Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Nenad Teofanov

Deset lekcija elementarne matematike

2021, Novi Sad

Predgovor

Ova knjiga je nastala na osnovu predavanja koja je autor držao studentima matematičkih smerova Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu u okviru izbornog predmeta "Elementarna matematika 2". Ideja tih predavanja bila je da se studentima ponude sadržaji koji ukazuju na povezanost različih oblasti matematike, a koji se obično ne obrađuju detaljno u okviru drugih predmeta.

Deset poglavlja sabranih u ovoj knjizi odražavaju želju autora da se istaknu neke ideje i tehnike koje se često koriste kao opšte poznate alatke na naprednijim kursevima, ali su dovoljno elementarne da se mogu usvojiti nakon odslušanih osnovnih kurseva analize, algebre i logike.

Novi Sad, 2021.

Autor

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Zajednička nit koja se na neki način provlači kroz sve lekcije ove knjige je struktura skupa realnih brojeva. Iako naizgled elementarna tema, ona predstavlja neiscrpni prostor za pitanja na koja odgovori još uvek nisu poznati, ili su se, u traganju za odgovorima, otkrivali novi fenomeni i nove tehnike dokazivanja. S obzirom da je posmatranje beskonačnih podskupova skupa realnih brojeva suštinski deo svakog intrigantnog pitanja u vezi sa njegovom strukturom, posebna pažnja je posvećena proširenju skupovnih operacija sa konačnog na beskonačni broj skupova.

Čitaočevoj pažnji prepuštamo kratki osvrt na teme obrađene u knjizi.

U prvom poglavlju se koristi istorijski pristup za definisanje skupa kompleksnih brojeva, kao alternativa uobičajenom pristupu po kojem se kompleksni brojevi uvode kao struktura u kojoj je moguće odrediti koren iz negativnog broja. Standardni kursevi kompleksne analize su posvećeni prvenstveno teoriji funkcija kompleksne promenljive, pa se u njima često ne ističu dovoljno neke zadivljujuće činjenice u vezi sa strukturom polja kompleksnih brojeva, kao što su, pa primer, zatvorenost strukture u odnosu na korenovanje i rešivost polinomnih jednačina, odnosno osnovni stav algebre. Prvo poglavlje se, osim želje da se istakne vitalnost istorijskog pristupa matematičkim temama, bavi i ovim temama koje smo, sledeći Rogera Penrose-a, nazvali magijom kompleksnih brojeva.

Drugo poglavlje je posvećeno analizi odnosa algebarskih i transcendentnih brojeva. Za razliku od tradicionalne podele skupa realnih brojeva na racionalne i iracionalne brojeve, uvođenje algebarskih brojeva ilustruje usku vezu analize i algebre, koja je već istaknuta ulogom kompleksnih brojeva u rešavanju pitanja koje postavlja osnovni stav algebre. Posledica Liouville-ove teoreme je da se pri dokazivanju da je neki broj transcendentan uvodi neka vrsta beskonačnog procesa, što je neophodna alatka za razumevanje strukture skupa realnih brojeva. Upotreba verižnih (neprekidnih) razlomaka u dokazivanju da su neki brojevi iracionalni, kao i otvoreno pitanje o prirodi Ojlerove konstante, oslikavaju skup realnih brojeva kao riznicu u kojoj su mnoga blaga još uvek skrivena.

U trećem poglavlju se pokazuje kako se proizvoljnom (iracionalnom) realnom broju pridružuje beskonačna zaliha razlomaka. Dokaz se zasniva na jednom od osnovnih kombinatornih principa, pa se tako ilustruje pojava kombinatornih ideja na jednom neočekivanom mestu. Posmatranje realnog broja kao beskonačnog skupa razlomaka biće detaljnije objašnjeno u devetom poglavlju.

Četvrto poglavlje je posvećeno teoremi Kantor–Šreder–Bernštajna, sa dokazom koji se zasniva na elementarnoj logici i na pažljivom ispitivanju mogućih slučajeva, pa tako ne liči na argumentacije korišćene u ostalim poglavljima. Kao primer korišćenja teoreme Kantor–Šreder–Bernštajna navedena je jednakost kardinalnih brojeva skupa realnih brojeva i partitivnog skupa za skup prirodnih brojeva.

U petom poglavlju se još jednom koristi teorema Kantor–Šreder–Bernštajna, ovog puta da se pokaže da je kardinalnost Kantorovog skupa jednaka kardinalnosti skupa realnih brojeva. Kantorov skup je zanimljiv kako zbog svoje neuobičajene konstrukcije, tako i zbog svojih specifičnih topoloških svojstava. Kao uvod u drugi i zahtevniji deo knjige pokazano je kako se Kantorov skup definiše pomoću beskonačnih preseka, to jest unija nekih intervala skupa realnih brojeva.

Poglavlje "Skupovi i kvantifikatori" je priprema za sedmo i osmo poglavlje i sadrži podsećanje na dokazivanje skupovnih inkluzija i jednakosti i korišćenje kvantifikatora u elementarnom iskaznom računu. Goldbahova hipoteza je navedena kao primer, pa je njoj posvećen i poseban paragraf, kao mali istorijski osvrt. Poznato je, na primer, da je "slaba" verzija Goldbahove hipoteze posledica Rimanove hipoteze koja se smatra možda najpoznatijim matematičkim problemom koji još nije rešen. Dokaz slabe Goldbahove hipoteze se pojavio 2013. godine.

U sedmom i osmom poglavlju se detaljno proučavaju operacije nad indeksiranim familijama skupova. U dokazima se na suštinski način koriste valjane formule. Na pojmovima uvedenim u ovom poglavlju se zasniva teorija merljivih skupova, pa se ovde navedeni odnosi koriste u teoriji mere i verovatnoći, na primer pri dokazivanju raznih zakona velikih brojeva.

Poslednja dva poglavlja nas, nakon neophodnog izleta u teoriju skupova, vraćaju na posmatranje realnih brojeva.

Skup realnih brojeva se konstruiše pomoću skupa racionalnih brojeva postupkom koji se naziva kompletiranje, a koji se može izvesti na nekoliko načina. Na osnovu razmatranja navedenih u trećem poglavlju (gustina skupa razlomaka) i uvođenja definicije Košijevih nizova kao i pojma granične vrednosti niza, moguće je identifikovati realne brojeve kao klase ekvivalencija Košijevih nizova. U ovoj knjizi odlučili smo se da izložimo osnovne ideje Dedekindove konstrukcije kompletiranja totalno uređenog polja skupa racionalnih brojeva, ne samo zato što se on retko obrađuje na osnovnim studijama matematike, nego prvenstveno zbog njegovog pedagoškog značaja. On leži u prihvatanju apstraktne i pomalo kontraintuitivne definicije realnog broja kao posebnog podskupa u skupu razlomaka. Ovaj pristup ima istorijsko prvenstvo u strogom zasnivanju strukture skupa realnih brojeva. Smatra se da su ključni radovi na tu temu nastali oko 1872. godine od strane Kanta, Vajerštrasa, Hajnea i Dedekinda. Dedekind, međutim, svoju konstrukciju sasvim precizno datira u 24. novembar 1858. godine. Ovde je izložena modifikovana verzija Dedekindove konstrukcije, pri čemu su, zbog obima, izostavljeni detalji koje čitalac može samostalno da proveri.

Svojstvo kompletnosti, opisano Dedekindovim svojstvom ili konvergencijom svih Košijevih nizova, jednostavno se generalizuje na metričke prostore (definisane u paragrafu 11.2) i blisko je jednom drugom svojstvu koje je takođe povezano sa egzistencijom graničnih vrednosti unutar nekog skupa. To je svojstvo kompaktnosti. Kompaktnost nekog metričkog prostora implicira njegovu kompletnost, ali obratno tvrđenje ne važi. Skup realnih brojeva je primer kompletnog prostora koji nije kompaktan. U poslednjem poglavlju detaljno se komentariše pet ekvivalentnih karakterizacija kompaktnih podskupova skupa realnih brojeva. S obzirom da sama formulacija teoreme o kompaktnosti zahteva poznavanje dodatne terminologije, dodali smo pripremne paragrafe o topološkim prostorima, metrici, normi i tačkama nagomilavanja skupova i nizova.

Kompaktnost je, u izvesnom smislu, nastala u želji da se uopšte značajne osobine konačnih skupova na skupove sa beskonačno mnogo elemenata. Pri tome se u tvrđenju koje je tačno za konačne skupove dodaje neki uslov kako bi ono važilo i za kompaktne skupove. Na primer, proizvoljna funkcija nad konačnim realnim domenom je ograničena i ima minimalnu i maksimalnu vrednost nad tim skupom. Ovo tvrđenje se uopštava na zatvorene intervale (koji su kompaktni podskupovi skupa realnih brojeva) uz dodatni uslov neprekidnosti: Ako je funkcija definisana nad zatvorenim intervalom u skupu realnih brojeva neprekidna, onda je ona ograničena nad tim intervalom i ima najmanju i najveću vrednost u nekim tačkama tog intervala. Ovaj primer pokazuje opšte pravilo po kojem se svojstvo kompaktnosti koristi u teoremama egzistencije objekata sa zadatim svojstvom. Na kraju, napomenimo da se upravo činjenica da neprekidna funkcija nad kompaktnim skupom dostiže svoj infimum i supremum (minimalnu i maksimalnu vrednost) koristi na ključnom mestu u klasičnom, Arganovom dokazu fundamentalne teoreme algebre, o čemu je bilo reči u prvom poglavlju ove knjige.

Glava 2

Kompleksni brojevi, istorijska perspektiva

U ovom predavanju se koristi istorijski pristup za uvođenje pojma kompleksnog broja. Komentarišu se aritmetičke operacije nad kompleksnim brojevima i ističu se dve zapanjujuće činjenice u vezi sa strukturom polja kompleksnih brojeva. To su: zatvorenost strukture u odnosu na korenovanje i rešivost polinomnih jednačina, odnosno osnovni stav algebre.

2.1 Ars Magna

Pronalazak Gutenbergove prese i početak serijskog štampanja knjiga 1455. godine imao je neprocenjiv uticaj na nauku. Gutenberg je najpre štampao Bibliju, u tiražu od oko 180 primeraka. Do današnjih dana je sačuvano 49 primeraka te knjige, od kojih su 23 potpuna. Procenjuje se da je vrednost jedne takve knjige tridesetak miliona Eura. Nakon Biblije, na red su došle i naučne knjige.

Luka Pačoli objavljuje 1494. godine udžbenik u kojem tvrdi da poznatim matematičkim metodama nije moguće pronaći formulu za rešenje opšte kubne jednačine. U današnjoj notaicji, kubna jednačina je izraz oblika

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

gde su a, b, c i d unapred zadati realni brojevi, $a \neq 0$. Pačolijevu pretpostavku je, u izvesnom smislu, oborio del Fero koji je skrivao svoje otkriće. Del Fero je preminuo 1526. godine, a iza sebe je ostavio beležnicu u kojoj je opisao formulu za rešavanje jednog tipa kubnih jednačina.

Podsetimo se, krajem XV veka Kolumbo se, u misiji u kojoj su učestvovala tri broda, iskrcava na jedno od Bahamskih ostrva, odnosno, otkriva novi kontinent, Ameriku.

Vrtlog događaja u vezi sa objavljivanjem formule za rešavanje kubne jednačine se uklapa u turbulentni period društvenih promena. Te promene su, osim otkrića Amerike, najavljene objavljivanjem čuvenih 95 teza od strane Martina Lutera, 31. oktobra 1517. godine. Talas novog shvatanja uloge crkve, protestantizam, uzrokovao je sukobe zasnovane na religijskim razlikama. Možda najdrastičniji od njih je pokolj nekoliko hiljada hugenota (protestanata) u Parizu, u noći između 23. i 24. avgusta 1572. godine (Vatrolomejska noć). U celoj Francuskoj je pobijeno oko 100 000 ljudi.

1543. godine, pred sam kraj svog života, Kopernik objavljuje delo *O kretanju nebeskih tela* u kojem se, suprotno stavu rimokatoličke crkve, tvrdi da se Zemlja obrće oko svoje ose i oko Sunca. 1582. godine papskom bulom (dekretom) *Inter gravissimas* proglašava se reforma kalendara i postepeno se prelazi na Gregorijanski kalendar, pa su datumi ove lekcije navedeni po takozvanom "starom" kalendaru.

Centralna ličnost naše priče je Đirolamo Kardano, renesansni lik koji je, između ostalog, svojoj burnoj biografiji godine 1545. dodao objavljivanje knjige *Ars Magna*[1]. Ovo delo je, uz Bombelijevu knjigu *L'Algebra* objavljenu 1572. godine, najznačajnije matematičko izdanje od antičkih vremena do kraja XVI veka.

U knjizi Ars Magna, Kardano je objavio izvođenje formula za rešenje opšte algebarske jednačine trećeg i četvrtog stepena. Zanimljivo, u formulama se javljaju "fiktivna" i "nemoguća" rešenja koja danas ne smatramo ni fiktivnim

[1]Preciznije, Artis Magnae, Sive de Regulis Algebraicis

ni nemogućim. Kardanova epoha ne poznaje nulu kao broj, niti negativne brojeve. Ipak, upravo na osnovama Ars Magne, Bombeli izvodi aritmetičke operacije negativnim brojevima, pa čak i pravila manipulisanja veličinama kod kojih se pod korenom nalazi negativan broj.

U nastavku će se koristiti savremene oznake uz napomenu da u Kardanovo vreme notacija nije bila razvijena, te su se postupci i formule navodili opisno.

Smatra se da je koren iz negativnog broja prvi put eksplicitno naveden u rešenju problema podele broja 10 na dva dela čiji proizvod daje 40. Kardano rešenje smatra beskorisnim, ali ga ipak navodi:

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

2.2 Kubna jednačina

Formula za rešenja kvadratne jednačine bila je poznata od VII veka (ako ne i ranije) kada je izložena u radu indijskog matematičara Bramagupte. Ako se posmatra kubna jednačina

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

smenom $X = x - d$ se dobija

$$\begin{aligned} (X+d)^3 + a(X+d)^2 + b(X+d) + c &= 0 \\ X^3 + (3d+a)X^2 + (3d+2ad+b)X + (d^3+ad^2+bd+c) &= 0. \end{aligned}$$

Za $d = -a/3$ dobija se jednačina $X^3 = pX + q$,

$$\begin{aligned} p &= -3d^2 - 2ad - b = b + \frac{a^2}{3}, \\ q &= -(d^3 + ad^2 + bd + c). \end{aligned}$$

Pogodnim smenama opšta jednačina trećeg stepena koja ima barem jedno pozitivno rešenje može se svesti na jedan od oblika $x^3+mx = n$ ili $x^3 = mx+n$, za neke pozitivne brojeve m i n. S obzirom da su se negativna rešenja sve do druge polovine XVI veka smatrala fiktivnim/neupotrebljivim, jednačina oblika $x^3 + mx + n = 0$ se nije ni rešavala.

Pri tome, oblik $x^3 = mx+n$ je teži za rešavanje te je odgovarajuća formula pronađena nešto kasnije nego formula za rešavanje jednačine $x^3 + mx = n$.

