VEROVATNOĆA, PISMENI, 1.2.2017. (SVI SMEROVI)

Verovatnoća - pismeni ispit, M3, M4

1. februar 2017.

1. Na slučajan način se bira broj iz skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$. Zatim se baca kockica dok se ne dobije broj koji je veći ili jednak od izvučenog broja. Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj bacanja kockice. Odrediti raspodelu za X, $E(X)$ i $D(X)$.
2. Slučajna promenljiva X ima funkciju gustine datu sa $\varphi_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Naći funkciju raspodele i funkciju gustine slučajne promenljive $Y = \frac{2X}{1-X^2}$.
3. Odrediti $c \in \mathbb{R}$ tako da funkcija
$$f(x,y) = \frac{c}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}, x, y \in \mathbb{R}$$
bude funkcija gustine neke slučajne promenljive $Z = (X,Y)$. Odrediti marginalne gustine i verovatnoću da Z uzme vrednosti u kvadratu $K = [0,1] \times [0,1]$.
4. Pretpostavimo da $X_n \to a$ u verovatnoći i da $Y_n \to b$ u verovatnoći, gde su a, b konstante. Dokazati da $X_n + Y_n \to a + b$ u verovatnoći.
5. Pomoću računara vrši se obračun električne energije za 100 korisnika. Vreme obračuna za svakog korisnika ima eksponenicjalnu raspodelu sa očekivanjem 3 sekunde i ne zavisi od drugih korisnika. Odrediti verovatnoću da će obračun trajati između 3 i 6 minuta.

$\boxed{1.}$ X – broj bacanja kockice dok se ne dobije broj koji je veći ili jednak slučajno izabranom broju iz skupa $\{1, 2, \dots, 6\}$

Ako je j slučajno izabrani broj, onda broj bacanja kockice dok se ne dobije broj $\geq j$ ima geometrijsku raspodelu sa parametrom p_j, odnosno

$$p_j = \frac{6-j+1}{6}$$

$6-j+1$ → broj ishoda koji su $\geq j$

6 → broj mogućih ishoda, tj. brojeva koji se pojave kada bacamo kockicu

→ brojevi veći ili jednaki od j su $j, j+1, \dots, 6$ i ima ih $6-(j-1) = 6-j+1$

Dalje, neka je H_j – izabran je broj j, $j \in \{1, 2, \dots, 6\}$

Jasno, $p(H_j) = \frac{1}{6}$

[illegible]

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ ? & ? & ? & & ? & \end{pmatrix}$$

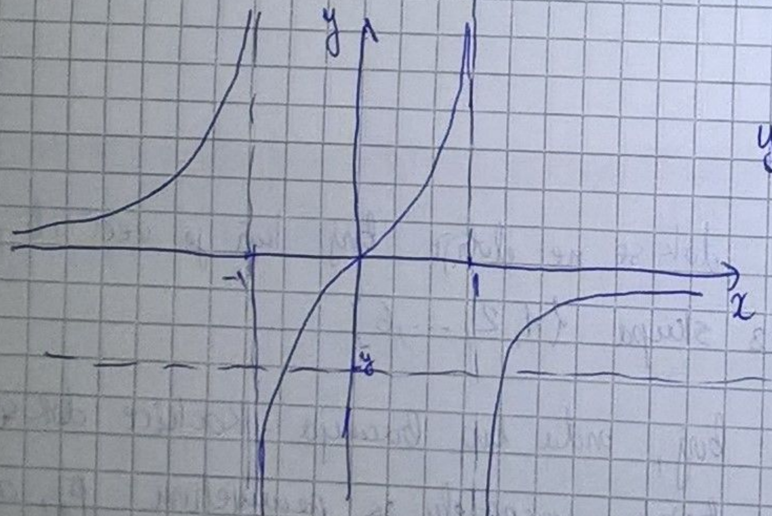
Tada je $P\{X=k\} = \sum_{j=1}^{6} \left(1 - \frac{6-j+1}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{6-j+1}{6} \cdot \frac{1}{6}$, $k = 1, 2, \dots$

$$E(X) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \sum_{j=1}^{6} \left(1 - \frac{6-j+1}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{6-j+1}{6}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \sum_{j=1}^{6} \left(1 - \frac{6-j+1}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{6-j+1}{6}$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$\boxed{2.}$ X, $\varphi_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$, $Y = \frac{2X}{1-X^2}$



$$y = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+y^2}}{y} = -\frac{1}{y} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}$$

1) $y < 0$

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\left\{-1 < X < -\frac{1}{y} - \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}\right\} +$$

$$+ P\left\{1 < X < -\frac{1}{y} + \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}\right\} =$$

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{y} - \sqrt{1+\frac{1}{y^2}}} \frac{1}{\pi} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{1}^{-\frac{1}{y} + \sqrt{1+\frac{1}{y^2}}} \frac{1}{\pi} \frac{dx}{1+x^2} = \dots = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{y}\right)$$

2) $y=0$

$$F_Y(y)=P\{Y<0\}=P\{-1<X<0\}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\pi}\frac{dx}{1+x^2}+\int_1^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}$$

3) $y>0$

$$F_Y(y)=P\{Y<y\}=\int_{-\infty}^{-\frac{1}{y}-\sqrt{1+y^2}}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}+\int_{-1}^{-\frac{1}{y}+\sqrt{1+y}}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}+\int_1^{\infty}\frac{dx}{\pi(1+x^4)}$$

$\boxed{3.}$ $$f(x,y)=\frac{c}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)},\quad x,y\in\mathbb{R}$$

1) $f\geq 0 \iff c\geq 0$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}\,dx\,dy=1\rightarrow c=1$$

$$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad \varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$P\{Z\in S\}=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}\,dx\,dy=\frac{1}{16}$$

$\boxed{5.}$ X_i - vreme obrade i-tog korisnika

$$S_{100}=\sum_{i=1}^{100}X_i \rightarrow \text{vreme obrade 100 korisnika}$$

$$E(S_{100})=\sum_{i=1}^{100}E(X_i)=\sum_{i=1}^{100}3=300$$

dato je u zadatku da je $E(X_i)=3$

- X_i ima $\mathcal{E}(\frac{1}{3})$ raspodelu! $\to E(X_i) = 3,\ D(X_i) = 9$

$$\Rightarrow D(S_{100}) = \sum_{i=1}^{100} D(X_i) = 900$$

$$S^*_{100} = \frac{S_{100} - E(S_{100})}{\sqrt{D(S_{100})}} = \frac{S_{100} - 300}{30}$$

centralna granična teorema

Dakle, $P\{\underset{3\,\text{min} = 180\,\text{s}}{180} < S_{100} < 360\} = P\{\frac{180-300}{30} < S^*_{100} < \frac{360-300}{30}\} =$

$$= P\{-4 < S^*_{100} < 2\} = \Phi(2) - \Phi(-4) \approx 0{,}977$$

$\boxed{5.}$ $P\{|(X_n + Y_n) - (a+b)| \geq \varepsilon\} = P\{|(X_n - a) + (Y_n - b)| \geq \varepsilon\} \leq$

$\leq P\{|X_n - a| + |Y_n - b| \geq \varepsilon\} \leq P\{(|X_n - a| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \cup (|Y_n - b| \geq \frac{\varepsilon}{2})\}$

$\leq P\{|X_n - a| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} + P\{|Y_n - b| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$