1 Određeni integral, primene

1.1 Površina ispod grafika funkcije

★ Podsetimo se,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x$$

i

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad F' = f,$$

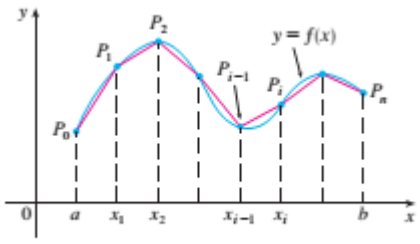
je određeni integral funkcije f i predstavlja površinu ispod grafika krive (za nenegativne funkcije).

1.1.1 Zadaci

1. Odrediti površinu ograničenu krivom $y = \ln x$, $x-$ osom i pravom $x = e$.
2. Odrediti površinu ograničenu krivim linijama $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$.
3. Odrediti površinu ograničenu sa $f(x) = e^x, f(x) = e^{-x}, x = 1$.
4. Izračunati površinu ograničenu graficima funkcija $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
5. Naći površinu figure ograničene krivama $y = x, y = -4x + 20, x = 2, y = 0$.
6. Naći površinu figure ograničene krivama $y = x^2 + 12x + 36, y = x^2, y = 4, y = 0$.

1.2 Dužina luka krive

Dužina luka krive L može se aproksimirati izlomljenim linijama:



tačnije zbirom dužina ovih linija:

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} |P_iP_{i-1}|,$$

gde je $|P_iP_{i-1}|$ dužina duži P_iP_{i-1}.

Kada povećavamo broj intervala na x-osi, tj. kada $n \to \infty$ dobijamo baš dužinu luka krive:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_iP_{i-1}|. \tag{1}$$

Primetimo sada da se dužina $|P_iP_{i-1}|$ može izračunati kao

$$|P_iP_{i-1}| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Ako iskoristimo teoremu srednje vrednosti, znamo da postoji $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$ tako da je $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f'(x_i^*)\triangle x$. Vratimo se u formulu (1):

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\triangle x)^2 + (f'(x_i^*)\triangle x)^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2}\triangle x, \tag{2}$$

a ovo sada prepoznajemo kao integral:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

1.2.1 Zadaci

1. Naći dužinu luka krive $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$ na intervalu $(1, 2)$.
2. Naći dužinu luka krive $y = xe^{-x}$ na intervalu $(0, 2)$.

1.3 Površina površi

Na sličan način kao za slučaj dužine luka krive, moguće je zaključiti da je površina površi koja se dobija kada se kriva $y = f(x)$ rotira oko x-ose zapravo integral:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

1.3.1 Zadaci

1. Naći površinu površi dobijene rotiranjem krive $y = \sqrt{4 - x^2}$ oko x-ose, na intervalu $[-1, 1]$.
2. Naći površinu površi dobijene rotiranjem krive $y = e^x$ oko x-ose, na intervalu $[0, 1]$.

1.4 Zapremina tela

Zapremina tela koje nastaje rotiranjem krive $y = f(x)$ oko $x - ose$ na intervalu $[a, b]$ računa se pomoću formule:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

1.4.1 Zadaci

1. Izračunati zapreminu lopte poluprečnika $r > 0$.
2. Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotiranjem krive $y = e^x$ oko $x-$ ose na intervalu $[\ln 2, \ln 7]$.
3. Izračunati zapreminu torusa $x^2 + (y - b)^2 = a^2, a, b > 0$.