Luka Pačoli je, kao što smo napomenuli, tvrdio da kubne jednačine oblika $x^3 + mx = n$ ili $x^3 = mx + n$ nije moguće rešiti tada poznatim metodama. Ipak, izgleda da je del Fero još krajem XV veka rešio jednačinu $x^3 + mx = n$. U to vreme znanja su se sakrivala od "neupućenih" i česti su bili "matematički dvoboji" u kojima je pobednik odnosio slavu. Povodom jednog takvog dvoboja Tartalja je otkrio formule koje će biti objavljene u Kardanovoj Ars Magni. Čak je poznato da se to desilo 12. i 13. februara 1535. godine[2]. Iako je Tartalja svoje otkriće ljubomorno čuvao, Kardano je nekako uspeo da ga nagovori da mu otkrije tajnu formulu. Nakon dugotrajnog odlaganja, Tartalja je, verovatno dobivši nešto zauzvrat, otkrio Kardanu formulu, uz uslov da je ovaj ne objavi. Ipak, Kardano je, nakon uvida u del Ferovu beležnicu, koju je nakon njegove smrti preuzeo jedan od njegovih učenika odlučio da prekrši obećanje dato Tartalji, što mu ovaj nikad nije oprostio. Napomenimo da je Tartaljin prevod Euklidovih "Elemenata" prvi prevod te knjige na neki savremeni jezik.

U modernoj notaciji, za $x^3 + mx = n$ rešenje je

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}},$$

pa formula daje rešenje za sve pozitivne brojeve m i n. Rešenje komplikovanije jednačine $x^3 = mx + n$ koje je Kardano objavio u "Ars Magni" glasi

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{3}\right)^3}}.$$

Kardano je bio svestan problema koji se javlja kada je potkorena veličina negativan broj i u takvim slučajevima formulu za dobijanje rešenja smatra neupotrebljivom.

[2] Po "starom", julijanskom kalendaru

Na primer, rešenje jednačine $x^3 = 15x + 4$ (posmatrane u Bombelijevoj algebri iz 1572. godine) je

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Zanimljivo, rešenja ove jednačine su realna. Jedno od njih, $x = 4$ je izveo Bombeli vešto manipulišući gornjom formulom i time pokazavši da je Kardano po ovom pitanju bio u zabludi. (Preostala dva rešenja jednačine $x^3 = 15x + 4$ su $-2 \pm \sqrt{3}$.) To je prvi primer računa u kojem se algebarske operacije izvode nad izrazima kod kojih se javlja negativna potkorena veličina.

Treba primetiti da Kardanove formule u opštem slučaju daju veoma komplikovan izraz i da su, sa praktičnog stanovišta, odgovarajući iterativni postupci nalaženja približne vrednosti korena često efikasniji od upotrebe formula. Na primer, $x = 1$ je očigledno rešenje jednačine $x^3 = 5x - 4$, a Kardanova formula daje

$$x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-17/27}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-17/27}}.$$

Ipak, formule objavljene u Ars Magni predstavljaju prvo veliko otkriće u algebri nakon viševekovne stagnacije. Pri tome, njima se, kao što je više puta rečeno, uvodi račun sa izrazima kod kojih je potkorena veličina negativna.

Premda se uvođenje kompleksnih brojeva najčešće motiviše rešavanjem jednačine $x^2 + 1 = 0$, kubna jednačina je odigrala daleko značajniju ulogu u toj epizodi matematičke povesti.

Račun sa veličinama koje sadrže korene iz negativnih brojeva je stagnirao više od sto godina nakon objavljivanja Ars Magne. O tome svedoči i prepiska Hajgensa i Lajbnica iz 1673. godine u kojoj Hajgens iskazuje čuđenje i nevericu nad jednakošću

$$\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt{6}.$$

2.3 Aritmetika kompleksnih brojeva

Već smo napomenuli da je prve korake u razvoju aritmetike kompleksnih brojeva učinio Bombeli. U stvari, on je značajno unapredio notaciju i od opisnog objašnjavanja prešao na simbole. Slovo R je koristio za kvadratni koren, *radix quadraticus*, a R^3 za kubni koren, *radix cubus*, p je simbol sabiranja, m oduzimanja, a zagrade uokviruju izraz na koji se odnosi posmatrana operacija. Tako je u Bombelijevoj algebri

$$\sqrt{4+\sqrt{6}} \leftrightsquigarrow R\lfloor 4pR6\rfloor, \quad \sqrt[3]{2+\sqrt{0-121}} \leftrightsquigarrow R^3\lfloor 2pR\lfloor 0m121\rfloor\rfloor.$$

Bombeli sprovodi sledeći račun kojim opravdava primenu Kardanove formule. Formula za rešenje jednačine $x^3 = 15x+4$ je

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Jedno od rešenja, $x = 4$ (preostala rešenja su $-2\pm\sqrt{3}$) Bombeli izvodi veštom manipulacijom pretpostavivši da je $\sqrt[3]{2\pm\sqrt{-121}}$ veličina istog oblika, to jest da je

$$\sqrt[3]{2\pm\sqrt{-121}} = a \pm b\sqrt{-1} \quad \Longleftrightarrow 2\pm\sqrt{-121} = (a\pm b\sqrt{-1})^3$$

Tada je

$$\begin{aligned}
(a\pm b\sqrt{-1})^3 &= 2\pm\sqrt{-121} \\
(a+b\sqrt{-1})^3(a-b\sqrt{-1})^3 &= (2+\sqrt{-121})(2-\sqrt{-121}) \\
(a^2+b)^3 &= 125 \\
a^2+b &= 5,
\end{aligned}$$

što važi za $a = 2$ i $b = 1$. Iz jednačine $x^3 = 15x + 4$ i Kardanove formule:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = (a+b\sqrt{-1}) + (a-b\sqrt{-1}) = 2a$$

sledi $x = 4$. Kardanova formula u ovom slučaju uključuje kompleksne brojeve, a ipak daje tri realna rešenja.

Tek sa geometrijskom interpretacijom kompleksnih brojeva afirmišu se Bombelijevi postupci sabiranja i množenja kompleksnih brojeva. Time se (u XIX veku) otvaraju vrata za sistematsko proučavanje kompleksnih brojeva. Pozicioniranje kompleksnih brojeva u koordinatnom sistemu koristili su Vesel i Argan, no tek je Gaus 1831. godine tu ideju produbio i definisao aritmetiku kompleksnih brojeva[3]. Otprilike u isto vreme Hamilton razvija aritmetiku kompleksnih brojeva posmatrajući kompleksan broj kao uređen par realnih brojeva, pa se element skupa kompleksnih brojeva $z \in \mathbb{C}$ identifikuje sa odgovarajućim izrazom $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, a $i = \sqrt{-1}$. (Ovu oznaku je uveo Ojler 1748. godine.)

Podsetimo se, algebarske operacije kompleksnim brojevima se uvode na očekivan način, pri čemu se deljenje realizuje racionalisanjem imenioca. Tako, za $z = a + ib$ i $w = c + id$ važi:

$$\begin{aligned} z + w &= (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \\ z \cdot w &= (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Predstavljanje kompleksnih brojeva u ravni omogućava fromulisanje jednostavne geometrijske interpretacije zbira i proizvoda kompleksnih brojeva. S tim u vezi, zgodno je posmatrati i polarnu reprezentaciju kompleksnih brojeva, $z = re^{i\phi}$, $r \geq 0$, $\phi \in (-\pi, \pi]$.

Nije teško dokazati da skup kompleksnih brojeva sa operacijama sabiranja i množenja ima strukturu polja. Za razliku od polja realnih brojeva, u kojem postoji totalno uređenje, u polju kompleksnih brojeva nije moguće uvesti relaciju totalnog poretka. Detalje (u vezi sa algebarskim svojstvima ovih operacija) ostavljamo čitaocu za vežbu.

Tokom XVIII veka objavljeno je mnogo formula u kojima se javljaju kompleksni brojevi. Najslavnija je, svakako, Ojlerova formula

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

iz koje sledi, na primer, de Muavrova formula

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Naziv *imaginarni broj* za koren negativnog broja je u vezi sa široko rasprostranjenim mišljenjem da se ove veličine javljaju samo tokom izvođenja računskih operacija i nekako se poništavaju na kraju računa. Evo ilustrativnih primera.

[3] Smatra se da je Gaus prvi upotrebio naziv kompleksni broj

1. Dokazati da je proizvod zbira kvadrata dva cela broja jednak zbiru kvadrata dva cela broja.

   Važi:

   $$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)\\ &= (a+bi)(c+di)(a-bi)(c-di) = u^2+v^2,\end{aligned}$$

   gde je $u = ac - bd$, $v = ad + bc$.

2. Pitagorinu trojku čine tri broja a, b i c za koje važi $a^2 + b^2 = c^2$. Ovakvih trojki ima beskonačno mnogo, a generisanje Pitagorinih trojki nije jednostavno ako se ne koristi aritmetika kompleksnih brojeva. Nasuprot tome, kompleksni broj $z = x + iy$, sa celobrojnim realnim i imaginarnim delom generiše Pitagorine trojke na sledeći način.

   Važi $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

   Ako je $a = |x^2 - y^2|$ i $b = 2|xy|$, onda je

   $$\begin{aligned}a^2+b^2 &= (x^2-y^2)^2+4x^2y^2\\ &= x^4+2x^2y^2+y^4\\ &= (x^2+y^2)^2\\ &= c^2,\end{aligned}$$

   pa su a, b i $c = x^2 + y^2$ brojevi koji čine Pitagorinu trojku.

   Na primer, za $z = 4 + 7i$, $a = 33$, $b = 56$, a $c = 65$. Važi:

   $$33^2 + 56^2 = 1089 + 3136 = 4225 = 65^2.$$

2.4 Aritmetika kompleksnih brojeva, matrični pristup

Pretpostvalja se da je čitalac upoznat sa pojmom matrice i sa aritmetičkim operacijama nad matricama, uključujući izračunavanje matrice koja je inverzna datoj matrici.

2.4 Aritmetika kompleksnih brojeva, matrični pristup

Podsetimo se, jedinična matrica formata 2×2 je data sa

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ključna motivacija za dodeljivanje jedne matrice formata 2×2 nekom kompleksnom broju je činjenica da za matricu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

važi $M^2 = M \cdot M = -I$ (proveriti ovu jednakost za vežbu). Drugim rečima, ova matrica na neki način "liči" na imaginarnu jedinicu, jer je njen kvadrat jednak $-I$.

Tako se kompleksnom broju $z = a + bi$ dodeljuje matrica

$$aI + bM = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Ovim se uspostavlja bijekcija između skupa kompleksnih brojeva i skupa svih matrica oblika $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Time se dobija *matrična reprezentacija* kompleksnih brojeva.

U nastavku se pokazuje da se sabiranje i množenje kompleksnih brojeva realizuje kao sabiranje i množenje matrica u matričnoj reprezentaciji.

Neka su dati kompleksni brojevi $z = a + bi$ i $w = c + di$. Tada je zbir odgovarajućih matrica dat sa

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix},$$

što je očigledno jednako broju $z + w$ u matričnom zapisu.

Za množenje ovih matrica važi:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & -bd+ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix},$$

što je matrični zapis broja $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Čitaocu se ostavlja za vežbu da ustanovi vezu između broja z^{-1} (za $z \neq 0$) i inverzne matrice za matricu koja odgovara broju z.[4]

2.5 Dve magije kompleksnih brojeva

Osvrnućemo se samo na magiju izračunavanja korena pojedinih brojeva i na magiju rešavanja algebarskih jednačina.

Skup realnih brojeva nije dovoljan da obuhvati veličinu čiji je kvadrat jednak nekom negativnom broju. Tu je situacija slična onoj koja nastupa kada se ustanovi da skup razlomaka ne obuhvata veličinu čiji je kvadrat jednak broju 2, na primer. U oba slučaja se postojeća struktura na konzistentan način proširuje do nove strukture unutar koje postoji rešenje posmatranog problema. U iskušenju smo da pomislimo kako će se ista priča ponoviti pri pokušaju da za neki posebno odabran kompleksni broj odredimo veličinu koja pomnožena sa sobom daje taj broj. Međutim, to se neće desiti. Kakav god kompleksni broj z da izaberemo, uvek postoji kompleksni broj ω tako da je $\omega^2 = z$. U stvari, ako je $z = a + ib$, onda je $\omega^2 = z$ za

$$\omega = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\right).$$

Na primer, za $z = i$ formula daje $\omega = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$. Primetimo da postupak možemo da nastavimo i nađemo $\upsilon \in \mathbb{C}$ za koje je $\upsilon^2 = \omega$.

Dakle, u ovom novom sistemu, skupu kompleksnih brojeva svaki broj ima kvadratni koren (ima ih, u stvari, dva). Ovo je samo početak magije. Umesto kvadratnog korena može se posmatrati ma koji realan koren kompleksnog broja (izuzev nule, kada se posmatra negativan koren). Pri tome se realan koren definiše kao što je to urađeno u skupu realnih brojeva. Štaviše, nakon preciznog uvođenja stepenovanja kompleksnog broja kompleksnim brojem, o čemu se studenti upoznaju na kursevima kompleksne analize, ispostavlja se da je rezultat

[4] U tu svrhu je neophodno poznavanje formule kojom se od date matrice formata 2×2 dobija njoj inverzna matrica.

kompleksnog korenovanja kompleksnog broja takođe kompleksan broj. Prva magija je dakle zatvorenost u odnosu na korenovanje - svojstvo koje nemaju ni racionalni ni realni brojevi.

Korenovanje kompleksnih brojeva imalo je ulogu u konstrukciji pravilnog 17-ostranog poligona (heptadekagon) šestarom i lenjirom koju je dao Gaus 1796. godine.[5]

Druga magija izražava se *fundamentalnom teoremom algebre*:

Teorema 2.5.1. *Svaki kompleksni polinom pozitivnog stepena ima onoliko nula koliki je njegov stepen.*

Dokaz ove teoreme se izostavlja, a zainteresovani čitalac može da ga prouči u, na primer, [2]. U dokazu se koristi: neprekidnost polinoma, Vajerštrasova teorema o neprekidnim funkcijama po kojoj svaka neprekidna funkcija na kompaktnom skupu dostiže svoj infimum, činjenica da za svaki kompleksan broj z postoji njegov $n-$ti koren, to jest $w \in \mathbb{C}$ takav da je $w^n = z$, $n \in \mathbb{N}$ i D'Alamberova lema koja tvrdi da, ako je $P(z)$ polinom i $P(z_0) \neq 0$, onda u svakoj okolini tačke z_0 postoji w tako da važi: $|P(w)| < |P(z_0)|$.

Ekvivalentno tvrđenje glasi:

Teorema 2.5.2. *Svaki nekonstantni polinom sa kompleksnim koeficijentima ima barem jednu nulu u polju kompleksnih brojeva.*

Ova teorema ima dugu istoriju, a konačno je dokazana tokom XIX veka. Direktna posledica fundamentalne teoreme algebre je faktorisanje polinoma na linearne činioce, slično rastavljanju celih brojeva na proste činioce (što se naziva fundamentalnom teoremom aritmetike). Naime, svaki polinom $P_n(z)$ stepena $n \in \mathbb{N}$ se može predstaviti kao proizvod tačno n faktora

$$P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

pri čemu su kompleksni brojevi z_k, $k = 1, 2, \dots, n$ rešenja jednačine $P_n(z) = 0$. Pri tome, neki od brojeva z_k mogu da budu jednaki.

