Uvod u analizu (M3 smer)

3. februar 2016.

Opšta greška:

Limes se jako pažljivo mora puštati kroz zbir, proizvod itd. Npr. ako $a(x) \to \infty$, ne možemo reći da je $\lim a(x)b(x) = \lim a(x) \lim b(x)$. U svakom koraku u kojem kažete da podizraz teži nečemu, morate znati da svi ostali činioci celog izraza takođe konvergiraju (što možete i na kraju zaključiti, ali potrebno je to objasniti).

1. Dat je skup $X = \{x > -10 : (x^2 - 3)\mathrm{tg}^2 \frac{\pi}{2x} \geq 0\}$.

a) Odrediti infimum i supremum skupa X i proveriti da li skup X ima minimalni i maksimalni element;

b) Odrediti unutrašnje, adherentne, rubne, izolovane tačke i tačke nagomilavanja skupa X.

Uputstvo:

$\mathrm{tg}^2 \frac{\pi}{2x}$ je nenegativan izraz, pa nejednakost važi kada je $x^2 - 3 \geq 0$ ili kada je $\mathrm{tg} \frac{\pi}{2x} = 0$. Takođe, treba ispitati tačke u kojima dati tangens nije definisan i izbaciti ih po potrebi iz dobijenog skupa X.

2. a) Pokazati da je niz $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \dfrac{5x_n + 4}{4x_n + 5}$, $n \in \mathbb{N}$ konvergentan i odrediti njegovu granicu.

Uputstvo:

Indukcijom pokazati da je niz rastući i ograničen odozgo sa 1. Odatle sledi da je konvergentan.

b) Odrediti $\liminf$ i $\limsup$ niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ako je

$$a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})^n + 2\cos(n+1)\pi.$$

Da li je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan?

Uputstvo:

Razdvojiti dva slučaja: kada je n parno i kada je n neparno. Dobićemo tako dva podniza i naći njihove granice. Niz koji ima dve različite tačke nagomilavanja ne može biti konvergentan.

3. Izračunati:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1 + x\sin x} - \cos x}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cos^{2a} x - 1}{x^2}$, $a \in \mathbb{R}$.

Uputstvo:

Oba slučaja se svode na tablične limese. Jedan način za zadatak a) je racionalisanje i korišćenje $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Pod b) se koristi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\cos^{2a} x = (\cos^2 x)^a$ i jedan od načina je koristiti $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

Česte greške:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cos^{2a}x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=1$$

Ovo nije tačno jer $\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=1$ važi samo kada uz e^{x^2} stoji tačno 1 a ne nešto što teži u 1 ($\cos^{2a}x$). Bilo je mnogo sličnih grešaka.

4. Odrediti prirodni domen i asimptote grafika funkcije

$$f(x)=|x+1|e^{-\frac{1}{x}}.$$

Uputstvo:

Domen ove funkcije je $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Treba ispitati vertikalnu asimptotu kada $x\to 0$ sa leve i sa desne strane, pokazati da nema horizontalnu, i ispitati kosu - odvojiti slučajeve kada $x\to-\infty$ i $x\to\infty$.

Česte greške:

Neispitivanje posebno limesa kada $x\to-\infty$ i $x\to\infty$, kao i sledeće:

$$(x+1)e^{-\frac{1}{x}}-x\to x+1-x=1,\ x\to\infty$$

Ovo je slučaj puštanja limesa kroz proizvod kada jedan od činilaca (x) divergira u beskonačno, dakle to nije moguće uraditi. Potrebno je bilo svesti izraz na tablični limes.

5. a) Da li je moguće odrediti konstantu A tako da funkcija:

$$f(x)=\begin{cases}e^x\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0.\end{cases}$$

bude neprekidna na $\mathbb{R}$?

Uputstvo:

Konstantu A nije moguće odrediti jer $\lim_{x\to 0}f(x)$ ne postoji. Funkcija NE teži u $+\infty$ sa jedne i $-\infty$ sa druge strane nule, ovaj limes baš ne postoji i to je potrebno pokazati. To se radi tako što se nađu dva niza $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ koja teže u nulu a $\lim_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim_{n\to\infty}f(y_n)$.

Nije ispravno pustiti limes kroz $e^x\cos\frac{1}{x}$ i reći da je to isto što i $\lim_{x\to 0}cos\frac{1}{x}$ jer poslednji limes ne postoji i ne možemo puštati limes kroz proizvod.

b) Da li je funkcija f uniformno neprekidna na intervalu $(0,\pi)$? Dokazati.

Uputstvo:

Funkcija nije uniformno neprekidna na ovom intervalu, što se može naslutiti kada se pod a) reši. Jer ako uzmemo ista ta dva niza možemo pokazati da $|x_n-y_n|\to 0$, dok $|f(x_n)-f(y_n)|\nrightarrow 0$, a to znači da f nije UN na $(0,\pi)$.