

1 Izvod složene funkcije

1.1 Zadaci

1. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} y = (x+2)^3, & \text{(b)} y = \sin^2 x, & \text{(c)} y = 2 \sin(6x), & \text{(d)} y = x^2 e^{-2x}, \\ \text{(e)} y = e^{-x}(\sin x + \cos x), & \text{(f)} y = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg} x) + \ln(\cos x), & \text{(g)} y = \frac{\ln 3x}{x}. \end{array}$$

2. Odrediti prvi izvod datih funkcija:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}), & \text{(b)} y = \sqrt{1 + \sin x}, & \text{(c)} y = \ln \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}, a \in \mathbb{R} \\ \text{(d)} y = \ln \sqrt{\frac{\sin 2x}{1 - \sin 2x}}. \end{array}$$

2 Teorema srednje vrednosti

Teorema 2.1. Neka je $y = f(x)$ funkcija koja ima sledeće osobine:

- $f(x)$ je neprekidno na $[a, b]$;
- $f(x)$ je diferencijabilno na (a, b) .

Tada postoji bar jedna tačka $c \in (a, b)$ takva da je

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

2.1 Zadaci

1. (a) Skicirati grafik funkcije $f(x) = x + \frac{4}{x}$ u $[0, 10] \times [0, 10]$.

(b) Nacrtati sečicu kroz tačke $(1, 5)$ i $(8, 8.5)$.

(c) Naći c koje zadovoljava zaključak teoreme o srednjoj vrednosti na $[1, 8]$.

Napomena. Primetiti da f ne zadovoljava uslove teoreme srednje vrednosti na intervalu $[0, 10]$. Zašto?

2. Proveriti da li važe uslovi teoreme o srednjoj vrednosti za sledeće funkcije na datom intervalu. Zatim naći sve brojeve c za koje važi zaključak teoreme.

(a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$, $[-1, 1]$, (b) $f(x) = e^{-2x}$, $[0, 3]$.

3. Neka je $f(x) = (x-3)^{-2}$. Pokazati da ne postoji $c \in (1, 4)$ tako da je $f(4) - f(1) = f'(c)(4-1)$.

Zašto ovo nije u kontadiciji sa teoremom srednje vrednosti?

4. Pokazati da jednačina $1 + 2x + x^3 + 4x^5 = 0$ ima tačno jedan realan koren.

5. Pokazati da jednačina $x^3 - 15x + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$, ima najviše jedan koren u intervalu $[-2, 2]$.

6. Neka je za sve $x \in \mathbb{R}$ ispunjeno $3 \leq f'(x) \leq 5$. Pokazati da je tada

$$18 \leq f(8) - f(2) \leq 30.$$

7. Pomoću teoreme o srednjoj vrednosti pokazati

$$\sin a - \sin b \leq a - b$$

za sve $a, b \in \mathbb{R}$.

8. U 14 : 00 auto se kreće brzinom 30 km/h . U 14 : 10 brzina je 50 km/h . Pokazati da je u nekom momentu između 14 : 00 i 14 : 10 ubrzanje tačno 120 km/h^2 .