U polju realnih brojeva proizvoljna kvadratna jednačina drugog stepena ne mora da ima rešenja u tom polju, odnosno odgovarajući polinom drugog

[5] Gaus je tada imao 19 godina.

stepena ne mora da ima nule (korene) u skupu $\mathbb{R}$ (faktorizaciju na linearne činioce). Nasuprot tome, u polju kompleksnih brojeva *svaki* polinom stepena n sa kompleksnim koeficijentima ima n korena (jednakih ili različitih) u polju kompleksnih brojeva.

Ars magna sadrži formule za korene polinoma drugog, trećeg i četvrtog stepena. Za polinom petog stepena ne samo da nije postojala odgovarajuća formula u toj knjizi, nego je tek fundamentalnom teoremom algebre dokazana egzistencija korena u polju $\mathbb{C}$, dakle otprilike 3 veka nakon objavljivanja Ars Magne.

Konačno, rezultati teorije grupa impliciraju da se koreni opšte algebarska jednačina stepena $n \geq 5$ ne mogu dobiti formulom pomoću koeficijenata, algebarskih operacija i korenovanja. Ovaj rezultat je poznat u algebri kao Abel – Ruffini teorema koju je Abel dokazao 1823. godine. Nezavisno od Abela, istu teoremu je dokazao Galoa, a objavljena je posthumno 1846. godine, 14 godina nakon njegove smrti.

Čitaocu skrećemo pažnju na filozofski problem. Formula za koren alegebarske jednačine nije pronađena jer nije ni mogla biti pronađena. Potraga za rešenjem nekog problema podrazumeva sasvim drukčiji pristup nego dokazivanje da taj isti problem ne može biti rešen.

2.6 Korenovanje kao višeznačna funkcija

Upoređujući odgovarajuće razvoje u stepeni red, Ojer je 1740-tih godina izveo formulu $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ (formula je objavljena u Ojlerovom udžbeniku 1748. godine).

Iz ove formule sledi da je eksponencijalna funkcija periodična sa periodom $2\pi i$ kao i da je

$$(\cos x + i \sin x)^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prema tome, za zadato $n \in \mathbb{N}$, jednačina $z^n = 1$ ima n različitih rešenja u kompleksnoj ravni:

$$z_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.1}$$

Ove tačke u kompleksnoj ravni leže na jediničnoj kružnici i mogu se intepretirati kao temena pravilnog n-tostranog poligona.

Tako, jednačina $z^n - 1 = 0$ ima n kompleksnih rešenja. Ovo je poseban slučaj fundamentalne teoreme algebre.

Činjenica da jednačina $z^n = \omega$ za zadati broj $\omega \in \mathbb{C}$ i ceo broj $n \geq 2$ ima više rešenja znači da je funkcija $f : \omega \mapsto \omega^{1/n}$ višeznačna. Opštije, stepenovanje kompleksnog broja kompleksnim brojem je višeznačna funkcija, što sledi iz polarne reprezentacije kompleksnog broja i periodičnosti eksponencijalne funkcije. Ovo je u oštrom kontrastu sa stepenovanjem/korenovanjem realnih brojeva. Prema tome, svojstva koja su posledica jedinstvenosti ovih operacija u skupu realnih brojeva (jasno, u slučaju kada su one dobro definisane), u opštem slučaju ne važe za kompleksne brojeve. Tu spadaju na primer formule $(ab)^x = a^x b^x$, $(a^x)^y = a^{xy}$, koje važe kada $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, ali ne važe za sve $a, b, x, y \in \mathbb{C}$.

Na kraju navodimo da se kompleksni brojevi suštinski primenjuju u algebarskoj i analitičkoj teoriji brojeva, realnoj analizi (teoriji brojevnih i stepenih redova, nesvojstvenih integrala,...), teoriji funkcija kompleksne promenljive, kao i u oblastima izvan čiste matematike: teoriji upravljanja, dinamici fluida, elektromagnetizmu, signalnoj analizi, kvantnoj mehanici...

Glava 3

Liouville-ova teorema

Struktura skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ se definiše pomoću razlomaka postupkom koji se naziva *kompletiranje totalno uređenog polja racionalnih brojeva* $\mathbb{Q}$. Kompletiranje je moguće realizovati na različite načine. Na primer, dodavanjem aksiome o supremumu (infimumu) strukturi totalno uređenog polja $\mathbb{Q}$ ili dodavanjem skupu $\mathbb{Q}$ graničnih vrednosti svih Košijevih nizova u $\mathbb{Q}$. U poslednjem poglavlju realni brojevi će se definisati kao Dedekindovi preseci u skupu $\mathbb{Q}$.

Elementi skupa $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nazivaju se iracionalni brojevi, a oni mogu biti algebarski i transcendentni. Broj $x_* \in \mathbb{R}$ je *algebarski broj* ako postoji polinom $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$, sa racionalnim koeficijentima, to jest $a_k \in \mathbb{Q}$ tako da važi

$$P_n(x_*) = 0.$$

Svi razlomci su racionalni brojevi.

Neka je $P_n(x)$ oznaka za polinom stepena n, sa celobrojnim koeficijentima. Realan broj x_* je *algebarski broj reda* n ako je $P_n(x_*) = 0$ i ne postoji polinom manjeg stepena, $P_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $m < n$, takav da je $P_m(x_*) = 0$.

Na primer, $x_* = \sqrt{2}$ je algebarski broj reda 2, a $x_* = \sqrt[3]{2}$ je algebarski broj reda 3.[1] Jasno, ma koji racionalan broj $x_* = p/q$ je algebarski broj reda 1, jer

[1] Da je $\sqrt[3]{2}$ algebarski broj reda 3 nije sasvim jednostavno dokazati. Ta činjenica je u vezi sa klasičnim problemom dupliranja kocke.

je x_* nula polinoma $P_1(x) = qx - p$. Drugim rečima, ako je x_* algebarski broj reda $n > 1$, onda x_* ne pripada skupu $\mathbb{Q}$.

Dokazati da neki realan broj nije algebarski, to jest da je transcndentan često je veoma težak zadatak. Na primer, za sada nije poznato da li je Ojlerova konstantae (3.2) transcendentan broj. Malo lakši zadatak je navesti primer transcendentnog broja. To je tema ovog predavanja u kojem se dokazuje da je broj definisan (konvergentnim) redom $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$ transcendentan. To je rezutat Liouville-a[2] iz 1851. godine, na osnovu prethodno objavljene Liouville-ove teoreme iz 1844. godine.

Na osnovu činjenica iz predmeta "Uvod u analizu", znamo da za svaki iracionalan broj x postoji niz razlomaka $(p_k/q_k)_{k\in\mathbb{N}}$, tako da je

$$x = \lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_k}, \quad \text{pri čemu je} \quad \lim_{k\to\infty} q_k = \infty,$$

odnosno x je granična vrednosti niza $(p_k/q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kada niz imenilaca teži ka beskonačnosti.

Podsetimo se, broj $a \in \mathbb{R}$ je granična vrednost (limes) niza realnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($\lim_{n\to\infty} a_n = a$) ako važi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ (n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon). \tag{3.1}$$

U tom slučaju niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan i konvergira ka a. Niz koji nije konvergentan je divergentan.

Niz realnih brojeva $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži ka beskonačnosti ako za svaki broj $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $b_n > M$ za sve $n \geq n_0$.

Teorema 3.0.1. *(Liouville-ova teorema) Neka je x_* je* algebarski broj reda $n > 1$ *i neka niz $(\frac{p_k}{q_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira ka x_*. Tada za dovoljno velik indeks k važi*

$$\left| x_* - \frac{p_k}{q_k} \right| > \frac{1}{q_k^{n+1}}.$$

[2]Joseph Liouville (1809 – 1882)

Dokaz. Neka je $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ polinom za koji važi $P_n(x_*) = 0$ i $P_m(x_*) \neq 0$ za svaki broj $m \in \mathbb{N}$, $m < n$ i neka je $x_k = p_k/q_k$, $k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$P_n(x_k) = P_n(x_k) - P_n(x_*) = a_1(x_k - x_*) + a_2(x_k^2 - x_*^2) + \cdots + a_n(x_k^n - x_*^n),$$

odakle je

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x_k)}{x_k - x_*} &= a_1 + a_2(x_k + x_*) + a_3(x_k^2 + x_k x_* + x_*^2) + \dots \\ &+ a_n(x_k^{n-1} + x_k^{n-2} x_* + \cdots + x_k x_*^{n-2} + x_*^{n-1}). \end{aligned}$$

Za dovoljno velik indeks k, po definiciji granične vrednosti niza, važi $|x_k - x_*| < 1$, pa je $|x_k| < |x_*| + 1$, odakle sledi

$$\begin{aligned} \left| \frac{P_n(x_k)}{x_k - x_*} \right| &< |a_1| + 2|a_2|(|x_*| + 1) + 3|a_3|(|x_*| + 1)^2 + \cdots + n|a_n|(|x_*| + 1)^{n-1} \\ &= M. \end{aligned}$$

Neka je $x_k = p_k/q_k$ takav da je $q_k > M$. Tada iz

$$\left| \frac{P_n(x_k)}{x_k - x_*} \right| < M < q_k$$

sledi $|x_k - x_*| > |P_n(x_k)|/q_k$. Radi jednostavnijeg zapisa, za taj broj x_k uvodi se oznaka $x_k = p/q$.

Jasno, $P_n(p/q) \neq 0$, jer bi u suprotnom bilo

$$P_n(x) = \left(x - \frac{p}{q} \right) P_{n-1}(x)$$

za neki polinom stepena $n - 1$. Odavde je

$$0 = P_n(x_*) = \left(x_* - \frac{p}{q} \right) P_{n-1}(x_*),$$

pa je x_* algebarski broj reda (najviše) $n - 1$, što je u suprotnosti sa uslovom zadatka.

Dakle, $P_n(p/q) \neq 0$ pa je

$$\begin{aligned}\left|P_n\left(\frac{p}{q}\right)\right| &= \left|a_0 + a_1\frac{p}{q} + \cdots + a_n\frac{p^n}{q^n}\right| \\ &= \frac{1}{q^n}\left|a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \cdots + a_nq^n\right| \neq 0.\end{aligned}$$

Odavde je $\left|a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \cdots + a_nq^n\right| \geq 1$, jer su svi sabirci celi brojevi.

Prema tome, iz $|x_k - x_*| > |P_n(x_k)|/q_k$ sledi

$$\left|x_* - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q}\left|P_n\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q}\frac{1}{q^n} = \frac{1}{q^{n+1}},$$

čime je teorema dokazana. □

3.1 Posledice Liouville-ove teoreme

Liouville je dokazao da je $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$ transcendentan broj na sledeći način. Neka je

$$x_m = \sum_{k=1}^{m} 10^{-k!} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^{2!}} + \cdots + \frac{1}{10^{m!}} = \frac{p}{10^{m!}},$$

za odgovarajući broj $p \in \mathbb{N}$, pri čemu će se m naknadno odrediti.

Tada je, sa jedne strane,

$$\begin{aligned}|x - x_m| &= \sum_{n=m+1}^{\infty} 10^{-n!} \\ &= \frac{1}{10^{(m+1)!}} + \frac{1}{10^{(m+2)!}} + \ldots \\ &= \frac{1}{10^{(m+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10^{(m+2)}} + \frac{1}{10^{(m+3)(m+2)}} + \ldots\right) \\ &< \frac{1}{10^{(m+1)!}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\right) \\ &= \frac{2}{10^{(m+1)!}} = \frac{10}{10^{(m+1)!}},\end{aligned}$$

a sa druge strane, iz Liouville-ove teoreme sledi

$$|x - x_m| > \frac{1}{10^{(n+1)m!}}$$

za dovoljno velik broj $m \in \mathbb{N}$.

Dakle,

$$\frac{10}{10^{(m+1)!}} > |x - x_m| > \frac{1}{10^{(n+1)m!}},$$

odakle je

$$(n+1)m! > (m+1)! - 1.$$

Neka je $m = n + 1$ za zadati broj n (algebarski red broja x). Tada je

$$\begin{aligned} (n+1)(n+1)! &> (n+2)! - 1 = (n+1+1)\cdot(n+1)! - 1 \\ &\Leftrightarrow (n+1)(n+1)! > (n+1)(n+1)! + (n+1)! - 1 \\ &\Leftrightarrow 1 > (n+1)!, \end{aligned}$$

što nije moguće. Dakle, ne postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x_* = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$ algebarski broj reda n, odnosno ne postoji polinom $P_n(x)$ koji se anulira u x_*. Drugim rečima, x_* je *transcendentan broj*.

Navedeni primer pokazuje kako se mogu konstruisati transcendentni brojevi uz pomoć Liouville-ove teoreme.

Nasuprot tome, da se dokaže da je neki konkretan broj transcendentan nije jednostavan zadatak. Tako je, na primer, Charles Hermite dokazao da je e transcendentan broj 1873. godine, a 1882. godine je Ferdinand von Lindemann dokazao da je π transcendentan broj. Lindemann je najpre dokazao da je broj e^a transcendentan kada je a algebarski broj različit od nule. S obzirom da je $e^{i\pi} = -1$ algebarski broj (ovo je poznata Euler-ova formula objavljena 1748. godine), sledi da je $i\pi$, a samim tim i π transcendentan broj.

Broj e^{π} je transcendentan, što znači da je Lindemann-ov uslov dovoljan, ali ne i potreban. U trenutku pisanja ovog teksta nije poznato da li je π^e transcendentan broj, a veruje se da jeste.

Posledica činjenice da je π transcendentan broj je rešenje problema kvadrature kruga, odnosno konstrukcije kvadrata (uz pomoć šestara i lenjira) koji ima površinu jednaku površini zadatog kruga. Lindemann-ov dokaz za posledicu ima nemogućnost takve konstrukcije, s obzirom da se transendentni brojevi ne mogu konstruisati uz pomoć šetara i lenjira konačnim brojem poteza.

1734. godine Euler je definisao broj

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right), \tag{3.2}$$

koji je poznat pod nazivom Euler-ova konstanta.[3] U trenutku pisanja ovog teksta nije poznato da li je γ algebarski ili transcendentan broj. Čak nije poznato ni da li je taj broj racionalan.

George Cantor je 1874. godine dokazao da je skup algebarskih brojeva prebrojiv (to jest da postoji bijektivno preslikavanje iymeđu tog skupa i skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. S obzirom da je skup svih realnih brojeva neprebrojiv, sledi da je skup transcendentnih brojeva neprebrojiv. Drugim rečima, *skoro svi* realni brojevi su transcendentni. Preciziranje ove činjenice prevazilazi okvire ovog kursa.

U sledećem predavanju će se dokazati da za svaki iracionalan broj α postoji razlomak p/q tako da važi $|\alpha - p/q| < 1/q^2$. U stvari, postoji beskonačno mnogo takvih razlomaka. U tu svrhu koristićemo *Dirihleov princip*, jedan od osnovnih kombinatornih principa.

3.2 Neprekidni razlomci

Liouville je u radu iz 1844. godine naveo primere transcendentnih brojeva koji su predstavljeni u vidu neprekidnih razlomaka. Podsetimo se, *regularan neprekidni razlomak* je izraz oblika

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \dots}}}},$$

[3]Pojedini izvori ovaj broj nazivaju Euler–Mascheroni konstantna. Oznaka γ je uvedena 1835. godine.

za neke (cele) brojeve $a, b, c, d, e, \ldots$, pri čemu je dozvoljeno beskonačno mnogo sabiranja. Jasno, ako je broj sabiraka konačan, neprekidni razlomak je racionalan broj.

