SLUČAJNE PROMENLJIVE-FUNKCIJA RASPODELE

Do sada smo već definisali skup Ω elementarnih događaja. Ako se elementarni događaji ω mogu predstaviti kao realni brojevi, onda se eksperiment može zamisliti kao izbor jedne promenljive. Promenljiva veličina koja te brojne vrednosti uzima sa određenim verovatnoćama naziva se ***slučajna promenljiva.***

Na primer, u eksperimentu bacanja novčića pišemo 0 ako padne grb, a 1 ako padne pismo, tada se ovaj eksperiment može zamisliti kao izbor nule i jedinice sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$. To nam omogućava jedan apstraktan model koji može da opiše i druge eksperimente gde imamo dva podjednako verovatna ishoda.

Definicija:
Funkcija X koja svakom slučajnom događaju $\omega \in \Omega$ dodeljuje realni broj $X(\omega)$ zove se ***slučajna promenljiva.***
Slučajne promenljive obeležavamo velikim slovima X,Y,Z.....

Znači, slučajna promenljiva je preslikavanje skupa Ω u skup realnih brojeva, za razliku od verovatnoće, koja je preslikavanje skupa Ω u skup $[0,1]$.

Primer:
Novčić se baca dva puta. Neka je slu;ajna promenljiva X broj registrovanih pisama. Kako je $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$, onda je $X(PP) = 2, X(GP) = 1, X(PG) = 1, X(GG) = 0.$ Znači slučajna promenljiva uzima 3 moguće vrednosti 0,1,2.

Razlikujemo dva osnovna tipa slučajnih promenljivih, ***diskretne*** i ***neprekidne*** slučajne promenljive. Podela se vrši u zavisnosti da li slučajna promenljiva uzima vrednosti u konačnom, odnosno prebrojivom ili neprebrojivom skupu vrednosti.

DISKRETNA SLUČAJNA PROMENLJIVA

Definicija:
Neka slučajna promenljiva X može da uzme vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sa verovatnoćama $p_1, p_2, \ldots, p_n$, pri čemu je $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Skup parova $(x_{i,} p_{\ i} = P\{X = x_i\}), i = 1,2,...,n$ ili napisano

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots \\ p(x_1) & p(x_2) & \ldots \end{pmatrix}$$

čine ***zakon raspodele verovatnoća*** slučajne promenljive X.

Zakon raspodela verovatnoća slučajne promenljive je ***pravilo*** po kome svakoj vrednosti slučajne promenljive X pridružujemo odgovarajuću verovatnoću p. Zakonom raspodele, ukupna verovatnoća, koja je jednaka 1 , raspodeljena je na pojedine vrednosti slučajne promenljive.

Dakle u predhodnom primeru zakon raspodele je $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Raspodela verovatnoća kao potpuna karakteristika važi samo za diskretnu slučajnu promenljivu.

Dve najvažnije diskretne raspodele su ***binomna raspodela*** i njena generalizacija ***Puasonova raspodela.*** Raspodela slučajne promenljive za Bernulijeve eksperimente zove se ***Binomna raspodela.***

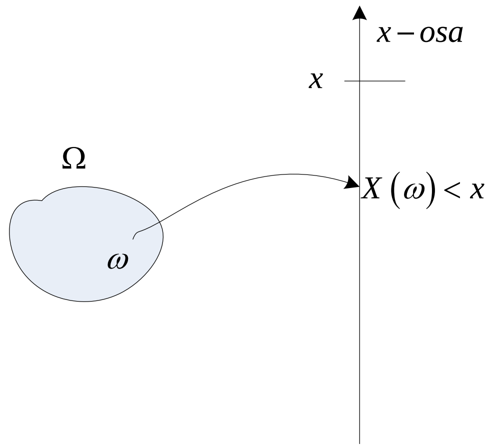
Primer:
Verovatnoća da je jedan proizvod defektan je 0,01. Iz skladišta se uzima 100 proizvoda. Kolika je verovatnoća da
a) bude tačno 5 defektnih
b) broj defektnih nije veći od 10.
Neka je A događaj da je proizvod defektan. $P(A) = p = 0,01$. Kao se eksperiment obavlja 100 puta imamo. Slučajna promenljiva X je broj defektnih proizvoda.
a) $P(X=5) = \binom{100}{5} 0,01^5 \cdot 0,99^{95}$.
b) $(X=0)+(X=1)+\ldots+(X=10)$,
$$P = P\left(\sum_{k=0}^{10}(X=k)\right) = \sum_{k=0}^{10}\binom{100}{10} 0,01^5 \cdot 0,99^{95}$$

Ovaj primer pokazuje da efektno izračunavanje verovatnoća kada je ***n*** dovoljno veliko, složen računski posao. U takvim slučajevima koristimo se raznim aproksimacijama izraza za verovatnoće, odnosno koristimo Puasonovu raspodelu.

