Verovatnoća - pismeni ispit, M3, M4

7. april 2017.

1. U jednoj grupi studenata ima a odličnih, b prosečnih i c slabih. Odličan student na ispitu može dobiti samo odličnu ocenu, prosečan sa jednakim verovatnoćama dobija odličnu ili dobru ocenu, a slab student sa jednakim verovatnoćama dobija dobru, zadovoljavajuću ili slabu ocenu.

   (a) Na ispitu se na slučajan način proziva jedan student iz grupe. Naći verovatnoću da dobije dobru ili odličnu ocenu.

   (b) Na ispitu se na slučajan način prozivaju dva studenta. Naći verovatnoću da jedan dobije dobru, a drugi zadovoljavajuću ocenu.

2. Slučajna promenljiva X ima gustinu $\varphi_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Odrediti raspodelu slučajne promenljive Y date sa

$$Y = \begin{cases} -X-3, & X \leq -1 \\ -1-X^2, & X \in (-1,2] \\ X-7, & X > 2. \end{cases}$$

   Naći $P\{Y < 0\}$.

3. Vektor (X, Y) ima gustinu

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} a(x+y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

   gde je $D = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ x^2 < y < \sqrt{x}\}$. Odrediti a i naći $P\{Y > 1/2 \mid X \leq 1/2\}$.

4. Karakteristične funkcije nezavisnih slučajnih promenljivih X i Y su date sa $f_X(t) = e^{2e^{it}-2}$ i $f_Y(t) = \frac{1}{4^{10}}(3e^{it}+1)^{10}$. Odrediti raspodele za X i Y i verovatnoće $P\{X+Y=2\}$, $P\{XY=0\}$ i $E(X)$.

   Rešenje. Važi da je $f_X(t) = e^{-2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k e^{itk}}{k!}$, pa je $P\{X=k\} = e^{-2}\frac{2^k}{k!}$.

   Dalje je $f_Y(t) = \displaystyle\frac{1}{4^{10}}\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}3^k e^{itk}$, pa je $P\{Y=k\} = \frac{1}{4^{10}}\binom{10}{k}3^k$.

   Dakle, $P\{X+Y=2\} = P\{X=2, Y=0\} + P\{X=0, Y=2\} + P\{X=1, Y=1\} = ...$

5. Aparat za igru može da izbaci broj $k \in \mathbb{N}_0$ sa verovatnoćom $p_k = \frac{1}{ek!}$. Ako izbaci paran broj igrač gubi jedan poen, a ako izbaci neparan broj igrač dobija jedan poen. Odrediti verovatnoću da će nakon izbacivanja 1000 brojeva igrač imati između 100 i 200 poena.

   Rešenje. Neka slučajna promenljiva X_j predstavlja broj poena osvojenih u j-toj igri, gde je $1 \leq j \leq 1000$. Dakle, ukupan broj poena osvojenih u 1000 igara je dat sa $X_{1000} = \sum_{j=1}^{1000} X_j$. Prvo treba odrediti raspodelu za X_j. Iz uslova u zadatku jasno je da X_j uzima vrednosti -1 ili 1. Vrednost -1 se dobija kada aparat izbaci paran broj (igrač gubi poen), pa je

$$P\{X_j = -1\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-1}}{(2n)!} = \frac{1+e^{-2}}{2}.$$

   Primetimo da se suma reda lako dobija ako se saberu razvoji u red za e^1 i e^{-1}. Dalje je $P\{X_j = -1\} = 1 - P\{X_j = 1\}$

   Treba odrediti $100 < P\{X_{1000}\} < 200$. Kako su promenljive X_j nezavisne i imaju istu raspodelu, možemo da primenimo centralnu graničnu teoremu. Važi da je $E(X_{1000}) = 1000E(X_j) = -1000 * e^{-2}$ i $D(X_j) = 1 - e^{-4}$, pa je $D(X) = 1000(1-e^{-4})$. Dakle,

$$P\Big\{\frac{100 - E(X_{1000})}{\sqrt{D(X_{1000})}} < X^*_{1000} < \frac{200 - E(X_{1000})}{\sqrt{D(X_{1000})}}\Big\} = \Phi... - \Phi.... = 0.$$

① (a) Uvodimo hipoteze:

H_1 - izabran je odličan student, H_2 - izabran je prosečan student, H_3 - izabran je slab student.