U Bombelijevoj Algebri (iz 1572. godine) naveden je beskonačni razlomak jednak sa $\sqrt{2}$. Naime, kako je $\sqrt{2}$ rešenje jednačine

$$x = 1 + \frac{1}{1+x},$$

dobija se

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\ldots}}}.$$

Za algebarske brojeve $\sqrt{3}$ i $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ važi:

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\ldots}}}, \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\ldots}}},$$

a za transcendentne brojeve e i π važi:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{6+\ldots}}}}}}}}, \quad \pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{292+\frac{1}{1+\ldots}}}}},$$

Ako je zadat neprekidan razlomak, najpre se postavlja pitanje da li on predstavlja neki realan broj, odnosno da li konvergira. U slučaju konvergencije, postavlja se pitanje da li je granična vrednost niza definisanog neprekidnim razlomkom racionalan ili iracionalan broj.

Koristeći neprekidne razlomke, Euler je 1737. godine dokazao da e nije racionalan broj.[4] Da je broj π iracionalan dokazao je Lambert u radu objavljenom

[4] Rezultat je objavljen 1744. godine.

1768. godine.

Bez dokaza navodimo teoremu koja daje dovoljan uslov za iracionalnost nekog neprekidnog razlomka.

Teorema 3.2.1. *Neka je dat neprekidni razlomak*

$$q_0 + \cfrac{p_1}{q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \cfrac{p_3}{q_3 + \cfrac{p_4}{q_4 + \dots}}}}, \tag{3.3}$$

gde su p_j, q_j, $j = 0, 1, 2, \dots$, *celi brojevi. Broj* (3.3) *je iracionalan broj ako važi jedan od sledećih uslova:*

1) $0 \leq p_j \leq q_j$;

2) $2|p_j| \leq q_j - 1$;

počev od nekog indeksa $j \geq j_0$.

Na osnovu Teoreme 3.2.1 Lambert je dokazao da je vrednost $\tan x$ iracionalan broj za svaki racionalan broj $x \neq 0$. Neprekidni razlomak koji odgovara tangensnoj funkciji je

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \dots}}}}} = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} - \cfrac{1}{\frac{5}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{x} - \dots}}}}.$$

Kada je $x = m/n$, dobija se

$$\tan \frac{m}{n} = \cfrac{m/n}{1 - \cfrac{m^2/n^2}{3 - \cfrac{m^2/n^2}{5 - \cfrac{m^2/n^2}{7 - \cfrac{m^2/n^2}{9 - \dots}}}}} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \dots}}}}.$$

S obzirom da činioci $k = 1, 3, 5, 7, \ldots$ teže ka beskonačnosti, uslov 2) Teoreme 3.2.1, to jest

$$2|-m^2| \leq k \cdot n - 1,$$

važi za sve $k \geq k_0$ (pri čemu k_0 zavisi od m i n).

Isti zaključak važi i za funkciju $\arctan y$. Naime, ako je y racionalan broj, onda $x = \arctan y$ mora biti iracionalan, jer bi, u suprotnom $y = \tan x$ bio iracionalan broj. Posebno, ako je $y = 1$, sledi da je $\pi = 4 \arctan 1$ iracionalan broj.

Može se pokazati da za hiperbolični tangens važi

$$\tanh x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{7 + \cfrac{x^2}{9 + \ldots}}}}}.$$

Kako je $e^{2x} = (1 + \tanh x)/(1 - \tanh x)$, zaključuje se da je e^x iracionalan broj za racionalne brojeve $x \neq 0$. Takođje, $\ln x$ je iracionalan broj za racionalne brojeve $x \neq 1$.

Glava 4

Dirichlet-ova teorema

U ovom predavanju se koristi Dirihleov princip, jedan od osnovnih principa kombinatorike. Predmet kombinatorike je, grubo govoreći, prebrajanje svih mogućih rasporeda nekih objekata ili odredjivanje broja svih mogućih načina na koje se mogu izvršiti izvesne aktivnosti. Prema tome, kombinatorne ideje i postupci imaju izuzetan značaj u matematici.

Smatra se da su poznati pojmovi injektivnog, sirjektivnog i bijektivnog preslikavanja kao i pojam *skupa*. Podsetimo se, skup se opisuje nekim svojstvom koje poseduju njegovi elementi: $A = \{x \mid P(x)\}$. Takodje smatra se da su poznati pojmovi unije, preseka i razlike dva skupa. U slučaju $A \subset X$, *komplement skupa* A u X, u oznaci A^c čine elementi skupa X koji ne pripadaju skupu A.

Neprazni skupovi A i B su *ekvipotentni* ako postoji bijektivno preslikavanje izmedju njih. U tom slučaju se koristi oznaka $A \sim B$ i lako se dokazuje da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije kojoj pripada skup A je *kardinalni broj* skupa A, u oznaci $cardA$.

Za konačne skupove, kardinalni broj se identifikuje/poistovećuje sa brojem elemenata tog skupa.

Neka skup A ima n elemenata, $|A| = n$, a skup B neka ima m elemenata, $|B| = m$. Posmatramo funkciju $f : A \to B$. Važi:

a) f može da bude injekcija ako i samo ako je $n \leq m$;

b) f može da bude sirjekcija ako i samo ako je $n \geq m$.

Odavde sledi princip bijekcije: *Dva neprazna skupa su iste kardinalnosti ako i samo ako postoji bijekcija izmedju njih.*

Poenta ovog principa je da je moguće utvrditi $|A| = |B|$ bez odredjivanja njihove kardinalnosti.

Kao primer primene principa bijekcije lako se dokazuje sledeće tvrđenje.

Teorema 4.0.2. *Neka je A skup kardinalnosti n, to jest $|A| = n$ i neka je $\mathcal{P}(A)$ partitivni skup skupa A (skup kojeg čine svi podskupovi skupa A). Tada je $card\, \mathcal{P}(A) = |\mathcal{P}(A)| = 2^n$.*

Dokaz. U dokazu se, osim principa bijekcije, koristi i pravilo proizvoda koje za skupove A i B. Ako je $|A| = n$ i $|B| = m$, onda pravilo (princip) proizvoda glasi: broj različitih načina da se formira uredjeni par (a, b) tako da je $a \in A$, $b \in B$, jednak je $n \cdot m$, odnosno $|A \times B| = n \cdot m$. Ovo pravilo se jednostavno proširuje na konačan broj skupova konačne kardinalnosti.

Dokažimo sada da je $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ ako je $|A| = n$. Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Posmatra se skup X uredjenih $n-$torki sastavljenih od cifara 0 i 1. S obzirom da svaka komponenta može da bude nula ili jedinica iz pravila proizvoda sledi $|X| = 2^n$. U nastavku se definiše bijekcija izmedju skupa X i $\mathcal{P}(A)$.

Neka je $B \subset A$ i neka je $f : \mathcal{P}(A) \to X$ definisana na sledeći način: $f(B) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ gde je $\alpha_k = 1$ ako $a_k \in B$, a $\alpha_k = 0$ ako $a_k \notin B$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Jasno, f je bijekcija čime je tvrdjenje dokazano. □

Pretpostavimo sada da su A i B disjunktni. Princip ili pravilo zbira glasi: broj različitih načina da se iz unije disjunktnih skupova izabere jedan element jednak je $n + m$, odnosno

$$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow |A \cup B| = n + m.$$

Činjenica da iz $|A| > |B|$ (za konačne skupove A i B) sledi da ne postoji injektivno preslikavanje iz skupa A u skup B se naziva *Dirihleov princip*. Popularna formulacija ovog principa glasi: Ako je $n + 1$ golub smešten u n kaveza, onda se u jednom od tih kaveza nalaze barem dva goluba.

Poznato je da se svaki realan broj može aproksimirati nekim racionalnim brojem sa proizvoljnom preciznošću. Ovo svojstvo se ponekad naziva *gustinom* skupa $\mathbb{Q}$ u skupu $\mathbb{R}$.

U dokazu sledećeg tvrdjenja, Dirihleove teoreme o aproksimaciji, koristi se Dirihleov princip.

Teorema 4.0.3. *Neka je α proizvoljan iracionalan broj. Tada za svaki prirodan broj $n \geq 2$ postoje $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$, $q < n$ tako da važi:*

$$|q\alpha - p| \leq \frac{1}{n}.$$

Primetimo da teorema važi i u slučaju da je α proizvoljan realan broj.

Dokaz. Podsetimo se definicije funkcije "najveći ceo deo": $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ je definisana sa $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ako i samo ako je $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Dakle, za zadato $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ važi $\alpha \in (\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor \alpha \rfloor + 1)$. Odavde sledi da, kada je $n = 2$ za $q = 1$ i $p = \lfloor \alpha \rfloor$ ili $p = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ važi: $|\alpha - p| \leq \frac{1}{2}$.

Neka je $n \geq 3$. Posmatrajmo skup

$$A = \{0, 1, \alpha - p_1, 2\alpha - p_2, \ldots, (n-1)\alpha - p_{n-1}\},$$

gde je $p_k = \lfloor k\alpha \rfloor$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Dakle,

$$A = \{0, 1\} \cup \{k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Primetimo da $k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor$ nije racionalan broj ni za jedno $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Neka je

$$B = \left\{ \left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right], \ldots \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] \right\}.$$

Iz $cardB = |B| = n$, $cardA = |A| = n-1$,i $A \subset [0,1]$, na osnovu Dirihleovog principa sledi da preslikavanje koje svakom broju (elementu skupa A) dodeljuje interval (element skupa B) kojem taj broj pripada nije injektivno. Drugim rečima, postoji barem jedan element skupa B koji sadrži barem dva elementa skupa A.

Ako je taj interval $[0, \frac{1}{n}]$ i ako je jedan od tih elemenata jednak nuli, a drugi $k\alpha - p_k$ za neko $k = 1, 2, \dots, n-1$, onda tvrdjenje sledi za $q = k$ i za $p = p_k$.

Ako je taj interval $[\frac{n-1}{n}, 1]$ i ako je jedan od tih elemenata jednak jedinici, a drugi $k\alpha - p_k$ za neko $k = 1, 2, \dots, n-1$, onda tvrdjenje sledi za $q = k$ i za $p = p_k + 1$.

U svim ostalim slučajevima, u nekom od intervala, elemenata skupa B, postoje barem dva broja oblika: $k\alpha - p_k$ i $l\alpha - p_l$ za neke $k, l = 1, 2, \dots, n-1$, pri čemu je, na primer, $1 \leq k < l \leq n-1$. Tada je

$$|l\alpha - p_l - (k\alpha - p_k)| = |(l-k)\alpha - (p_l - p_k)| < 1/n,$$

pa tvrdjenje teoreme važi za $q = l - k < n - 1$ i $p = p_l - p_k$. $\square$

Direktna posledica Dirihleove teoreme je da za proizvoljan iracionalan broj α postoji racionalan broj p/q, $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$, $q < n$ tako da važi:

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{qn}.$$

Iz $q \in \mathbb{N}$, $q < n$, sledi:

Posledica 4.0.4. *Neka je α proizvoljan iracionalan broj. Tada postoji racionalan broj p/q tako da važi:*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}. \tag{4.1}$$

Napomena 4.0.5. *Na primer, za $\alpha = \pi$ i $n = 150$, sigurno postoji razlomak p/q čiji je imenilac q manji od 150 i $|\pi - p/q| < 1/150q$. U V veku je kineski matematičar Zu Chongzhi aproksimirao π sa 355/113. Ovaj razlomak aproksimira broj π sa tačnošću većom od 10^{-6}. Primetimo da Dirihleova teorema procenjuje ovu razliku sa*

$$|\pi - 355/113| < 1/16950 < 0,0000589971.$$

Sledeći razlomak koji preciznije aproksimira π je $52163/16604$, koji još uvek daje tačnost na 6 decimalnih mesta. Sedam decimalnih mesta broja π daje $86953/27678$, a osam $102928/32763$.

Navedimo još jednu posledicu Dirihleove teoreme.

Teorema 4.0.6. *Neka je α proizvoljan iracionalan broj. Tada postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva p/q za koje važi* (4.1).

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. To znači da postoji konačno mnogo razlomaka $\frac{p_k}{q_k}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ za koje važi (4.1). Pošto je α iracionalan, sledi da je

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

pa postoji indeks $k_0 \in \{1, 2, \ldots, m\}$ za koji je

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \geq \left|\alpha - \frac{p_{k_0}}{q_{k_0}}\right| = \varepsilon > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Na osnovu posledice Arhimedovog principa[1] sledi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da važi:

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \geq \varepsilon > \frac{1}{n_0}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Na osnovu Dirihleove teoreme za ovako izabran broj n_0 postoji racionalan broj p/q, $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$, $q < n$, za koji važi:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{qn_0} < \frac{1}{q^2},$$

pa je $\frac{p}{q} = \frac{p_l}{q_l}$ za neki indeks $l \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Ovo je kontradikcija sa izborom broja n_0, jer iz $\frac{1}{qn_0} \leq \frac{1}{n_0}$ sledi

$$\left|\alpha - \frac{p_l}{q_l}\right| \leq \frac{1}{qn_0} \leq \frac{1}{n_0}.$$

Tvrđenje je dokazano. □

Napomena 4.0.7. *Važi i obratno tvrdjenje koje ovde nećemo dokazivati, to jest može se dokazati da je α iracionalan broj ako i samo ako postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva p/q za koje važi* (4.1), *videti [18].*

[1] Podsetimo se, grupa $(G, +, \leq)$ sa linearnim uređenjem $\leq$ ima Arhimedovsko svojstvo ako za svaka njena elementa x, y postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $y < nx$.

Glava 5

Teorema Kantor-Šreder-Bernštajn

Podsetimo se, neprazni skupovi A i B su *ekvipotentni* ako postoji bijektivno preslikavanje izmedju njih. U tom slučaju se koristi oznaka $A \sim B$ i lako se dokazuje da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije kojoj pripada skup A je *kardinalni broj* skupa A, u oznaci $cardA$.

Neka je $cardA = n$ i $cardB = m$, $n, m \in \mathbb{N}$. Preslikavanje $f : A \to B$ može da bude injektivno ako i samo ako je $n \leq m$, a sirjektivno ako i samo ako je $n \geq m$. Odavde sledi da, ako postoje injektivna preslikavanja $f : A \to B$ i $g : B \to A$, onda je $n = m$, pa postoji bijekcija izmedju A i B.

Ova činjenica nije očigledna za skupove proizvoljne kardinalnosti. O tome govori teorema Kantor - Šreder - Bernštajna. Teorema je dokazana u periodu 1887. - 1897. godine.[1]

Teorema 5.0.8. *Dati su neprazni skupovi A i B. Ako postoji injektivno preslikavanje $f : A \to B$ i injektivno preslikavanje $g : B \to A$, onda postoji bijekcija izmedju skupova A i B.*

[1] Istorijat ove teoreme se može pročitati na: http://en.wikipedia.org/wiki/Schröder-Bernstein_theorem

Dokaz. Bez ograničenja se pretpostavlja da je $A \cap B = \emptyset$. Skup slika preslikavanja f je $f(A) \subset B$, a skup slika preslikavanja g je $g(B) \subset A$.

