Glava 1

Prava

Implicitni oblik prave: $Ax + By + C = 0$.
Eksplicitni oblik prave: $y = kx + n$.
Segmentni oblik prave: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

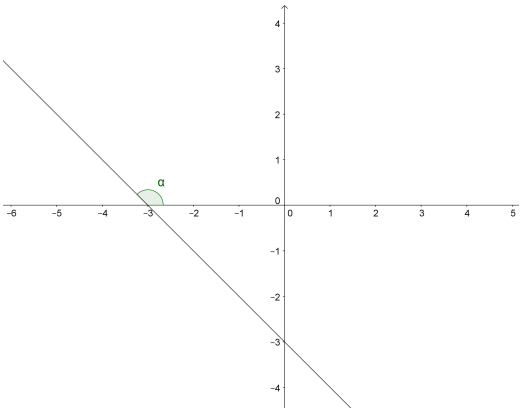
1. Za datu pravu $x + y + 3 = 0$, odrediti:

   a) koeficijent pravca,

   b) ugao koji zaklapa sa pozitivnim delom x-ose,

   c) tačke u kojima seče x- i y-osu.

   Rešenje. Lako dobijamo da je $y = -x - 3$. Odavde se jasno vidi da je $k = -1$, a $n = -3$.



   Kako je $k = tg\ \alpha = -1$, gde je α ugao koji data prava zaklapa sa pozitivnim delom x-ose, to je $\alpha = 135^\circ = \dfrac{3\pi}{4}$.
   Za $x = 0$, dobijamo $y = -3$, a za $y = 0$, dobijamo $x = -3$, pa je presek date prave sa x-osom tačka $(-3, 0)$, a sa y-osom tačka $(0, -3)$.

2. Ako prava sa pozitivnim delom x-ose zaklapa ugao sa $\frac{\pi}{3}$ i neka prava prolazi kroz tačku $A(-2\sqrt{3}, 3)$. Naći:

   a) koeficijent pravca (nagib) date prave,

   b) jednačinu ove prave,

   c) tačke u kojima prava seče x- i y-osu.

   Rešenje. Koeficijent pravca (nagib) prave je $k = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.
   Jednačina ove prave je $y - 3 = \sqrt{3}(x - (-2\sqrt{3}))$, odnosno $y = \sqrt{3}x + 9$.
   Dalje se lako dobija da je presek prave sa x-osom tačka $(-3\sqrt{3}, 0)$, a sa y-osom tačka $(0, 9)$.

3. Naći jednačinu prave koja prolazi kroz dve date tačke $A(-1, 1)$ i $B(2, 4)$, a potom odrediti:

   a) koeficijent pravca date prave,

   b) ugao koji ova prava zaklapa sa pozitivnim delom x-ose,

   c) tačke u kojima prava seče x- i y-osu.

   Rešenje. Jednačina ove prave je

   $$\frac{y-1}{4-1} = \frac{x+1}{2+1},$$

   odnosno $y = x + 2$.
   Nagib ove prave je $1 = k = tg\ \alpha$, odnosno $\alpha = 45° = \pi/4$.
   Dalje se lako dobija da je presek prave sa x-osom tačka $(-2, 0)$, a sa y-osom tačka $(0, 2)$.

4. Ako neka prava seče x-osu u tački a, a y-osu u tački b pokazati da se jednačina te prave može zapisati u obliku

   $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

5. Neka je ON (normalno) rastojanje koordinatnog početka od prave p. Ako je $|ON| = d$ i ako ON sa pozitivnim delom x-ose zaklapa ugao α, onda se jednačina prave p može zapisati u obliku

   $$x\cos\alpha + y\sin\alpha = d.$$

   Dokazati.

6. Data je prava p koja sadrži datu tačku $P(2, 3)$ i paralelna je sa pravom $q : x + y - 2 = 0$. Naći:

   a) eksplicitni, implicitni i segmentni oblik prave p,

   b) ugao koji prava p zaklapa sa pozitivnim delom x-ose,

c) tačke u kojima prava p seče x- i y-osu.

Rešenje. Ekplicitni oblik prave q je $y = -x + 2$, pa pošto su prave p i q paralelne, to i koeficijent pravca prave p je -1, pa je jednajna prave $p : y - 3 = -1(x - 2)$, odnosno $y = -x + 5$, tj. $x + y - 5 = 0$ ili $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$. Kako je $-1 = k = tg\ \alpha$, to je $\alpha = 135° = 3\pi/4$.
Iz segmentnog oblika prave, odmah se dobija da su preseci sa x- i y-osom tačke $(5, 0)$ i $(0, 5)$, redom.

