1 Integrali

★ Problem: proceniti površinu ispod parabole $y = x^2$ od $x = 0$ do $x = 1$.

Ideja: podeliti interval od 0 do 1 na četiri dela i površinu aproksimirati sa 4 pravougaonika stranica iste dužine (na x-osi): $1/4$, a širina: (na $y-$osi) $(1/4)^2$, $(1/2)^2$, $(3/4)^2$ i 1^2.

Ovo je ideja iza određenog integrala: aproksimacija površine ispod grafika funkcije zbirom površina pravougaonika. Kada pustimo da dužina intervala $\triangle x$ teži nuli dobijamo baš površinu ispod krive i to obeležavamo sa

$$\int_a^b f(x)dx,$$

i ovaj izraz zovemo određeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$. Integral je, dakle, granična vrednost.

Oznaka $\int$ potiče od S za sumu (sabiramo površine), dok dx potiče od $\triangle x$, dužine intervala, a obeležava po kojoj promenljivoj integralimo.

Imamo dve bitne teoreme, zovemo ih fundamentalne teoreme kalkulusa, ukratko:

Teorema 1.1.

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b \quad \Rightarrow \quad g'(x) = f(x).$$

Teorema 1.2.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad \text{gde je } F' = f.$$

Svako F za koje važi $F' = f$ zovemo *primitivna funkcija* od f.

Familiju primitivnih funkcija zovemo **neodređeni integral** funkcije i označavamo sa

$$\int f(x)dx.$$

Dakle važi

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad \Leftrightarrow \quad (F(x) + c)' = f(x), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Određeni integral dakle možemo naći tako što nađemo neodređeni, tj. F i onda odredimo $F(b) - F(a)$ (teorema (1.2)).

Zbog toga što su izvod i integral u ovakvom odnosu, lako dolazimo do tablice integrala:

Tablica integrala	
$\int k dx = kx + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg}\, x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\text{ctg}\, x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a}\text{arctg}\, \frac{x}{a} + C, \ (a \neq 0)$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ (a > 0, a \neq 1)$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C, \ (a \neq 0)$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, \ (\lvert x\rvert < a, a \neq 0)$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	

★ Posmatrajmo sada sledeći primer:

$$\int 2x\sqrt{1 + x^2} dx.$$

Ovaj integral nije tablični. Pokušajmo da ga rešimo tako što ćemo $1 + x^2$ označiti sa t i zapišimo $dt = (1 + x^2)' dx = 2x dx$. Sada dobijamo

$$\int 2x\sqrt{1 + x^2} dx = \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(1 + x^2)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Proverimo da li ovaj metod funkcioniše. Zaista

$$(\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+c)' = 2x\sqrt{1+x^2},$$

odnosno dobijena familija funkcija jeste primitivna za podintegralni izraz.

Ovaj metod zove se **metod smene** i funkcioniše kada god je početni integral oblika:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx.$$

U stvari tada važi formula

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + c, \quad F' = f.$$

Zaista, kada uradimo izvod desne strane, dobijamo podintegralnu funkciju (zbog pravila za izvod složene funkcije).

Ako označimo $t = g(x)$ i $dt = g'(x)dx$, formula postaje

$$\int f(t)du = F(t) + c.$$

★ Još jedan metod za izračunavanje neodređenog integrala je **metod parcijalne integracije**. Slično kao kod metoda smene, može se pokazati da važi formula

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

1.1 Zadaci

1. Izračunati sledeće integrale:

   (a) $\int x(\sqrt{x} - 2x)dx$, (b) $\int e^{-x}dx$, (c) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$, (d) $\int \frac{1-x^2}{1+x^2}dx$.

2. Izračunati sledeće integrale:

   (a) $\int \cos(3x-2)dx$, (b) $\int xe^{x^2}dx$, (c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$, (d) $\int \operatorname{tg} x dx$, (e) $\int \frac{1}{x \ln x}dx$, (f) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$.

3. Izračunati sledeće integrale: (a) $\int \cos^2 x dx$, (b) $\int \frac{1}{1-\cos x}dx$.

4. Izračunati:

   (a) $\int \frac{1}{x^2-8x+25}dx$, (b) $\int \frac{2x-2}{x^2+6x+13}dx$, (c) $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x+27}}dx$, (d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}dx$.

5. Izračunati sledeće integrale:

   (a) $\int \ln x dx$, (b) $\int \ln(x^2+1)dx$, (c) $\int \arcsin x dx$, (d) $\int xe^{-x}dx$, (e) $\int x \sin x dx$, (f) $\int x^5 \ln x dx$, (g) $\int x^2 \sin x dx$.

6. Izračunati sledeće integrale: (a) $\int e^x \sin x dx$, (b) $\int \sqrt{1-x^2}dx$.