Primetimo da iz $A \backslash g(B) = \emptyset$ sledi da je g bijekcija, pa se tu dokaz završava. Slično, iz $B \setminus f(A) = \emptyset$ sledi da je f bijekcija. Stoga se pretpostavlja da važi $A \setminus g(B) \neq \emptyset$ i $B \setminus f(A) \neq \emptyset$.

Injektivnost preslikavanja f i g omogućava primenu tehnike koju nazivamo "guraj-vuci".

1. korak: "Guranje unapred"[2]

Svaki element $a \in A$ "guramo unapred" tako što mu pridružujemo jedinstveno odredjen niz $\{x_n(a)\} \subset A \cup B$ definisan sa:

$$x_1(a) = a,\ x_2(a) = f(a),\ x_3(a) = g(f(a)),\ x_4(a) = f(g(f(a))), \ldots$$

Primetimo da $x_m(a) \in A$ ako i samo ako je m neparan broj, a $x_m(a) \in B$ ako i samo ako je m paran broj.

Svaki element niza $\{x_n(a)\}$ je *sledbenik* elementa a, izuzev $x_1(a)$ (ako je $x_1(a) \neq x_n(a)$, $\forall n > 1$).

Takodje, ako je $x_m(a) \in \{x_n(a)\}$, *prethodnici* elementa $x_m(a)$ su članovi niza $x_k(a)$, $k = 1, 2, \ldots, m-1, m$.

Može da se desi da je $a = x_m(a)$ za neki (neparan) prirodan broj $m > 1$, pa je takav niz *periodičan* i $x_1(a) = x_m(a)$ je tako *sledbenik* elementa $x_{m-1}(a)$. Svaki element periodičnog niza se u njemu pojavljuje beskonačno mnogo puta, pa je lista njegovih prethodnika beskonačna.

Na sličan način se i svaki element $b \in B$ "gura unapred" pomoću jedinstveno odredjenog niza $\{y_n(b)\} \subset A \cup B$:

$$y_1(b) = b, y_2(b) = g(b), y_3(b) = f(g(b)), y_4(b) = g(f(g(b))), \ldots.$$

2. korak: U ovom koraku se svaki element skupa $A \cup B$ "vuče unazad".[3] Neka je a proizvoljan element skupa A. Formira se jedinstvena *lista prethodnika* elementa $a \in A$ na sledeći način. Ako $a \in A \setminus g(B)$, on je jedini element te

[2] engl. push forward

[3] engl. pull back

liste (i sam je svoj prethodnik). U suprotnom slučaju, dobija se lista njegovih prethodnika:

$$a,\ g^{-1}(a),\ f^{-1}(g^{-1}(a)),\ g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(a))), \ldots,$$

koja može biti konačna ili beskonačna.

Dakle, moguć je tačno jedan od sledeća tri slučaja:

a) Lista prethodnika elementa $a \in A$ je konačna i poslednji element te liste pripada skupu A.

b) Lista prethodnika elementa $a \in A$ je konačna i poslednji element te liste pripada skupu B.

c) Lista prethodnika elementa $a \in A$ je beskonačna.

U slučaju a) to znači da postoji $\tilde{a} \in A$ i niz $\{x_n(\tilde{a})\}$ tako da postoji (neparan) broj $m \in \mathbb{N}$ za koji važi:

$$\tilde{a} = x_1(\tilde{a}),\ f(\tilde{a}) = x_2(\tilde{a}),\ g(f(\tilde{a})) = x_3(\tilde{a}),$$

$$f(g(f(\tilde{a}))) = x_4(\tilde{a}), \ldots,\ a = x_m(\tilde{a})$$

i, pri tome, $\tilde{a} \in A \setminus g(B)$. Kažemo još da a vodi poreklo iz skupa A.

U slučaju b) to znači da postoji $b \in B$ i niz $\{y_n(b)\}$ tako da postoji (paran) broj $m \in \mathbb{N}$ za koji važi:

$$b = y_1(b),\ g(b) = y_2(b),\ f(g(b)) = y_3(b),$$

$$g(f(g(b))) = y_4(b), \ldots,\ a = y_m(b)$$

i, pri tome, $b \in B \setminus f(A)$. Tada a vodi poreklo iz skupa B.

Na sličan način se formira lista prethodnika proizvoljnog elementa $b \in B$, a moguć je tačno jedan od sledeća tri slučaja:

d) Lista prethodnika elementa $b \in B$ je konačna i poslednji element te liste pripada skupu B.

e) Lista prethodnika elementa $b \in B$ je konačna i poslednji element te liste pripada skupu A.

f) Lista prethodnika elementa $b \in B$ je beskonačna.

U slučaju d) to znači da postoji $a \in A$ i niz $\{x_n(a)\}$ tako da postoji (paran) broj $m \in \mathbb{N}$ za koji važi:

$$a = x_1(a),\ f(a) = x_2(a),\ g(f(a)) = x_3(a),$$

$$f(g(f(a))) = x_4(a), \ldots,\ b = x_m(a)$$

i, pri tome, $a \in A \setminus g(B)$.

U slučaju e) to znači da postoji $\tilde{b} \in B$ i niz $\{y_n(\tilde{b})\}$ tako da postoji (neparan) broj $m \in \mathbb{N}$ za koji važi:

$$\tilde{b} = y_1(\tilde{b}),\ g(\tilde{b}) = y_2(\tilde{b}),\ f(g(\tilde{b})) = y_3(\tilde{b}),$$

$$g(f(g(\tilde{b}))) = y_4(\tilde{b}), \ldots,\ b = y_m(\tilde{b})$$

i, pri tome, $\tilde{b} \in B \setminus f(A)$.

3. korak: Uvodimo skupove $A_A, A_B, A_\infty, B_A, B_B,$ i B_∞, pomoću pojma sledbenika:

$$\begin{aligned}
A_A &= \{a \in A \setminus g(B)\} \cup \{a \in A \mid a \text{ je sledbenik} \\
&\quad \text{nekog elementa skupa } A \setminus g(B)\},\\
A_B &= \{a \in A \mid a \text{ je sledbenik nekog elementa skupa } B \setminus f(A)\},\\
A_\infty &= A \setminus (A_A \cup A_B),\\
B_B &= \{b \in B \setminus f(A)\} \cup \{b \in B \mid b \text{ je sledbenik} \\
&\quad \text{nekog elementa skupa } B \setminus f(A)\},\\
B_A &= \{b \in B \mid b \text{ je sledbenik nekog elementa skupa } A \setminus g(B)\},\\
B_\infty &= B \setminus (B_A \cup B_B).
\end{aligned}$$

Važi:

✓ $a \in A_A$ ako i samo ako važi a) prethodnog koraka.

- ✓ $a \in A_B$ ako i samo ako važi b) prethodnog koraka.
- ✓ $a \in A_\infty$ ako i samo ako važi c) prethodnog koraka.
- ✓ $b \in B_B$ ako i samo ako važi d) prethodnog koraka.
- ✓ $b \in B_A$ ako i samo ako važi e) prethodnog koraka.
- ✓ $b \in B_\infty$ ako i samo ako važi f) prethodnog koraka.

Na ovaj način je izvršena particija skupova A i B, to jest skup A je disjunktna unija skupova A_A, A_B i A_∞:

$$A = A_A \sqcup A_B \sqcup A_\infty,$$

a skup B je disjunktna unija skupova B_A, B_B i B_∞:

$$B = B_A \sqcup B_B \sqcup B_\infty.$$

4. korak: Podsetimo se, za preslikavanje $f : A \to B$, *restrikcija* tog preslikavanja na skup $C \subset A$ je preslikavanje $f|_C : C \to B_A$ definisano sa $f|_C(c) = f(c)$ za svaki element $c \in C$.

Posmatramo restrikcije preslikavanja f na skupove A_A i A_∞ i preslikavanja g^{-1} na skup A_B.

Tvrdimo da su tako definisana preslikavanja bijekcije:

$$f|_{A_A} : A_A \to B_A\ , \quad g^{-1}|_{A_B} : A_B \to B_B\ , \quad f|_{A_\infty} : A_\infty \to B_\infty\ .$$

Najpre, $f|_{A_A} : A_A \to B_A$ je injektivno preslikavanje jer je f injektivno presliklavanje. Svaki element $a \in A_A$ vodi poreklo iz skupa A odakle sledi da $f(a)$ takodje vodi poreklo iz skupa A, odnosno $f(a) \in B_A$. Dakle, preslikavanje je dobro definisano i injektivno. Preostaje da se dokaže da je $f|_{A_A} : A_A \to B_A$ sirjekcija.

Neka je $b \in B_A$. Na osnovu e) postoji $\tilde{a} \in A \setminus g(B)$ tako da je b element niza koji je nastao "guranjem unapred" elementa $\tilde{a}$. Prema tome, postoji $a \in A$ tako da je $f(a) = b$. Pošto b vodi poreklo iz skupa A, to važi i za a, odnosno $a \in A_A$, odakle sledi da je $f|_{A_A}$ sirjekcija.

Čitaocu ostavljamo za vežbu da dokaže da je $f\,|_{A_\infty} : A_\infty \to B_\infty$ dobro definisano preslikavanje koje je bijekcija.

Posmatrajmo sada $g^{-1}\,|_{A_B} : A_B \to B_B$. Jasno, g^{-1} je injektivno preslikavanje definisano na $g(B)$. Ako $a \in A_B$, to znači da je a barem jednom "povučen unazad", to jest $A_B \subset g(B)$. Takodje, $b \in B$ za koje je $g(b) = a$ vodi poreklo od istog elementa $\tilde{b} \in B$ od kojeg vodi poreklo i element a, odakle sledi da je $g^{-1}\,|_{A_B} : A_B \to B_B$ dobro definisano preslikavanje. Preostaje da se dokaže da je to preslikavanje sirjektivno.

Neka $b \in B_B$ i neka je $a \in g(B)$ element skupa A za koji važi $g(b) = a$, to jest $g^{-1}(a) = b$. Pošto b vodi poreklo iz skupa B, to važi i za a, odnosno $a \in A_B$.

5. korak: Na osnovu prethodnih razmatranja sledi da je funkcija $h : A \to B$ definisana sa:

$$h(x) = \begin{cases} f(a), & \text{ako } a \in A_A, \\ g^{-1}(a), & \text{ako } a \in A_B, \\ f(a), & \text{ako } a \in A_\infty, \end{cases}$$

bijekcija, čime je teorema dokazana. □

Primer 5.0.9. *Neka je $A = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ i $B = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Jasno, $g : B \to A$ definisano sa $g(b) = (b, 0) \in (0,1) \times (0,1)$ je injektivno preslikavanje.*

Neka $(x, y) \in (0,1) \times (0,1)$, i neka je jedinstveni decimalni zapis[4] tih brojeva dat sa

$$x = 0, x_1x_2x_3x_4x_5x_6\ldots, \quad y = 0, y_1y_2y_3y_4y_5y_6\ldots.$$

Preslikavanje $f : (0,1) \times (0,1) \to (0,1)$ definisano sa

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0, x_1x_2x_3x_4x_5x_6\ldots \;,\; 0, y_1y_2y_3y_4y_5y_6) \\ &= 0, x_1y_1x_2y_2x_3y_3x_4y_4\ldots \end{aligned}$$

je injektivno preslikavanje.

Na osnovu teoreme Kantor-Šreder-Bernštajn sledi

$$card((0,1) \times (0,1)) = card(0,1).$$

[4] uz uobičajenu intepretaciju brojeva koji se završavaju beskonačnim nizom devetki

Ovo znači da postoji bijekcija između duži i kvadrata.

Primer 5.0.10. *Neka je $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ partitivni skup skupa $\mathbb{N}$. Iz $card\mathbb{N} = card\mathbb{Q}$ sledi $card\mathcal{P}(\mathbb{N}) = card\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, pa postoji bijekcija $B : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.*

Preslikavanje $g : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ dato sa

$$g(x) = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

je injektivno, pa je i preslikavanje $B \circ g(x) = B(g(x))$ injektivno preslikavanje između $\mathbb{R}$ i $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Neka je $A \subset \mathbb{N}$, odnosno $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Preslikavanje

$$f(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{10^{n+1}} \in \mathbb{R} \quad (f(A) = 0,1 \quad \text{ako je} \quad A = \emptyset),$$

je injektivno preslikavanje iz $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ u $\mathbb{R}$.

Zaključak: skupovi $\mathbb{R}$ i $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ su iste kardinalnosti, odnosno podskupova skupa $\mathbb{N}$ ima neprebrojivo (kontinuum) mnogo.

Glava 6

Kantorov skup

Na prethodnom predavanju je dokazano da je $card\mathcal{P}(\mathbb{N}) = card\mathbb{R}$. Injektivno preslikavanje iz $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ u $\mathbb{R}$ koje se tom prilikom posmatralo je polazna osnova za sledeću primedbu.

Neka je $X = \{x = x_1x_2x_3x_4\ldots \mid x_j \in \{0,1\}, \quad j \in \mathbb{N}\}$. Dakle svaki element iz X je jedan niz cifara iz skupa $\{0,1\}$.

Neka je $A \subset \mathbb{N}$, odnosno $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Neka je $x \in X$ definisan na sledeći način: $x_n = 1$ ako $n \in A$, a $x_n = 0$ ako $n \notin A$. Time se definiše preslikavanje

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to X, \quad f(A) = x_1x_2x_3x_4\cdots \in X.$$

Lako se vidi da je f injektivno preslikavanje iz $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ u X.

Sa druge strane, preslikavanje $g : X \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definisano sa

$$g(x) = A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = 1\}$$

je injektivno preslikavanje iz X u $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Na osnovu teoreme Kantor-Šreder-Bernštajn sledi da je $card\mathcal{P}(\mathbb{N}) = cardX$, odnosno kardinalnost skupa svih nizova čiji su članovi nule i jedinice jednaka je sa $card\mathbb{R}$, jer je $card\mathcal{P}(\mathbb{N}) = card\mathbb{R}$. Ovu činjenicu ćemo koristiti u nastavku.

6.1 Kantorov skup: ternarni zapis

U nastavku se najpre komentariše decimalna i ternarna reprezentacija realnih brojeva. Pri tome se koriste neka svojstva graničnih vrednosti brojnih nizova.

U decimalnoj reprezentaciji realnog broja koristi se deset cifara,

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

kako bi se zapisao bilo koji realni broj. Za takav zapis je neophodno utvrditi jedinstvenost reprezentacije, odnosno odgovoriti na pitanje da li svakom realnom broju odgovara tačno jedan decimalni zapis i obratno. Tu, međutim, postoji jedna iznimna situacija u slučaju racionalnih brojeva. Naime, decimalni zapis racionalnog broja se, nakon decimalnog zareza, završava ili konačnim nizom brojeva (različitih od nule) ili se nakon izvesnog decimalnog mesta jedna ili više cifara periodično ponavljaju.

Radi jednostavnosti, posmatraće se brojevi jediničnog intervala $[0, 1]$.

Najpre, svakom broju p/q, $0 \leq p < q$, se dodeljuje niz cifara deljenjem brojioca imeniocem:

$$\frac{p}{q} = p : q = 0, x_1x_2x_3x_4 \ldots$$

Pri tome, ako je zapis konačan, onda se nakon poslednje cifre dopisuje beskonačno mnogo nula, pa se svaki racionalan broj iz intervala $[0, 1)$ zapisuje sa beskonačnim nizom cifara.

Neka je $\frac{p}{q} = 0, x_1x_2x_3x_4 \ldots x_{n-1}x_n0000000$, gde je $x_n \neq 0$. Dokažimo da je tada $\frac{p}{q} = 0, x_1x_2x_3x_4 \ldots x_{n-1}y_n999999\dot{9}$, gde $\dot{9}$ označava beskonačno mnogo devetki u nizu, i gde je $y_n \neq 9$, $y_n = x_n - 1$.

Za dokaz će se, radi jednostavnosti, posmatrati specijalni slučaj brojeva $0, 1$ i $0, 0\dot{9}$, jer je opšti slučaj komplikovaniji za zapisivanje, a ideja dokaza je ista. Treba, dakle dokazati da je $|0, 1 - 0, 0\dot{9}| = 0$. U tu svrhu formira se niz brojeva

$$0, 09 \ , \ 0, 099 \ , \ 0, 0999 \ , \ 0, 09999 \ , \ldots,$$

odnosno $x_n = 0,0\underbrace{9\ldots9}_{n \text{ puta}}$, $n \in \mathbb{N}$. Važi: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0,0\dot{9}$. Kako je

$$|0,1 - x_n| = 0,\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ puta}}1,$$

dobija se

$$\lim_{n\to\infty} |0,1 - x_n| = 0,\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ puta}}1 = 0,$$

pa je

$$|0,1 - 0,0\dot{9}| = |0,1 - \lim_{n\to\infty} x_n| = \lim_{n\to\infty} |0,1 - x_n| = 0,$$

odnosno $0,1$ i $0,0\dot{9}$ su dve različite decimalne reprezentacije istog broja.

Prema tome, ako je neophodno koristiti jedinstvenost decimalne reprezentacije, onda se precizira sledeća konvencija (dogovor): ako se broj završava sa beskonačnim nizom devetki,

$$0,x_1x_2x_3x_4\ldots x_{n-1}y_n999999\dot{9},$$

onda se umesto tog zapisa koristi zapis

$$0,x_1x_2x_3x_4\ldots x_{n-1}x_n0000000.$$

Slična situacija postoji i kod ternarnog zapisa kod kojeg se koriste cifre $0, 1$ i 2 (ostaci pri deljenju brojem tri). Za brojeve iz intervala $[0,1]$ važi

$$\begin{aligned} 0,x_1x_2x_3x_4\ldots x_{n-1}x_n\ldots &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3^k}, \quad x_k \in \{0,1,2\}. \end{aligned}$$

U takvom zapisu važi:

$$0,x_1x_2x_3x_4\ldots x_{n-1}x_n0000000\cdots = 0,x_1x_2x_3x_4\ldots x_{n-1}y_n222222\dot{2},$$

gde je $x_n \neq 0$, $y_n \neq 2$, $y_n = x_n - 1$.

Odavde sledi da se svaki broj oblika

$$0, x_1x_2x_3x_4 \ldots x_{n-1}10000000\ldots$$

može zapisati u obliku

$$0, x_1x_2x_3x_4 \ldots x_{n-1}02222222\dot{2},$$

i obratno.

Primer 6.1.1. *Odrediti decimalni zapis broja koji je u ternarnom zapisu dat sa* $0,0202020202...$

Kako je

$$\begin{aligned}
0,0202020202... &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2k}} \\
&= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^{2k}} \\
&= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \cdots + \frac{1}{9^n} - 1) \\
&= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{9^{n+1}}}{1 - \frac{1}{9}} - 1 \right) \\
&= 2 \cdot \left(\frac{9}{8} - 1 \right) = \frac{1}{4},
\end{aligned}$$

pa je traženi decimalni zapis jednak $0,25$.

Primetimo i sledeće:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2k}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3-1}{3^{2k}} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{3^n} + \ldots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Na kraju, posmatraju se brojevi iz $[0,1]$ kod kojih postoji cifra 1 u ternarnom zapisu. Pre svega, to su brojevi oblika 3^{-n}, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= 0,1 = 0,022222222,\\ \frac{1}{9} &= 0,01 = 0,0022222222,\\ \dots\end{aligned}$$

Izlaganje nastavljamo diskusijom s obzirom na poziciju cifre 1 iza decimalnog zareza.

Kako je $2/3 = 0,2$ u ternarnom zapisu, zaključujemo da svi brojevi iz intervala $[1/3, 2/3]$ imaju ternarni zapis oblika

$$0,1x_2x_3x_4x_5\dots, \quad x_k \in \{0,1,2\}, k \geq 2.$$

Slično, svi brojevi iz intervala $[1/9, 2/9]$ imaju ternarni zapis oblika

$$0,01x_2x_3x_4x_5\dots, \quad x_k \in \{0,1,2\}, k \geq 2,$$

a svi brojevi iz intervala $[7/9, 8/9]$ imaju ternarni zapis oblika

$$0,21x_2x_3x_4x_5\dots, \quad x_k \in \{0,1,2\}, k \geq 2.$$

Ovim smo opisali sve brojeve koji u ternarnom zapisu imaju cifru 1 na prvom ili na drugom mestu iza decimalnog zareza u ternarnom zapisu. Brojevi koji u ternarnom zapisu imaju jedinicu na trećem mestu (ali ne na prvim niti na drugom) su oblika

$$\begin{aligned}0,001x_4x_5x_6\dots &\in [1/27, 2/27],\\ 0,021x_4x_5x_6\dots &\in [7/27, 8/27],\\ 0,201x_4x_5x_6\dots &\in [19/27, 20/27],\\ 0,221x_4x_5x_6\dots &\in [25/27, 26/27],\end{aligned}$$

U nastavku se ispituje podskup skupa $[0,1]$ koji sadrži one realne brojeve koji u ternarnom zapisu nemaju cifru 1. Pri tome, se umesto

$$0, x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}1, \quad x_k \in \{0,2\}, \quad k = \{1,2,\dots,n-1\}$$

posmatra

$$0, x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}0222222\dot{2}.$$

Drugim rečima, brojevi $1/3, 1/9, 7/9, 1/27, 7/27, 19/27, 25/27$ itd. se zapisuju samo korišćenjem cifara 0 i 2.

6.2 Kantorov skup: izbacivanje "srednjih trećina"

Posmatra se jedinični interval $[0,1]$ u skupu realnih brojeva. *Kantorov skup* se definiše kao skup brojeva jediničnog intervala koji u ternarnom zapisu nemaju cifru 1 (uz dogovor kojim se jedinica kao poslednja cifra zamenjuje nulom iza koje sledi beskonačni niz dvojki). Ovo je algebarska definicija Kantorovog skupa.

Isti skup se može definisati izdvajanjem "srednjih trećina" na sledeći način.

Neka je $\mathcal{C}_1 = [0,1] \setminus (1/3, 2/3) = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. Dakle, $\mathcal{C}_1$ se dobija kada se iz jediničnog intervala izbaci srednja trećina, odnosno, $\mathcal{C}_1$ je komplement otvorenog intervala $(1/3,2/3)$ u odnosu na $[0,1]$.

U drugom koraku se izbacuju srednje tećine preostalih delova. Drugim rečima,

$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \setminus ((1/9,2/9) \cup (7/9,8/9)) = [0,1/9] \cup [2/9,3/9] \cup [6/9,7/9] \cup [8/9,1].$$

U trećem koraku se izbacuju srednje tećine preostalih delova. Drugim rečima,

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_3 &= \mathcal{C}_2 \setminus ((1/27,2/27) \cup (7/27,8/27)) \cup (19/27,20/27) \cup (25/27,26/27))) \\
&= [0,\frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27},\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27},\frac{1}{3}] \\
&\quad \cup [\frac{2}{3},\frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},\frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27},1].
\end{aligned}$$

U svakom sledećem koraku formira se novi skup $\mathcal{C}_{n+1}$ koji izbacivanjem srednjih trećina iz prethodno dobijenog skupa $\mathcal{C}_n$.

Kantorov skup $\mathcal{C}$ je presek ovako dobijenih skupova $\mathcal{C}_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Jasno, $\mathcal{C} \neq \emptyset$ jer $\{0,1\} \subset \mathcal{C}$. Takođe, krajevi svih "srednjih trećina" pripadaju skupu $\mathcal{C}$.

U topološkom smislu može se reći sledeće.[1] S obzirom da su skupovi koji se izbacuju otvoreni i da je proizvoljna unija otvorenih skupova otvoren skup, sledi da je $\mathcal{C}$ zatvoren skup. On dakle, sadrži sve svoje tačke nagomilavanja.

Po konstrukciji važi $\frac{2}{3^{2k}} \in \mathcal{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Na osnovu prethodnog predavanja sledi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^{2k}} = \frac{1}{4},$$

pa, prema tome $1/4 \in \mathcal{C}$.

Takođe, po konstrukciji, skup $\mathcal{C}$ ne sadrži nijedan interval. Na primer, skup iracionalnih tačaka iz bilo kojeg intervala (a,b) je neprebrojiv skup koji ne sadrži nijedan interval.

Teorema 6.2.1. *Kantorov skup $\mathcal{C}$ je neprebrojiv.*

Dokaz. U dokazu se koristi Kantorov princip, jedno od fundamentalnih svojstava skupa realnih brojeva.

Ideja dokaza je definisanje injektivnog preslikavanja iz $\mathcal{C}$ u skup X i obratno, gde je X skup svih nizova cifara iz skupa $\{0,1\}$,

$$X = \{x = x_1x_2x_3x_4\ldots \mid x_j \in \{0,1\},\ j \in \mathbb{N}\}.$$

Neka $c \in \mathcal{C}$. Tada c pripada svim skupovima $\mathcal{C}_n$, $n \in \mathbb{N}$, kojima se definiše skup $\mathcal{C}$.

Dakle, $c \in \mathcal{C}_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. Ako $c \in [0,1/3]$ ("levom" intervalu) onda mu u ovom koraku pridružujemo cifru 0, a ako $c \in [2/3,1]$ ("desnom" intervalu), onda mu pridružujemo cifru 1.

U slučaju da $c \in [0,1/3]$, pa mu je u prvom koraku pridružena cifra 0, u drugom koraku se posmatra deo skupa $\mathcal{C}_2$ u kojem se nalazi c. To može da

[1] Ovde se smatra da je čitalac upoznat sa osnovnim pojmovima topološke strukture skupa realnih brojeva. Videti, na primer [1].

bude $[0, 1/9]$ ("levi" interval) ili $[2/9, 1/3]$ ("desni" interval). U prvom slučaju tački c se dodeljuje 00, a u drugom 01.

Ako je, međutim, $c \in [2/3, 1]$, onda mu se u drugom koraku pridružuje 10 ako $c \in [2/3, 7/9]$, odnosno 11 ako $c \in [8/9, 1]$.

Na sličan način se postupa na sledećem nivou, $\mathcal{C}_3$. Prethodno pozicioniranje broja c u neki od intervala dužine $1/9$ određeno je, na jedinstveni način rasporedom dve cifre iz $\{0, 1\}$. Za pozicioniranje broja c u nekom intervalu dužine $1/27$ prethodnim ciframa se dodaje treća cifra:

0 u slučaju da c pripada "levom intervalu" dužine $1/27$,

a 1 ako c pripada "desnom intervalu" dužine $1/27$.

Nastavljajući ovaj postupak, definiše se preslikavanje $f : \mathcal{C} \to X$, koje svakom broju iz Kantorovog skupa dodeljuje jedinstveno određeni niz $x \in X$. Po samoj konstrukciji sledi da je f injektivno preslikavanje. (Ako je $c_1 \neq c_2$, onda postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|c_1 - c_2| > 1/3^{n_0}$, pa se $f(c_1)$ i $f(c_2)$ razlikuju u cifri na n_0-toj poziciji.)

Neka je, sada, $x = x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots \in X$.

Ako je $x_1 = 0$, onda se posmatra $[0, 1/3]$, a ako je $x_1 = 1$, onda se posmatra $[1/3, 2/3]$. Zatim, ako je $x_2 = 0$, onda se posmatra "leva" trećina odgovarajućeg podintervala dužine $1/9$, a ako je $x_2 = 1$, onda se posmatra "desna" trećina odgovarajućeg podintervala dužine $1/9$. Time se svakom nizu $x \in X$ dodeljuje jedinstveno određen niz umetnutih intervala čija dužina teži ka nuli. Na osnovu Kantorovog principa postoji jedinstveno određen realan broj c koji pripada svim tim intervalima. Taj broj, po konstrukciji pripada skupu $\mathcal{C}$. Ovim je definisano preslikavanje $g : X \to \mathcal{C}$, koje je injektivno.

Na osnovu teoreme Kantor-Šreder-Bernštajn sledi $card\mathcal{C} = cardX$, odnosno Kantorov skup je neprebrojiv. $\square$

U ovom kursu se ne definiše pojam mere i merljivog skupa, ali intuitivno je jasno da je mera intervala $[a, b]$ jednaka njegovoj dužini: $b - a$, kao i da je mera disjunktnih skupova jednaka zbiru njihovih mera. Kantorov skup je merljiv, što nećemo dokazati, a mera svih uklonjenih intervala, to jest njihova ukupna dužina, je suma geometrijskog reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \cdots = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1,$$

pa je Kantorov skup mere nula.[2]

U matematičkoj analizi se kaže da neko svojstvo posmatranog skupa važi “skoro svuda“ ako važi za sve elemente tog skupa izuzev za elemente koji čine skup mere nula.

Primer 6.2.2. *Neka je funkcija f definisana na skupovu $[0,1]\setminus\mathcal{C}_n$, $n\in\mathbb{N}$, na sledeći način:*

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1/2, \quad x\in[1/3,2/3],\\
f(x) &= 1/4, \quad x\in[1/9,2/9],\\
f(x) &= 3/4, \quad x\in[7/9,8/9],\\
f(x) &= 1/8, \quad x\in[1/27,2/27],\\
f(x) &= 3/8, \quad x\in[7/27,8/27],\\
f(x) &= 5/8, \quad x\in[19/27,20/27],\\
f(x) &= 7/8, \quad x\in[25/27,26/27],\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Može se dokazati da je f sirjektivno preslikavanje iz $[0,1]$ na $[0,1]$, koje je neprekidna i monotono rastuća funkcija. Štaviše, f je diferencijabilna u svim tačkama skupa $[0,1]\setminus\mathcal{C}$, znači skoro svuda je diferencijabilna na $[0,1]$. U svim tačkama $x\in[0,1]\setminus\mathcal{C}$ važi $f'(x)=0$.

U literaturi se funkcija f naziva đavolje stepenice, *jer je ona primer neprekidne i monotone funkcije čiji je prvi izvod skoro svuda jednak nuli.*

Na kraju ove lekcije pokazujemo kako se Kantorov skup može zapisati korišćenjem prebrojivih unija, odnosno prebrojivih preseka nekih skupova.

[2] Ovo pokazuje razliku pojmova kardinalnosti i mere koji se koriste pri opisu veličine skupa.

Primetimo da se pri konstrukciji Kanstorovog skupa na svakom nivou $n \in \mathbb{N}$ odbacuje 3^{n-1} srednja trećina (bez obzira što su neki intervali već "izbačeni"). Naime,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 &= \mathcal{C}_1 \setminus ((1/9, 2/9) \cup (4/9, 5/9) \cup (7/9, 8/9)) \\ &= \mathcal{C}_1 \setminus ((1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)). \end{aligned}$$

Uz malo koncentracije, može se zaključiti da je $\mathcal{C}_n$ komplement skupa

$$\begin{aligned} (1/3^n, 2/3^n) \cup (4/3^n, 5/3^n) \cup (7/3^n, 8/3^n) \cup \cdots \cup ((3^n - 2)/3^n, (3^n - 1)/3^n) \\ = \cup_{k=0}^{3^{n-1}-1} ((3k+1)/3^n, (3k+2)/3^n) \end{aligned}$$

u odnosu na $\mathcal{C}_{n-1}$, $n \geq 2$.

Konačno, $\mathcal{C}$ je komplement unije skupova

$$\cup_{k=0}^{3^{n-1}-1} ((3k+1)/3^n, (3k+2)/3^n), \quad n \in \mathbb{N},$$

pa ako se za takvu uniju uvede oznaka $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}$ dobija se

$$\mathcal{C} = [0, 1] \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \cup_{k=0}^{3^{n-1}-1} ((3k+1)/3^n, (3k+2)/3^n) \right).$$

Sa druge strane, Kantorov skup je i presek familije skupova $\mathcal{C}_n$, $n \in \mathbb{N}$, pa bi trebalo da važi

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\left[0, \frac{3k+1}{3^n}\right] \cup \left[\frac{3k+2}{3^n}, 1\right] \right).$$

Može se primetiti da ovaj prelaz sa prebrojivih unija na prebrojive preseke preko komplementa predstavlja uopštenje de Morganovih zakona za konačne preseke i unije. Kantorov skup je, prema tome, primer koji motiviše potrebu za preciznim definisanjem preseka i unije indeksiranih familija skupova i izvođenje odgovarajućih skupovnih jednakosti u tom kontekstu.

Glava 7

Skupovi i kvantifikatori

U predavanju se posmatraju operacije nad skupovima. Konačni cilj predavanja je definicija pojma granične vrednosti indeksirane familije skupova, što će biti tema narednog predavanja. Da bi se do cilja stiglo, najpre se navode operacije nad konačnim kolekcijama skupova i osnove kvantifikatorskog računa.

Na ovom mestu se nećemo zadržavati na pojmu iskaza, formula i operacija sa njima, sa čime su se studenti upoznali na kursu iz osnova matematičke logike i iskaznog računa. Pretpostavlja se da su poznate oznake $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ i odgovarajuće tablice istinitosnih vrednosti.

Takođe, nećemo se upuštati u raspravu u vezi definicije pojma skupa. U pojednostavljenom smislu, smatraće se da je skup određen ako je poznat kriterijum po kojem je moguće utvrditi da li mu neki element pripada ili ne.

Da je a element skupa A označava se sa $a \in A$. Takodje, $a \notin A$ je negacija iskaza $a \in A$ i znači da a nije element skupa A, to jest da mu ne pripada. Dakle,

$$(a \notin A) \Longleftrightarrow \neg(a \in A).$$

Skup se može zadati nabrajenjem elemenata, na primer, $A = \{1, 2, 3\}$ je skup čiji su elementi $1, 2$ i 3, ili navodjenjem svojstva koje elementi ispunjavaju:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \,:\, 1 \leq x \leq 3\}.$$

Element skupa može da bude skup, na primer, $B = \{1, 2, \{1\}\}$ je skup čiji element je skup $\{1\}$. Prazan skup, $\emptyset$, je skup koji nema elemenata, a skup koji sadrži tačno jedan element se naziva *singlton*. Skup je *konačan* ako sadrži konačno mnogo elemenata, a *beskonačan* ako sadrži beskonačno mnogo elemenata.

Operacije sa skupovima se definišu na uobičajen način: $A \subset B$ ako svaki element skupa A pripada skupu B; $A = B$ ako i samo ako je $A \subset B$ i $B \subset A$. Razliku skupova $A \setminus B$ čine elementi koji pripadaju skupu A i ne pripadaju skupu B.

Presek skupova A i B, $A \cap B$ je skup čiji elementi su elementi koji pripadaju skupu A i skupu B, a unija skupova A i B, $A \cup B$ je skup čiji elementi su elementi koji pripadaju skupu A ili skupu B. Skupovi A i B su *disjunktni* ako im je presek prazan skup.

Ako su skupovi koji se posmatraju podskupovi nekog skupa U, onda je komplement skupa A u odnosu na skup U, A^c skup $U \setminus A$.

Skupovi, podskupovi nekog skupa U, sa unijom, presekom i razlikom čine Bulovu algebru. Na ovom mestu se ne navodi definicija Bulove algebre, koja je definisana 1854. godine u knjizi Džordža Bula *An Investigation of the Laws of Thought*. Napominjemo samo da se uslovi Bulove algebre odnose na minimalni, maksimalni element, identitet, komutativnost, asocijativnost, distributivnost, particiju i de Morganove zakone koji u ovom kontekstu glase:

$$U \setminus (A \cup B) = U \setminus A \cap U \setminus B \quad \text{i} \quad U \setminus (A \cap B) = U \setminus A \cup U \setminus B.$$

Simetrična razlika skupova A i B, u oznaci $A \triangle B$ je unija skupova $A \setminus B$ i $B \setminus A$:

$$A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A.$$

Primer 7.0.3. *Čitaocu se za vežbu ostavlja da pokaže da je operacija simetrične razlike $\triangle : (A, B) \mapsto A \triangle B$ komutativna i asocijativna. Takodje, dokazati da važi:*

a) ako je $A \subset U$ onda je $A \triangle \emptyset = A$, $A \triangle U = A^c$, $A \triangle A = \emptyset$.

b) $(A \triangle B)^c = A^c \triangle B$, $A^c \triangle B^c = A \triangle B$, za proizvoljne skupove A i B.

c) "nejednakost trougla":

$$A \triangle C \subset A \triangle B \cup B \triangle C,$$

za proizvoljne skupove A, B i C. Pronaći primer skupova A, B i C koji pokazuje da ova inkluzija može da bude striktna.

Primer 7.0.4. *Dokazati sledeće relacije koje pokazuju odnos operacije $\triangle$ sa presekom i unijom:*

$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C), \quad (A \triangle B) \cup C = (A \cup C) \triangle (B \cap C^c).$$

Dokaz druge relacije: *Ispisaćemo levu i desnu stranu jednakosti, a zatim ćemo ih uporediti.*

Leva strana jednakosti je:

$$\begin{aligned} x \in (A \triangle B) \cup C \quad &\Leftrightarrow \quad x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup C) \\ &\Leftrightarrow \quad ((x \in A \wedge \neg x \in B) \vee (x \in B \wedge \neg x \in A) \vee x \in C) \end{aligned}$$

Desna strana jednakosti je: $x \in (A \cup C) \triangle (B \cap C^c)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad ((x \in A \cup C) \wedge (x \notin B \cap C^c)) \vee ((x \in B \cap C^c) \wedge (x \notin A \cup C)) \\ &\Leftrightarrow \quad ((x \in A \vee x \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge \neg(x \in C)) \vee (x \in B \wedge \neg x \in C) \wedge \neg(x \in A \vee x \in C)) \\ &\Leftrightarrow \quad ((x \in A \vee x \in C) \wedge (\neg x \in B \vee x \in C)) \vee (x \in B \wedge \neg x \in C \wedge \neg x \in A \wedge \neg x \in C)) \end{aligned}$$

U nastavku se koristi $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow p \vee (q \wedge r)$ (distributivnost disjunkcije u odnosu na konjunkciju) i zakon idempotencije za konjunkciju $p \wedge p \Leftrightarrow p$, pa važi:

$x \in (A \cup C) \triangle (B \cap C^c)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad ((x \in A \wedge \neg x \in B) \vee x \in C) \vee (x \in B \wedge \neg x \in A \wedge \neg x \in C)) \\ &\Leftrightarrow \quad ((x \in A \wedge \neg x \in B) \vee x \in C) \vee ((x \in B \wedge \neg x \in A) \wedge (\neg x \in C)), \end{aligned}$$

Sada se ponovo koristi distributivnost disjunkcije u odnosu na konjunkciju, odakle sledi da je $x \in (A \cup C) \triangle (B \cap C^c)$ ekvivalentno sa:

$$(((x \in A \wedge \neg x \in B) \vee x \in C) \vee (x \in B \wedge \neg x \in A)) \wedge (((x \in A \wedge \neg x \in B) \vee x \in C) \vee (\neg x \in C)).$$

Kako je $x \in C \vee \neg x \in C$ *tačan iskaz, sledi da je i iskaz*

$$(x \in A \wedge \neg x \in B) \vee x \in C \vee \neg x \in C$$

takodje tačan, pa je konjunkcija nekog iskaza i tačnog iskaza ekvivalentna istinitosnoj vrednosti tog iskaza, odnosno,

$$(((x \in A \wedge \neg x \in B) \vee x \in C) \vee (x \in B \wedge \neg x \in A)) \wedge ((x \in A \wedge \neg x \in B) \vee x \in C \vee \neg x \in C)$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow &\quad ((x \in A \wedge \neg x \in B) \vee x \in C \vee (x \in B \wedge \neg x \in A)) \\
\Leftrightarrow &\quad (x \in A \wedge \neg x \in B) \vee (x \in B \wedge \neg x \in A) \vee x \in C \\
\Leftrightarrow &\quad x \in (A \triangle B) \cup C,
\end{aligned}$$

čime je tvrđenje dokazano.

Operacije nad skupovima se na prirodan način proširuju na konačno mnogo skupova. Tako, na primer

$$x \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \quad \Leftrightarrow x \in A_j \text{ za svaki indeks } j \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

$$x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \quad \Leftrightarrow x \in A_j \text{ za neki (barem jedan) indeks } j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Kako bi se operacije nad skupovima proširile na proizvoljne familije skupova, neophodno je uvesti pojam kvantifikatora. To je tema narednog poglavlja.

7.1 Kvantifikatori

Kao što je navedeno, uvođenjem *kvantifikatora* omogućava se ispitivanje beskonačnog broja iskaza.

Svaka promenljiva veličina (varijabla) u matematičkim tvrdnjama ima odgovarajući kvantifikator, eksplicitno ili implicitno naveden. Pri tome, promenljive veličine uzimaju vrednosti iz nekog unapred određenog skupa U.

Postoje dva tipa kvantifikatora: *univerzalni* koji se označava sa $\forall$ (čita se: *svaki* ili *za sve*) i *egzistencijalni* koji se označava sa $\exists$ (čita se: *postoji*). Neka je U skup i $P(x)$ formula. Formula $(\forall x \in U)(P(x))$ je skraćeni zapis iskaza:

za svaki element $x \in U$ *iskaz* $P(x)$ *je tačan.*

Tako je, na primer, formula $(\forall x \in \mathbb{N})(x \geq 1)$ skraćeni zapis činjenice da je svaki prirodan broj veći od ili jednak sa 1.

Slično, formula $(\exists x \in U)(P(x))$ je skraćeni zapis iskaza:

postoji element $x \in U$ *za koji je iskaz* $P(x)$ *tačan.*

Prema tome, formula $(\exists x \in \mathbb{N})(x \leq 1)$ je skraćeni zapis iskaza: "postoji prirodan broj manji od ili jednak sa 1".

Često se koristi i oznaka $\exists_{\restriction}$ za skraćeni zapis iskaza

postoji tačno jedan element $x \in U$ *za koji je iskaz* $P(x)$ *tačan.*

Na primer, formula $(\exists_{\restriction} x \in \mathbb{N})(x = 1)$ je skraćeni zapis činjenice da postoji tačno jedan prirodan broj koji je jednak sa 1.

Negacija (univerzalnog) tvrdjenja $(\forall x \in U)(P(x))$ je (egzistencijalno) tvrdjenje $(\exists x \in U)\neg(P(x))$ gde je $\neg(P(x))$ negacija iskaza $P(x)$. Dakle, iskaz

$$\neg(\forall x \in U)(P(x))$$

je istinit ako postoji kontraprimer, element $y \in U$, za koji je istinita negacija iskaza $P(x)$. Slično,

negacija tvrdjenja $(\exists x \in U)(P(x))$ je tvrdjenje $(\forall x \in U)\neg(P(x))$.

Da parafraziramo: pri komutiranju negacije i kvantifikatora, menja se tip kvantifikatora.

Često se u iskazima pojavljuje više kvantifikatora i u tom slučaju neophodno je razumeti smisao iskaza u zavisnosti od redosleda kvantifikatora. Posebno treba imati u vidu da, u opštem slučaju, *komutiraju samo kvantifikatori istog tipa*. Na primer, iskaz

$$(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})(x + y = y + x)$$

je ekvivalentan iskazu

$$(\forall y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})(x + y = y + x)$$

kao i

$$(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(x+y=2) \Longleftrightarrow (\exists y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N})(x+y=2).$$

Situacija je drukčija u slučaju da u iskazu figuriše više kvantifikatora različitog tipa. Na primer, iskazi *Svaka osoba ima majku* i *Postoji majka svih osoba* očevidno nisu ekvivalentni. Ako je U skup ljudi, a $M(x,y)$ označava iskaz "y je majka od x", skraćeni zapisi iskaza iz prethodne rečenice su, respektivno,

$$(\forall x \in U)(\exists y \in U)(M(x,y)) \quad \text{i} \quad (\exists y \in U)(\forall x \in U)(M(x,y)).$$

Sa jedne strane, iskaz *postoji* $y \in U$ *tako da za sve* $x \in U$ *važi* $P(x,y)$, znači da postoji vrednost promenljive $y \in U$ za koju je iskaz $P(x,y)$ istinit, bez obzira na vrednost promenljive $x \in U$. Pri tome,

$$(\exists y \in U)(\forall x \in U)P(x,y) \Longrightarrow (\forall x \in U)(\exists y \in U)P(x,y).$$

Na primer, ako je U skup prirodnih brojeva i $P(x,y)$ oznaka za iskaz $y \leq x$, prethodna implikacija znači da, ako postoji prirodan broj manji ili jednak od svakog prirodnog broja onda za svaki prirodan broj postoji neki prirodan broj koji je od njega manji ili jednak.

Sa druge strane, iskaz *za sve* $x \in U$ *postoji* $y \in U$ *tako da važi* $P(x,y)$ znači da iskaz $P(x,y)$ može biti istinit ako promenljiva $y \in U$ uzima pogodno izabranu vrednost u zavisnosti od proizvoljne unapred zadate vrednosti promenljive $x \in U$. U tom slučaju, postoji funkcija $f: U \to U$ takva da je $P(x, f(x))$ istinit iskaz.

Do sada smo posmatrali kvantifikatore koji uzimaju vrednost iz unapred poznatog skupa U. Takvi kvantifikatori se nazivaju *ograničeni* ili *vezani* kvantifikatori. Postoje i formule sa kvantifikatorima $\forall x$, $\exists x$ koje su tačne bez obzira koji univerzalni skup je skup vrednosti promenljive x. Takve formule se nazivaju *valjane formule*.[1] Na primer, formula

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Longleftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y)$$

je valjana formula.

