka nuli srednje kvadratno i ne konvergira srednje kvadratno.

5. Vaga pri merenju pravi grešku u intervalu $(-0.3, 0.3)$ kg. Pretpostavimo da su greške pri različitim merenjima nezavisne i uniformno raspodeljene na intervalu $(-0.3, 0.3)$.

(a) Ako se meri 1000 ljudi, naći verovatnoću da apsolutna vrednost ukupne greške premaši broj 10.

(b) Koliko se najviše ljudi može meriti, pa da sa verovatnoćom 0.9 apsolutna vrednost ukupne greške bude manja od 10?

Rešenje: $X_k : \mathcal{U}(-0.3, 0.3), \ E(X_k) = 0, \ D(X_k) = \frac{0.6^2}{12} = 0.03.$

(a)

$$\begin{aligned}
P\{|\sum_{k=1}^{1000} X_k| > 10\} &= P\{\frac{\sum_{k=1}^{1000} X_k - 1000 \cdot 0}{\sqrt{1000 \cdot 0.03}} \in (-\infty, -\frac{10}{\sqrt{30}}) \cup (\frac{10}{\sqrt{30}}, \infty)\} \\
&= 2P\{X^* > \frac{10}{\sqrt{30}}\} = 2(0.5 - \Phi(\frac{10}{\sqrt{30}})) = 1 - 2 * 0.4664 \\
&= 0.0672.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
P\{|\sum_{k=1}^{n} X_k| < 10\} = 0.9 \Leftrightarrow P\{-\frac{10}{\sqrt{0.03n}} < X^* < \frac{10}{\sqrt{0.03n}}\} = 0.9 \Leftrightarrow 2\Phi(\frac{10}{\sqrt{0.03n}}) = 0.9 \\
\Leftrightarrow \frac{10}{\sqrt{0.03n}} = 1.65 \Leftrightarrow n = 1224.36 \approx 1224.
\end{aligned}$$

Možda korisno: