1 Ispitivanje toka i skiciranje grafika funkcije

1.1 Zadaci

Ispitati tok i skicirati grafike datih funkcija.

1. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$,
2. $f(x) = \ln(1+e^x)$,
3. $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$.

2 Landauovi simboli

Definicija 2.1. Funkcija f je "malo o" od g:

$$f(x) = o(g(x)), \text{ kada } x \to x_0$$

akko

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Definicija 2.2. Funkcija F je "veliko o" od G:

$$F(x) = O(G(x)), \text{ kada } x \to x_0$$

akko postoji $M > 0$ tako da:

$$|F(x)| \leq M|G(x)|, \text{kada } x \to x_0.$$

3 Tejlorova formula

- želimo da aproksimiramo proizvoljnu funkciju $f(x)$ pomoću Tejlorovog polinoma $n-$tog stepena u tački x_0:

$$P_n(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

- da bismo koristili Tejlorov polinom $T_n(x; x_0)$ umesto funkcije $f(x)$, potrebno je znati procenu izraza

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x; x_0),$$

  koji nazivamo ostatkom

- procenom ostatka zapravo ocenjujuemo grešku aproksimacije $f(x) \approx P_n(x; x_0)$ u okolini tačke x_0

Teorema 3.1. ***(Peanov oblik ostatka).***
Neka funkcija $f(x)$, neprekidna zajedno sa svim svojim izvodima do $(n-1)-$tog reda u nekoj okolini tačke x_0, ima $n-$ti izvod u toj okolini. Tada za x iz okoline tačke x_0 važi formula

$$f(x) = P_n(x; x_0) + R_n(x),$$

pri čemu ostatak ima oblik

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n).$$

Teorema 3.2. ***(Lagranžov oblik ostatka)***

Neka funkcija $f(x)$, neprekidna zajedno sa svim svojim izvodima do $n-$tog reda u nekoj okolini tačke x_0, ima $(n+1)-$ti izvod u toj okolini. Tada za x iz okoline tačke x_0 važi formula

$$f(x) = P_n(x; x_0) + R_n(x),$$

pri čemu ostatak ima oblik

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

gde je ξ realan broj između x i x_0.

Teorema 3.3. ***(Integralni oblik ostatka)***

Neka funkcija $f(x)$, neprekidna zajedno sa svim svojim izvodima do $n-$tog reda u nekoj okolini tačke x_0, ima $(n+1)-$ti izvod u toj okolini i $f^{(n+1)}$ je integrabilna funkcija. Tada za x iz okoline tačke x_0 važi formula

$$f(x) = P_n(x; x_0) + R_n(x),$$

pri čemu ostatak ima oblik

$$R_n = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n dt.$$

3.1 Maklorenov red

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R} \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n\ , \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\ , -1 < x \leq 1 \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n\ , |x| < 1
\end{aligned}$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

3.2 Zadaci

1. Izračunati granične vrednosti pomoću Tejlorove formule:
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x \sin x}{(\ln(1+x))^4}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{tgx}\right)$.

2. Aproksimirati funkciju $f(x) = \sqrt[3]{x}$ Tejlorovim polinomom stepena 2 u $x_0 = 8$ i proceniti grešku aproksimacije za $7 \leq x \leq 9$.