FUNKCIJA RASPODELE

Do potpune karakteristik za slučajnu promenljivu dolazimo ako posmatramo događaje X<x, a ne X=x. Verovatnoća događaja X<x, zavisi od x, odnosno je funkcija od x. Naziva se ***funkcija raspodele verovatnoća*** ili ***funkcijom raspodele.***

Funkcija raspodele je statistička karakteristika slučajne promenljive koja omogućava da se izračuna verovatnoća, da slučajna promenljiva uzme vrednost na nekom intervalu na x osi.
Napomena:
Slučajna promenljiva nema određenu vrednost, već se samo može govoriti o verovatnoćama da uzme neku vrednost.



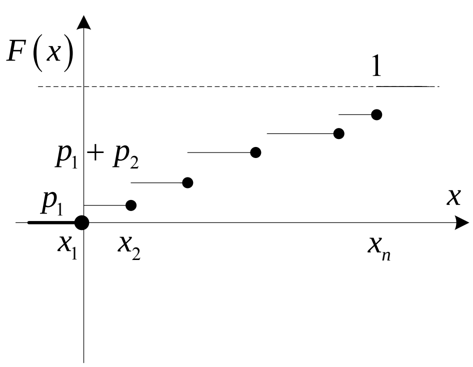
Definicija:
Neka je X slučajna promenljiva. Realna funkcija F definisana kao

$$\left\{\omega \in \Omega \middle| X(\omega) \le x\right\} \xrightarrow{P} P\left\{\omega \in \Omega \middle| X(\omega) \le x\right\} = F(x)$$

naziva se ***funkcijom raspodele*** slučajne promenljive X.

Definicija:
Slučajna promenljiva je d**iskretna** ako je funkciju raspodele $F(x) = P(X < x)$ i se zove kumulativna funkcija. Olika je:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ p_{1,} & x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 1, & x > x_n \end{cases}$$



Primer: U bacanju 3 dinara broj grbova koji se može pojaviti na gornjim stranama dinara je 0,1,2, ili 3.

Rešenje:

El.dog.	GGG	GGP	GPG	PGG	GPP	PGP	PPG	PPP
Broj grbova	3	2	2	2	1	1	1	0
Verovatnoće	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Raspodela verovatnoća broja grbova je: $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

Predhodna tabela sastavljena je od parova brojeva (x_i, p_i) i pokazuje kako se broj grbova menja slučajno. Broj grbova je slučajna promenljiva i verovatnoće su $P(X=0)=\frac{1}{8}, P(X=1)=\frac{3}{8}, P(X=2)=\frac{3}{8}, P(X=3)=\frac{1}{8}$.

Funkcija raspodele glasi .

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{8} & 0 < x \le 1 \\ \frac{4}{8}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{7}{8}, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

OSOBINE FUNKCIJE RASPODELE

Neka je F funkcija raspodele slučajne promenljive X. Tada je:

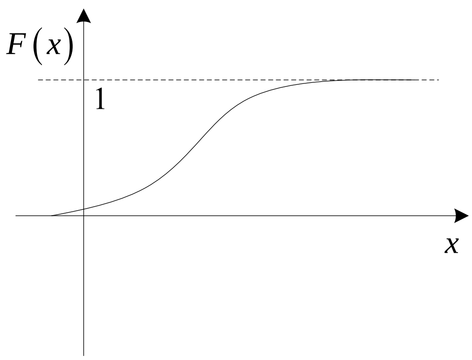
1. $0 \le F(x) \le 1, \quad x \in R,$
2. $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0, \quad F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1,$
3. F je monotono ne opadajuća funkcija, $x_1 \le x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$.
4. F je neprekidna sa leva u tačkama prekida, $F(x)=F(x-0)$
5. $P(a \le X < b)=F(b)-F(a)$.