7. Naći koordinate tačke $A(x, y)$ koja se nalazi na pravoj p koja ima koeficijent pravca 2 i prolazi kroz koordinatni početak i na pravoj q koja ima koeficijent pravca 1 i prolazi kroz tačku $M(-1, 0)$.

8. a) Naći jednačinu prave p koja sadrži tačku $A(-2, 2)$ i normalna je na pravu $q : 2x + y = 4$.

   b) Naći koordinate tačke preseka pravih p i q.

   c) Naći odstojanje tačke A od prave q.

9. Naći rastojanje tačke $B(4, 1)$ od prave $p : 3x - y = 5$.

10. U funkciji od m, b i b', naći rastojanje između paralelnih pravih $y = mx + b$ i $y = mx + b'$.

11. a) Zavisnost između temperature izražene u stepenima celzijusa C i u stepenima Farenhajta F je linearna. Ako je poznato da je $C = 0$, ako je $F = 212$ i $C = 100$, ako je $F = 212$, izraziti tu zavisnost.

    b) Da li je za neku temperaturu $C = F$ i ako jeste za koju vrednost se dostiže?

12. Kada se vazduh kreće ka gore, on se širi i hladi.

    a) Ako je na zemlji temperatura vazduha $20°C$, a temperatura na visini od 1 km je $10°C$, izraziti temperaturu T (u $°C$) u funkciji od visine h (u kilometrima), koristeći linearni model (funkciju).

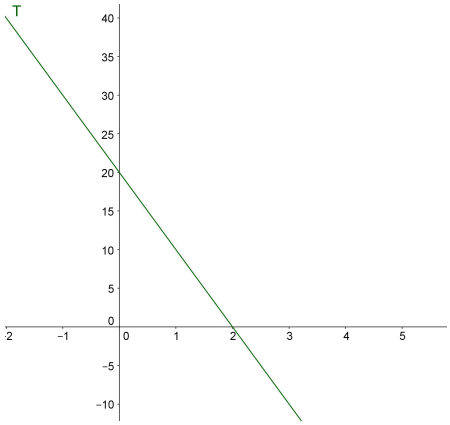
    b) Nacrtati grafik ove funkcije. Naći nagib ove krive i objasniti šta predstavlja u ovom modelu.

    c) Koja je temperatura vazduha na visini od 2,5 km?

Rešenje. Ako sa T označimo temperaturu vazduha, a sa h rastojanje (visinu) od zemlje, onda se ovaj proces može opisati jednačinom

$$\frac{T - 20}{10 - 20} = \frac{h - 0}{1 - 0},$$

odnosno $T = -10h + 20$.



Ova funkcija ima smisla samo za vrednosti $h \geq 0$. Njen nagib je $k = -10$. Ako je $h = 2,5$, onda je $T = -10 * 2,5 + 20 = -5°C$.

Glava 2

Funkcije

2.1 Pojam funkcije i grafik funkcije

Funkcija koja preslikava skup A u skup B je podskup f skupa $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ takav da

$$\text{za svako } a \in A \text{ postoji tačno jedno } b \in B \text{ takvo da } (a, b) \in f.$$

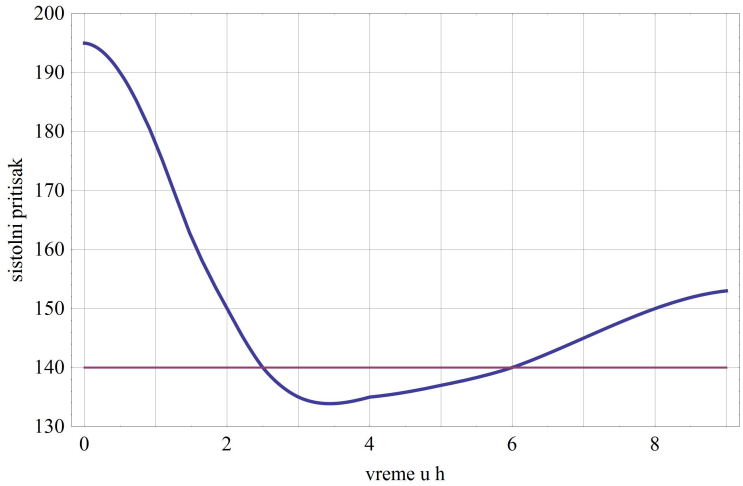
Umesto $(a, b) \in f$ češće pišemo $f(a) = b$. Skup A je *domen*, a skup B *kodomen* funkcije f.

