1 Brojni redovi - definicija

Definicija 1.1. Brojni red je izraz oblika

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad \text{ili krace} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

gde je $a_1, ..., a_n, ...$ niz realnih brojeva.

Postavlja se pitanje kada ovaj izraz postoji kao broj, a kada ne. Pogledajmo primere:

Primer 1.2. *Ako posmatramo red:*

$$1 + 2 + ... + n + ...$$

i pokušamo da saberemo prva dva člana, potom prva tri, prva četiri, prvih n dobićemo: $1, 3, 6, 10, ..., n(n+1)/2$. *Vidimo da ove sume postaju jako velike kada se n povećava i nemoguće je da je naći konačnu sumu ovog reda.*

Primer 1.3. *Posmatrajmo sada*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$$

Sada imamo drugačiju situaciju jer se članovi sume sve više približavaju nuli. ***Parcijalne sume*** *ovog reda su:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 0.5 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= 0.75 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &= 0.875 \\ &... \\ \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{25}} &= 0.99999997 \end{aligned}$$

Deluje da možemo reći da je ovaj red jednak jedinici.

Vodeći se idejom iz primera, definišemo niz parcijalnih suma:

$$s_n = a_1 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

i sada možemo dati definiciju reda:

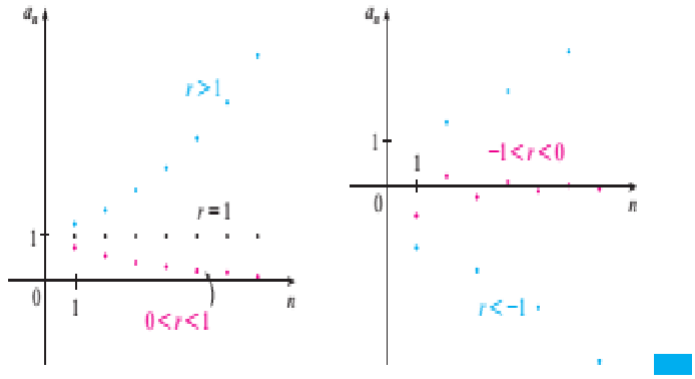
Definicija 1.4. Ako $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ postoji u $\mathbb{R}$ onda je to **suma reda** $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Tada kažemo da je red **konvergentan**. U suprotnom red je **divergentan**.

Primer 1.5. *Pokazati da red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

konvergira za $|q| < 1$, a divergira za $|q| \geq 1$.

♣ *Niz r^n izgleda ovako (za različite vrednosti r):*



Primer 1.6. *Može se pokazati da*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergira.

1.1 Osobine konvergentnih redova

1. Neka je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljno. Ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, onda konvergira i $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ i važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. Ako su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni onda je i $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konvergentan i važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

3. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, onda $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

1.2 Zadaci

1. Neka je $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$. Ispitati konvergenciju ovog niza, a potom i konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Ispitati konvergenciju redova:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+4}}$,

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)$,

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}})$,

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^{n+1}}{10^n}$.

2 Kriterijumi za konvergenciju redova sa nenegativnim opštim članom

Često nije lako eksplicitno odrediti formulu za n–tu parcijalnu sumu i izračunati sumu reda. Ali, postoje brojni kriterijumi koji određuju da li red konvergira ili ne, bez određivanja njegove sume. Bavićemo se samo redovima koji imaju nenegativan opšti član a_n.

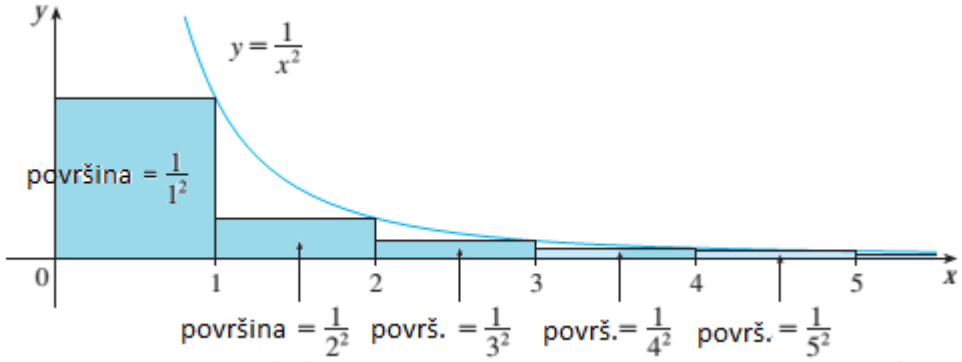
Primetimo prvo da za ovakve redove, niz parcijalnih suma mora biti rastući (stalno dodajemo nenegativan član). Rastući nizovi koji su ograničeni su konvergentni. Dakle dovoljno je pokazati da je niz parcijalnih suma ograničen.

Zbog ove osobine, važe sledeći kriterijumi:

2.1 Integralni kriterijum

Neka je f nenegativna, neprekidna i opadajuća funkcija na $[1, +\infty)$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konergira ako i samo ako $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergira.

Primer 2.1. *Posmatrajmo* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ *i funkciju* $y = \frac{1}{x^2}$.



Vidimo da pravougaonici ostaju uvek ispod grafika ove funkcije. To jest, zbir njihovih površina ostaje manji od cele površine ispod krive, a to je integral funkcije $\frac{1}{x^2}$. *Imamo da su parcijalne sume ograničene sa*

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} = 2,$$

odakle sledi da je red konvergentan. I za sam red važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$

2.1.1 Zadaci

1. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$,

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

2. Za koje $p \in \mathbb{R}$ red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergira?

2.2 Uporedni kriterijum

Ako za sve $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n \leq b_n$ onda

1. Ako $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2. Ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira onda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

2.2.1 Zadaci

1. Ispitati konvergenciju redova:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$,

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

2.3 Test upoređivanja limesa

Ako

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \quad c > 0,$$

onda ili oba reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiraju, ili oba divergiraju.

2.3.1 Zadaci

1. Ispitati konvergenciju redova:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$,

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{n^5+5}}$.