   Zato što je $P(a \le X < b)=P(X<b)-P(x<a)$

NEPREKIDNA SLUČAJNA PROMENLJIVA

Definicija:

Slučajna promenljiva je ***neprekidna***, ako za svaki realni broj x je određena neopadajuća i neprekidna funkcija $F(x)=P(X<x)$, koja ispunjava uslove $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$



Važi:

a) $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

$P(X = b) = 0$

Napomena:

Funkcija raspodele određuje sve bitne osobine slučajne promenljive. Vrednost slučajne promenljive ne može se predvideti pre obavljenog eksperimenta, ali funkcija raspodele se zna. Ona je njena potpuno poznata matematička funkcija i jer je X je slučajan broj, x je realan broj. U svakom pojedinačnom eksperimentu slučajna promenljiva X je slučajna vrednost i zato se proučavanje svodi na njeno ponašanje u puno ponavljanja ekperimenta, odnosno na verovarnoću.

Iz ovih razloga predmet proučavanja teorije verovatnoće nisu slučane promenljive, već njihove raspodele i funkcije raspodela.

Kod neprekidne funkcije, nemoguće je svakom elementu x iz intervala (a,b) dodeliti pozitivnu verovatnoću, jer bi njihov zbir bio beskonačan, a zbir verovatnoća skupa vrednosti promenljive X mora biti jednak 1. Zato se uzima da je $P(X = x) = 0$.

Prividno ovo je paradoks. Međutim, ovakvi paradoksi postoje u nauci. U geometriji duž ima pozitivnu dužinu, a dužina svake tačke je 0. U mehanici, telo čija masa postoji, a masa svakog pojedinog dela je nula.

Jednakost $P(X = x) = 0$ ne znači da će da se u praksi događaj $X = x$ nikada neće ostvariti, već samo da je mala, veoma mala verovatnoća da će se on ostvariti. To je prihvatljivo, jer slučajna promenljiva X može da uzme bilo koju vrednost sa intervala (a,b), a njih je neprebrojivo mnogo, pa su mali izgledi da da uzme baš vrednost x .

FUNKCIJA GUSTINE

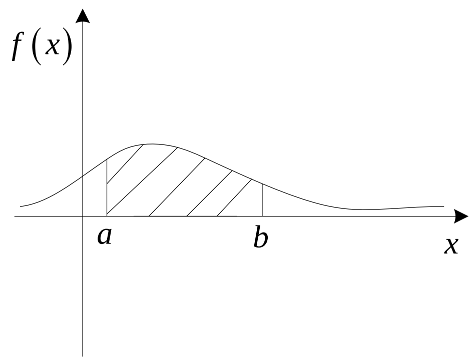
Neka je X slučajna promenljiva i F njena funkcija raspodele.

Definicija:

Kako je funkcija raspodele slučajne veličine neprekidna i neopadajuća funkcija onda postoji funkcija f, takva da je $f(x) = F'(x)$, i naziva se **funkcijom gustine.**

Funkcija gustine verovatnoće omogućava kao i funkcija raspodele, da se izračuna verovatnoću da se realizacija slučajne veličine nađe u nekom intervalu. Ta verovatnoća je jednaka površini koja je ograničena funkcikom gustine i granicama datog intervala.

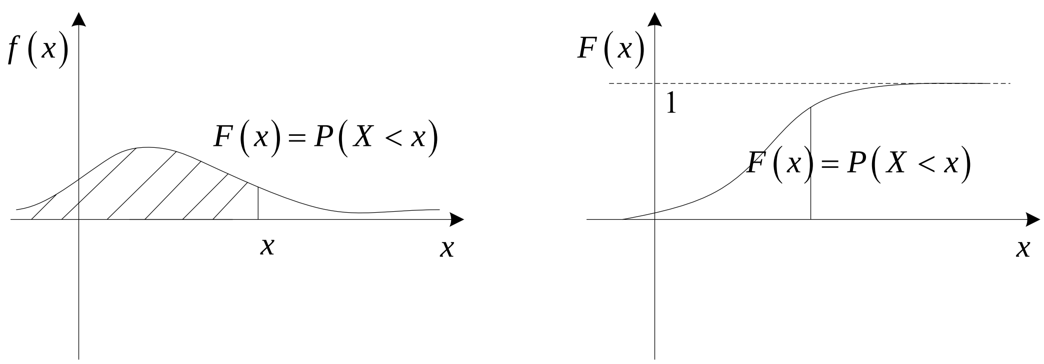
$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx .$$



Definicija:
Neka je F funkcija raspodele slučajne promenljive X. Ako postoji nenegativna funkcije f definisana na R takve da je

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt .$$

Geometrijski, funkcija raspodele F je površina ispod krive gustine , levo od tačke x.