1. Koja od sledećih pridruživanja su funkcije:
   (a) osoba$\mapsto$plata;
   (b) osoba$\mapsto$majka;
   (c) žena$\mapsto$dete;
   (d) nastavnik$\mapsto$učenik?

2. Neka su data su dva skupa: A - skup koji sadrži sve građane Srbije i B - skup svih nizova od 13 cifara, tj. oblika $\overline{a_1 a_2 ... a_{13}}$, gde su a_i proizvoljne cifre (dopuštamo da ovi nizovi počinju i nulom). Definisati funkciju f koja će preslikavati skup A u skup B, tj. $f : A \to B$.

3. Neka je ρ skup svih tačaka $(x, y) \in \Omega^2$ takvih da je $x^2 + y^2 = 1$. Da li je ρ funkcija, ako je
   (a) $\Omega = [-1, 1]$,
   (b) $\Omega = [0, 1]$?

4. Pacijentu sa sistolnim pritiskom 195 mmHg, dat je odgovarajući lek, a reakcija na lek (u satima nakon uzimanja leka) je prikazana na grafiku.



a) Proceniti u kom periodu od uzimanja leka je pacijent imao sistolni pritisak ispod 140 mmHg.

b) Proceniti u kom periodu je sistolni pritisak bio iznad 150 mmHg.

c) Prokomentarisati dejstvo ovog leka.

5. Naći oblast definisanosti sledećih funkcija:

a) $f(x) = \sqrt{x-3}$, b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x}$, c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.

Napomena: Nadalje će se, gde god nije drugačije rečeno, za domen funkcije uzimati oblast definisanosti.

6. Koja je razlika između funkcija $f(x) = x + 3$ i $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$?

Apsolutna vrednost $|\cdot|$ se definiše na sledeći način:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ako je } \ x < 0, \\ x, & \text{ako je } \ x \geq 0. \end{cases}$$

7. Skicirati grafike funkcija:

a) $f(x) = |x|$, b) $f(x) = |x - 2|$, c) $f(x) = -|x| + 1$.

8. Neka je data funkcija:

$$C(m) = \begin{cases} 0.6, & \text{ako je } \ 0 \leq m < 0.5, \\ 1.1, & \text{ako je } \ 0.5 \leq m < 1, \\ 2, & \text{ako je } \ 1 \leq m < 2, \\ 3.5, & \text{ako je } \ 2 \leq m < 4, \\ 6, & \text{ako je } \ 4 \leq m < 8, \\ \dots \end{cases}$$

koja predstavlja cenu transporta paketa (u evrima), u zavisnosti od mase tog paketa (izraÅ¿eno u kilogramima). Skicirati grafik ove funkcije.

9. Ispitati parnost sledećih funkcija:

a) $f(x) = x^2 + 2$, b) $g(x) = x^3 - x$, c) $h(x) = 3x - x^2$.

Funkcija $f : A \to B$ je:

- 1-1 ako za sve $x, y \in A$ iz $f(x) = f(y)$ sledi $x = y$;
- *"na"* ako za svako $b \in B$ postoji $a \in A$ takvo da je $f(a) = b$;
- *bijekcija* ako je 1-1 i "na".

Funkcija f^{-1} naziva se *inverzna* za funkciju $f : A \to B$, može se definisati ako i samo ako je f bijekcija, i to na sledeći način: za svako $b \in B$, $f^{-1}(b) = a$, gde je $a \in A$ jedinstveni element takav da $f(a) = b$.

10. Neka je $f(x) = 2x - 7$. Dokazati da je ova funkcija bijekcija i naÄĞi njoj inverznu funkciju $f^{-1}(x)$. Uporediti $f^{-1}(x)$ i $\dfrac{1}{f(x)}$.

2.2 Elementarne funkcije

2.2.1 Polinomi

1. Loptica je bačena sa vrha tornja visokog 450 metara. U tabeli je data udaljenost h loptice od tla, merena nakon t sekundi od trenutka kada je loptica bačena.

t (u sekundama)	h (u metrima)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

Tabela 2.1

a) Naći model (funkciju), koji daje zavisnost visine h od vremena t.

b) Naći kolika je uadljenost loptice od zemlje nakon $8,5$ sekundi.

c) Naći za koje vreme će loptica pasti na zemlju.