Neka je A - izabrani student dobija dobru ili odličnu ocenu. Tražimo $P(A)$.

Važi: $P(H_1) = \frac{a}{a+b+c}$, $P(H_2) = \frac{b}{a+b+c}$, $P(H_3) = \frac{c}{a+b+c}$.

$P(A|H_1) = 1$, $P(A|H_2) = 1$, $P(A|H_3) = \frac{1}{3}$

$$P(A) = \frac{a}{a+b+c}\cdot 1 + \frac{b}{a+b+c}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{c}{a+b+c} = \frac{3a+3b+c}{3(a+b+c)}.$$

(b) H_1 - izabrana dva slaba studenta

H_2 - izabrani jedan prosečan i jedan slab student

H_3 - izabrana ili dva odlična ili odličan i prosečan ili dva prosečna ili odličan i slab student

A - jedan student dobija dobru, a drugi nedovoljnu ocenu

$P(H_1) = \dfrac{\binom{c}{2}}{\binom{a+b+c}{2}}$, $P(H_2) = \dfrac{\binom{b}{1}\binom{c}{1}}{\binom{a+b+c}{2}}$, $P(H_3) = 1 - P(H_1) - P(H_2)$

$P(A|H_1) = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$, $P(A|H_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $P(A|H_3) = 0$

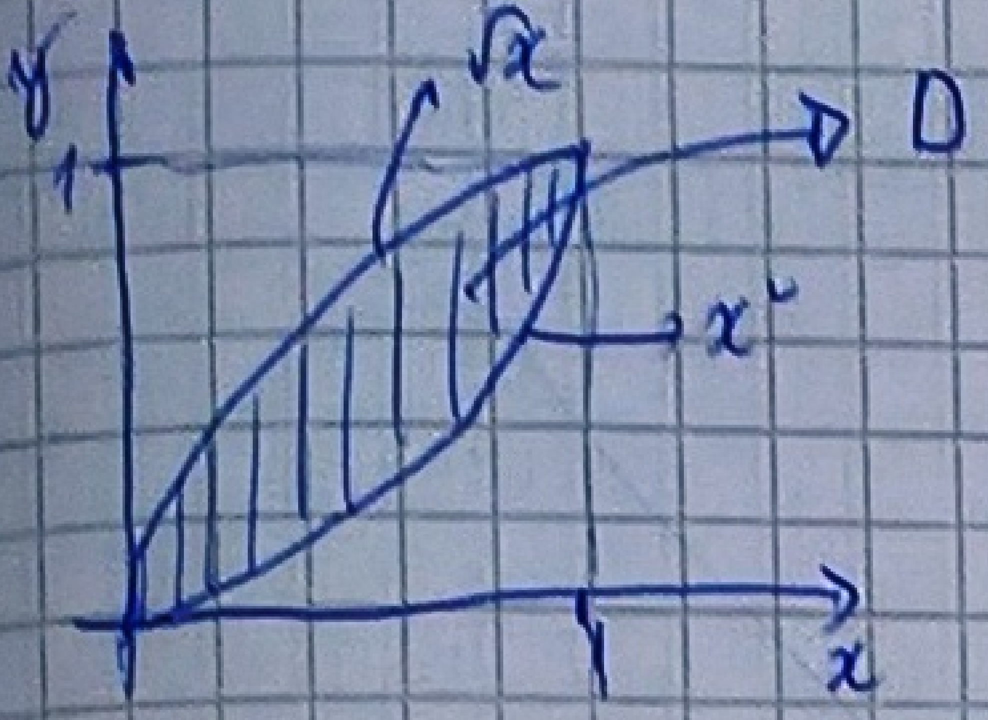
$$\Rightarrow P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \underbrace{P(H_3)\cdot P(A|H_3)}_{=0} =$$

$$= \frac{2c(c-1) + 3bc}{9(a+b+c)(a+b+c-1)}$$

③
$$\varphi(x,y) = \begin{cases} a(x+y), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases}$$

$D = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ x^2 < y < \sqrt{x}\}$

Treba odrediti a i naći $P\{Y > \frac{1}{2} \mid X \leq \frac{1}{2}\}$.