OSOBINE FUNKCIJE GUSTINE:

1. Kao izvod neopadajuće funkcije raspodele $f(x) \geq 0$.
2. Za svako realno a $P(X = a) = 0$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Primer:

Odrediti konstantu a tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x < 0, x > 2 \end{cases}$, bude gustina raspodela verovatnoća. Zatim naći funkciju raspodela i izračunati $P(0 < X < 1)$.

1. Kako je $\int_0^2 ax^2dx = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{8}$.

Funkcija gustine glasi $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x < 0, x > 2 \end{cases}$.

Ova funkcija je definisana za svako R, pozitivna, i neprekidna svuda osim u tački x=2, pa može da bude funkcija gustine.

2. Funkcija raspodele je prema formuli $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \int_0^x \frac{3}{8}x^2dx = \frac{x^3}{8}, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$

3. Tražena verovatnoća $P(0 < X < 1) = \int_0^1 \frac{3}{8}x^2dx = F(1) - F(0) = \frac{3}{8}$

ZADACI

1. Eksperiment se sastoji u trostrukom bacanju dinara. Ako je u svakom bacanju verovatnoća pojave grba 0,5 i X označava verovatnoću pojave grba, naći raspodelu verovatnoća i funkciju raspodela.

Rešenje:

x_i	0	1	2	3
p_i	O,125	0,375	0,375	0,125

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0{,}125, & 0 \le x \le 1 \\ 0{,}500, & 1 \le x \le 2 \\ 0{,}875, & 2 \le x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

2. Iz partije od 100 proizvoda, od kojih je 10 škart, izabran je na slučajan način uzorak od 5 proizvoda. Ako je X broj škartova u uzorku, naći funkciju raspodela.

Rešenje:

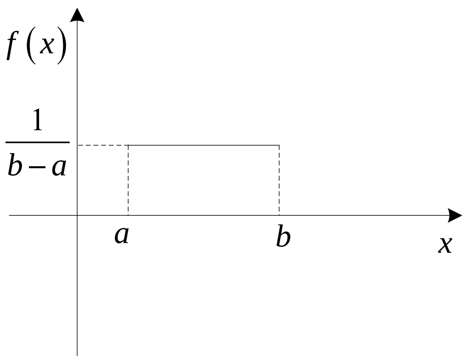
$$F(x) = P(X = k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}}{\binom{100}{5}}.$$

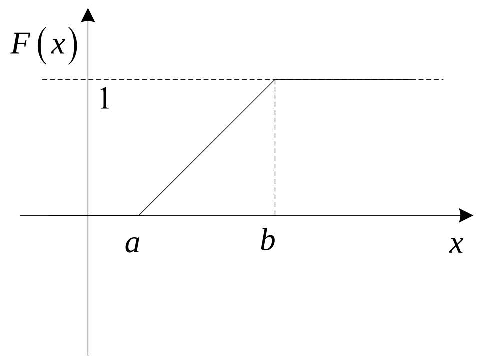
3. ***Ravnomerna raspodela*** je definisana svojom gustinom. Naći funkciju raspodele

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

Rešenje:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \displaystyle\int_a^x \frac{dx}{b-a}=\frac{x-a}{b-a}, & a<x<b\\ 1, & x>b\end{cases}$$





Dakle, verovatnoća da X pripada nekom intervalu unutar $[a,b]$ proporcionalna je dužini tog intervala. Zato se ova raspodela koristi za izbor slučajnog broja u intervalu $[a,b]$.

PRIMERI ZA VEŽBU

1. Kontrolor proverava proizvod jedne partije koja sadrži 20% škarta i obustavlja proveru kada naiđe na škart. Ako je X broj pregledanih proizvoda, naći raspodelu verovatnoća slučajne promenljive X.
2. Cilj se gađa sa četiri metka. Naci raspodelu verovatnoća i funkciju raspodele slučajne promenljive X, ako je u svakom gađanju verovatnoća pogotka cilja o,5 i X označava broj pogodaka.
3. Neka je X neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom

$$f(x)=\begin{cases}C\left(4x-2x^2\right), & 0<x<2\\ 0, & x>2, x<0\end{cases}$$

Odrediti C, i naći $P(X>1)$

4. **Košijeva raspodela:** Neka je X neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom

$$f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$$

Nacrtati krivu gustine i naći $P(-1<X<1)$.

5. Funkcija raspodele ima oblik $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le a \\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a < x < a \\ 1, & x \ge a \end{cases}$.

Naći:

a) Za koje vrednosti A i B je funkcija raspodele neprekidna,

b) $P\left(-\dfrac{a}{2} < X < \dfrac{a}{2}\right)$,

c) Gustinu raspodele.