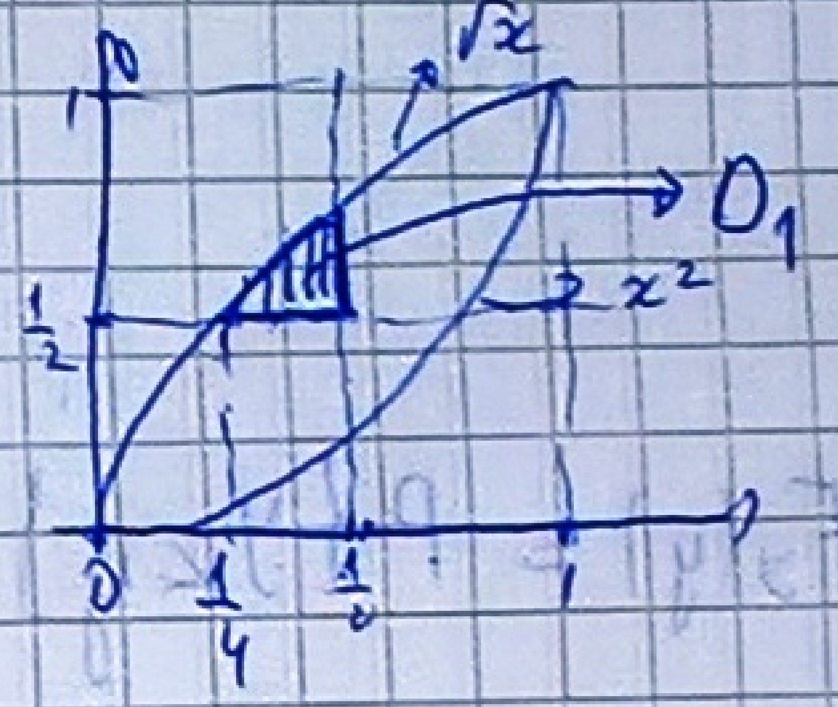
$a \geq 0$; $\iint_D a(x+y)\,dx\,dy = 1$

$$\iint_D a(x+y)\,dx\,dy = a\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y)\,dy\right) dx = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = \begin{cases} \frac{10}{3}(x+y), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$

$$P\{Y>\tfrac12 \mid X\le \tfrac12\} = \frac{P\{X\le\frac12, Y>\frac12\}}{P\{X\le\frac12\}}$$



$$P\{X\le 1/2, Y>\tfrac12\} = \iint_{D_1}\varphi(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{1/4}^{1/2}\left(\int_{1/2}^{\sqrt{x}} \varphi(x,y)\,dy\right)dx = \frac{10}{3}\int_{1/4}^{1/2}\int_{1/2}^{\sqrt{x}}(x+y)\,dx\,dy$$

$$P\{X\le\tfrac12\} = \int_{-\infty}^{1/2}\varphi_X(x)\,dx$$

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)\,dy = \int_{x^2}^{\sqrt x}\frac{10}{3}(x+y)\,dy, \text{ za } x\in(0,1)$$

$$\Rightarrow P\{X\le\tfrac12\} = \int_0^{1/2}\int_{x^2}^{\sqrt x}\frac{10}{3}(x+y)\,dy$$

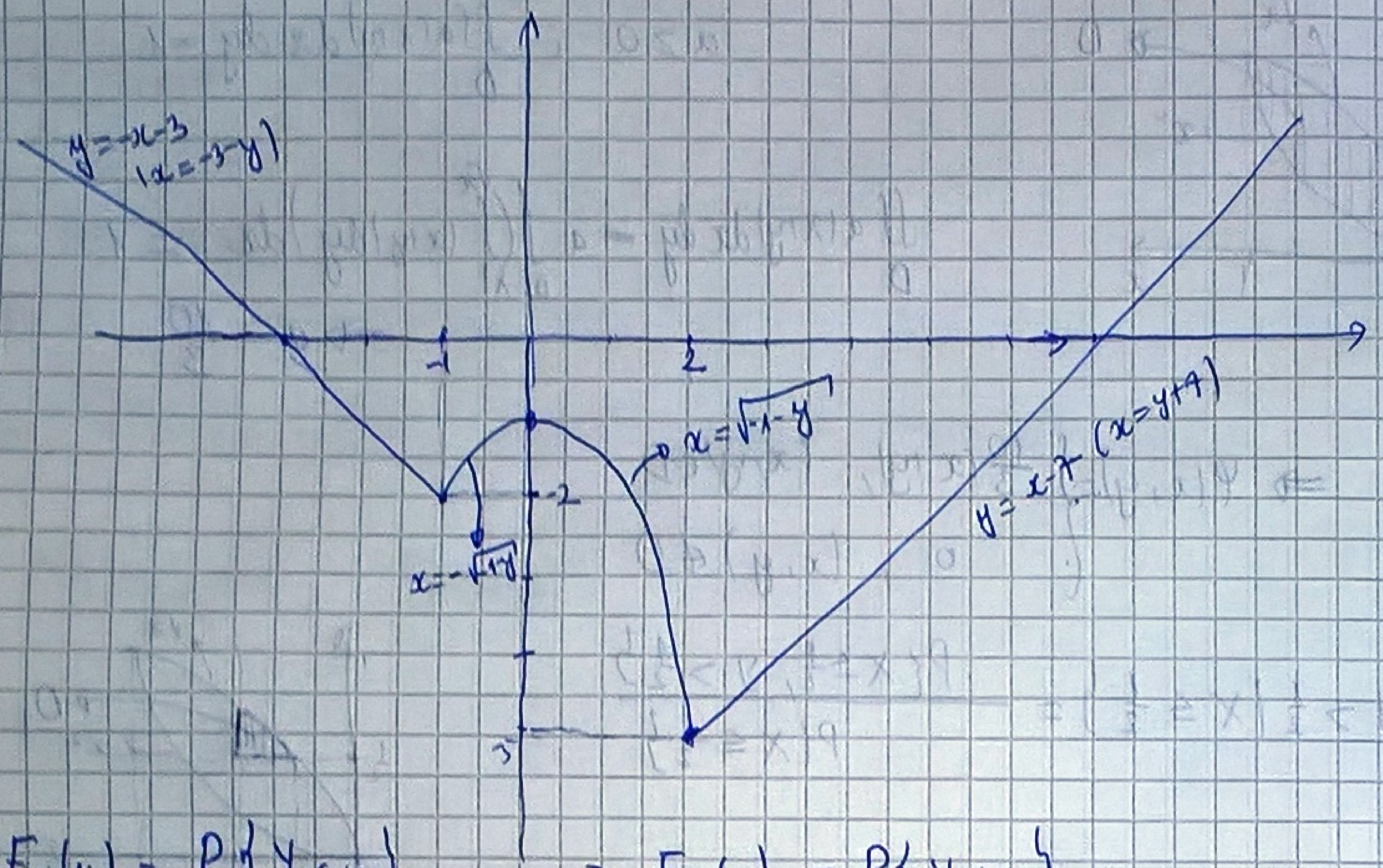
(2.) $\varphi_X(x) = \frac12 e^{-|x|}$, $x\in\mathbb{R}$

$$Y = \begin{cases} -X-3, & x\le -1\\ -1-X^2, & x\in(-1,2] \\ X-7, & X>2\end{cases}$$

$y = -1-x^2$ za $x\in(-1,2]$

$x^2 = -1-y \geq 0$

$x = \pm\sqrt{-1-y}$



$$F_Y(y) = P\{Y<y\} \Rightarrow \underline{F_Y(0) = P\{Y<0\}}$$

1) $y \le -5 \Rightarrow F_Y(y) = P\{Y<y\} = 0$

2) $y \in (-5, -2]$

$$F_Y(y) = P\{Y<y\} = P\{\sqrt{-(1+y)} < X < y+7\} = \int_{\sqrt{-(1+y)}}^{y+7} \varphi_X(x)\,dx = \int_{\sqrt{-(1+y)}}^{y+7} \frac{1}{2} e^{-|x|}\,dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{-(1+y)}}^{y+7} \frac{1}{2} e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{-\sqrt{-y-1}} - e^{-y-7}\right)$$

3) $y \in (-2, -1]$

$$F_Y(y) = P\{Y<y\} = P\{-3-y < X < -\sqrt{-1-y}\} + P\{\sqrt{-1-y} < X < y+7\} =$$

$$= \int_{-3-y}^{-\sqrt{-1-y}} \frac{1}{2} e^{x}\,dx + \int_{\sqrt{-1-y}}^{y+7} \frac{1}{2} e^{-x}\,dx$$

4) $y > -1$

$$F_Y(y) = P\{-3-y < X < y+7\} = \int_{-3-y\,<0}^{y+7\,>0} \frac{1}{2} e^{-|x|}\,dx = \int_{-3-y}^{0} \frac{1}{2} e^{x}\,dx + \int_{0}^{y+7} \frac{1}{2} e^{-x}\,dx$$