[1] engl. universaly valid formulas

U sledećoj tabeli navodimo istinitost iskaza $P(x,y)$ u zavisnosti od redosleda kvantifikatora.

iskaz	tačan je ...	netačan je ...
$(\forall x)(\forall y)P(x,y)$ $(\forall y)(\forall x)P(x,y)$	kada je $P(x,y)$ tačan za svaki izbor x,y	kada postoji par x,y za koji je $P(x,y)$ netačan.
$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$	kada za svaki x postoji y za koje je $P(x,y)$ tačan	kada postoji x za koji je $P(x,y)$ netačan za sve y
$(\exists x)(\forall y)P(x,y)$	kada postoji neki x za koji je $P(x,y)$ tačan za sve y	kada za svaki x postoji y za koje je $P(x,y)$ netačan
$(\exists x)(\exists y)P(x,y)$ $(\exists y)(\exists x)P(x,y)$	kada postoji par x,y za koji je $P(x,y)$ tačan	kada je $P(x,y)$ netačan za svaki izbor x,y

U nastavku se navodi primer negacije iskaza u kojem figurišu dva kvantifikatora.

Podsetimo se Goldbahove hipoteze:

Svaki paran prirodan broj veći od 2 jednak je zbiru dva prosta broja.

Ako sa E označimo skup parnih brojeva većih od 2, a sa P skup prostih brojeva, Goldbahova hipoteza glasi:

$$\text{za svako} \quad x \in E \quad \text{postoji} \quad p \in P \quad \text{i postoji} \quad q \in P \quad \text{tako da je} \quad x = p + q.$$

S obzirom da kvantifikatori istog tipa komutiraju, prethodni iskaz je ekvivalentan sa:

$$\text{za svako} \quad x \in E \quad \text{postoje} \quad p, q \in P \quad \text{tako da je} \quad x = p + q.$$

Da bismo istakli zavisnost promenljivih p i q od izbora elementa $x \in E$, možemo reći da za svako $x \in E$ postoje funkcije $p(x)$ i $g(x)$ iz E u P tako da važi $x = p(x) + q(x)$.

Kako glasi negacija Goldbahove hipoteze? Polazimo od negacije celog iskaza:

¬ (za svako $x \in E$ postoje $p, q \in P$ tako da je $x = p + q$)
$\Longleftrightarrow$ postoji $x \in E$ ¬ (postoje $p, q \in P$ tako da je $x = p + q$)
$\Longleftrightarrow$ postoji $x \in E$ tako da za svaki izbor $p, q \in P$ ¬ $(x = p + q)$

$$\Longleftrightarrow (\exists x \in E)(\forall p, q \in P)(x \neq p + q).$$

Negacija Goldbahove hipoteze dakle tvrdi da postoji kontraprimer: paran broj x veći od 2 koji nije zbir dva prosta broja.

Negacija iskaza sa nizom kvantifikatora se svodi na promenu tipa svakog kvantifikatora ne menjajući njihov redosled i negaciju iskaza koji sledi nakon niza kvantifikatora.

Do danas Goldbahova hipoteza nije dokazana niti opovrgnuta. Matematičari su rešavali i nešto slabija tvrdjenja, kao što je, na primer:

Goldbahova hipoteza ima najviše konačno mnogo kontraprimera.

Za vežbu ćemo napisati ovo tvrdjenje koristeći kvantifikatore, a zatim ćemo negirati dobijeni iskaz.

Znači, postoji prirodan broj n ($n \in \mathbb{N}$) takav da za svako $x \in E$ postoje $p, q \in P$ tako da je $x \leq n$ ili $x = p + q$. U ovoj verziji smo najpre naveli sve kvantifikatore.

Druga verzija glasi: postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da za svako $x \in E$ ako je $x > n$ onda postoje $p, q \in P$ tako da je $x = p + q$.

Treća verzija je: postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da za svako $x \in E_n$, gde je E_n skup prirodnih brojeva većih od n, postoje $p, q \in P$ tako da je $x = p + q$.

Kako bi mogla da glasi negacija rečenice *Goldbahova hipoteza ima najviše konačno mnogo kontraprimera*? Ovde se koristi prva verzija. Negacija glasi: za sve $n \in \mathbb{N}$ postoji $x \in E$ tako da za sve $p, q \in P$ važi $x > n$ i $x \neq p + q$. Ovaj iskaz kazuje da postoji kontraprimer koji je veći od bilo kojeg unapred zadatog broja n. (Koristili smo De-Morganove zakone.)

Primer 7.1.1. *(tvrdjenje sa četiri uzastopna kvantifikatora) Napisati simbolima sledeće tvrđenje:*

Za svaki prirodan broj n postoji prirodan broj m takav da za svaki $x \in \mathbb{N}$ postoje prirodni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tako da važi: $x = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n$.

Ovaj problem je poznat kao Waringov problem[2] *i govori da za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *postoji* $m(n) \in \mathbb{N}$ *tako da je svaki prirodan broj jednak sumi od* $m(n)$ $n-$*tih stepena nekih brojeva.*

Negacija Waringovog problema glasi: Postoji $n \in \mathbb{N}$ *takav da za svaki* $m \in \mathbb{N}$ *postoji* $x \in \mathbb{N}$ *takav da za sve prirodne brojeve* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *važi* $x \neq a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n$. *Napisati simbolima ovo tvrđenje.*

Primer 7.1.2. *(tri promenljive i dva iskaza) Koristeći kvantifikatore napisaćemo matematičkim simbolima iskaz: Ne postoji putnik koji je leteo nekom avio-linijom svake avio-kompanije. U ovom primeru postoje tri promenljive:* x *koja označava putnika,* y *koja označava avio-liniju i* z *koja označava avio-kompaniju. Neka iskaz* $P(x, y)$ *označava da je putnik* x *koristio avio-liniju* y*, a iskaz* $Q(y, z)$ *da avio-liniju* y *nudi avio-kompanija* z*. Matematička formulacija navedenog iskaza glasi:*

$$\neg(\exists x)(\forall z)(\exists y)(P(x, y) \wedge Q(y, z)).$$

Koristeći De Morganove zakone "pomeriti" negaciju do iskaza P *i* Q*, a zatim formulu opisati "običnim" jezikom.*

7.2 Istorijski komentar: slaba Goldbahova hipoteza

Na margini pisma koje je poslao Leonhardu Euler-u 7. juna 1742. godine, Christian Goldbach je pretostavio da se svaki broj veći od 2 može predstaviti kao zbir tri prosta broja: "aggregatum trium numerorum primarum". Pismo je, inače, napisano na neobičnoj mešavini nemačkog i latinskog jezika.

Ova pretpostavka je postala poznata kao Goldbahova hipoteza, a u međuvremenu je podeljena na jaku Goldbahovu hipotezu po kojoj se svaki paran broj veći od 4 može napisati kao zbir dva prosta broja i na slabu Goldbahovu hipotezu po kojoj se svaki neparan broj veći od 5 može napisati kao zbir tri prosta broja.

[2] Postavljen je 1770. godine od strane engleskog matematičara Edward-a Waring-a. Iste godine Lagranž je dokazao da je svaki prirodan broj (uključujući i nulu) jednak sumi 4 potpuna kvadrata prirodnih brojeva. Pozitivan odgovor na Waringop problem dao je David Hilbert 1909. godine.

Jaka Goldbahova hipoteza implicira slabu jer, ako je broj veći od 5, kada oduzmemo 3 dobićemo paran broj koji se, po jakoj hipotezi, može predstaviti kao zbir dva prosta broja, pa dodavanjem broja 3 dobija se tvrdjenje slabe Goldbahove hipoteze.

Sa druge strane, slaba Goldbahova hipoteza ne implicira jaku, jer nije izvesno da će se oduzimanjem jednog prostog broja u reprezentaciji slabe hipoteze mogu dobiti svi parni brojevi.

Ipak iz slabe Goldbahove hipoteze sledi da se parni brojevi mogu napisati kao zbir ne više od 4 prosta broja. Pa tako, ako je slaba Goldbahova hipoteza tačna, dobija se poboljšanje rezultata Olivier Ramaré-a iz 1995. godine, koji je dokazao da se svaki paran broj može predstaviti kao zbir najviše 6 prostih brojeva. Terence Tao, jedan od najznačajnijih savremenih matematičara, dokazao je 2012. godine da je svaki broj razloživ na zbir najviše 5 prostih brojeva. Spomenimo i rezultat Lev Genrikhovich Shnirelman-a iz 1930. godine da se svaki prirodan broj može napisati kao zbir ne više od 20 prostih brojeva.

Evo nekih primera: $6 = 3+3$, $8 = 3+5$, $10 = 3+7 = 5+5$, $14 = 3+11 = 7+7$,

$16 = 3+13 = 5+11$, $36 = 5+31 = 7+29 = 13+23 = 17+19$,

$38 = 7+31 = 19+19$, $46 = 3+43 = 5+41 = 17+29 = 23+23$,

$54 = 7+47 = 11+43 = 13+41 = 17+37 = 23+31$, kao i

$389965026819938 = 5569 + 389965026814369$ (ovde ne postoji razlaganje prostim sabircima koji su manji od 5 569),

$9 = 3+3+3$, $11 = 3+3+5$, $13 = 3+3+7 = 3+5+5$,

$15 = 3+5+7 = 5+5+5$, $17 = 3+3+11 = 3+7+7 = 5+5+7$...

Ruski matematičar Ivan Vinogradov je dokazao da slaba Goldbahova hipoteza važi za sve brojeve veće od nekog broja N, to jest da postoji konačno mnogo brojeva za koje je potrebno proveriti da li ta hipoteza važi. U tu svrhu koristio je metodu kružnice.[3] Vinogradov je procenio da je broj N reda veličine $10^{6846168}$, a 2002. godine nova procena je bila 10^{1346}. U poslednjih nekoliko godina smanjena je na 10^{100}, što je praktično neproverljivo. Slikovito rečeno

[3] *engl. circle method* koja se naziva i Hardi-Litlvud-Vinogradova metoda kružnice, a kojom se pitanja o nekom skupu brojeva mogu preformulisati u pitanja o integralima nad kružnicama u kompleksnoj ravni.

10^{100} je broj veći od proizvoda broja svih subatomskih čestica u Kosmosu i broja sekundi proteklih od nastanka Kosmosa.

Peruanski matematičar Harald Andrés Helfgott je 13. maja 2013. godine na internet postavio naučni rad od 133 stranice u kojem tvrdi da je dokazao slabu Goldbahovu hipotezu. On je uspeo da pomeri granicu brojeva za koje je potrebna provera hipoteze na 10^{30}, što je bilo moguće proveriti uz pomoć računara. Taj posao je uradio Helfgott-ov saradnik David Platt. Na tu temu, Helfgott je u avgustu 2014. godine održao predavanje po pozivu na svetskom kongresu matematičara u Seulu, Koreja. U trenutku pisanja ovog predavanja u toku je priprema završne verzije knjige "The ternary Goldbach problem" koju će objaviti Princeton University Press u prestižnoj seriji Annals of Mathematics Studies.

Napomenimo da je slaba Goldbahova hipoteza posledica Rimanove hipoteze, koja se smatra najvećim nerešenim matematičkim problemom.

Glava 8

Indeksirane familije skupova

Često je neophodno posmatrati *indeksiranu familiju skupova*, U_α, $\alpha \in A$. To je funkcija koja svakom indeksu, elementu skupa A, dodeljuje neki skup. Na primer,

$$\begin{array}{ll} U_\alpha = \{\alpha\}, & \alpha \in \{1,2\}, \\ U_\alpha = \{\alpha, -\alpha\}, & \alpha \in \mathbb{N}, \\ U_\alpha = \{\alpha + r \ : \ 0 \le r \le 1\}, & \alpha \in \mathbb{N}. \end{array}$$

U ovom predavanju se proučavaju svojstva operacija nad indeksiranim familijama skupova.

Operacije preseka i unije se na prirodan način generalizuju sa konačnog broja skupova na indeksirane familije skupova:

$$\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha = \{x \ : \ (\forall \alpha \in A)(x \in U_\alpha)\},$$

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \{x \ : \ (\exists \alpha \in A)(x \in U_\alpha)\}.$$

Na primer, neka $\alpha \in A = \{1,2,3\}$ i neka je $U_\alpha = \{\beta \in \mathbb{N} \ : \ \beta \le \alpha\}$. Tada je indeksirana familija u stvari konačna familija. Za vežbu napisati skupove U_α navodjenjem elemenata, a zatim odrediti: $\{U_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$, $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ i $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Primer 8.0.1. *Koristeći definiciju i valjane formule kvantifikatorskog računa dokazati distributivne zakone u slučaju indeksiranih familija skupova:*

$$(\cup_{\alpha\in A}U_\alpha)\cap B=\cup_{\alpha\in A}\left(U_\alpha\cap B\right),$$

$$(\cap_{\alpha\in A}U_\alpha)\cup B=\cap_{\alpha\in A}\left(U_\alpha\cup B\right).$$

U sledećim zadacima se ilustruju složenije operacije sa indeksiranim familijama skupova. U dokazima se koriste sledeće valjane formule:

$$\begin{array}{ll}(1) & (\forall x)(A(x)\wedge B(x))\iff(\forall x)(A(x))\wedge(\forall x)(B(x))\\ (2) & (\exists x)(A(x)\vee B(x))\iff(\exists x)(A(x))\vee(\exists x)(B(x))\\ (3) & (\forall x)(A(x))\vee(\forall x)(B(x))\Longrightarrow(\forall x)((A(x)\vee B(x))\\ (4) & (\exists x)(A(x)\wedge B(x))\Longrightarrow(\exists x)(A(x))\wedge(\exists x)(B(x)).\end{array}$$

Obratni smerovi u (3) i (4) nisu uvek tačni. Na primer, iskaz "Svaki prirodan broj je paran ili neparan" je tačan, a iskazi "Svaki prirodan broj je paran" i "Svaki prirodan broj je neparan" nisu tačni, pa nije tačna ni njihova disjunkcija. Drugim rečima, formula

$$(\forall x)((A(x)\vee B(x))\Longrightarrow((\forall x)(A(x))\vee(\forall x)(B(x)))$$

nije valjana formula.

Bitno je uočiti da su formule (3) i (4) kontrapozicije jedna drugoj.

1. Dokazati de Morganove zakone u slučaju indeksirane familije skupova:

$$(\cup_{\alpha\in A}U_\alpha)^c=\cap_{\alpha\in A}U_\alpha^c,$$

$$(\cap_{\alpha\in A}U_\alpha)^c=\cup_{\alpha\in A}U_\alpha^c,$$

pri čemu važi: $(\forall\alpha\in A)(U_\alpha\subset U)$, pa je $U_\alpha^c=U\setminus U_\alpha$. Dakle, de Morganovi zakoni se mogu zapisati i na sledeći način:

$$U\setminus\cup_{\alpha\in A}U_\alpha=\cap_{\alpha\in A}(U\setminus U_\alpha)\quad\text{i}\quad U\setminus\cap_{\alpha\in A}U_\alpha=\cup_{\alpha\in A}(U\setminus U_\alpha).$$

Dokaz prve jednakosti:

$$\begin{aligned} x \in (\cup_{\alpha\in A} U_\alpha)^c &\Leftrightarrow x \in U \wedge x \notin \cup_{\alpha\in A} U_\alpha \\ &\Leftrightarrow x \in U \wedge \neg(\exists\alpha \in A)(x \in U_\alpha) \\ &\Leftrightarrow x \in U \wedge (\forall\alpha \in A)(x \notin U_\alpha) \\ &\Leftrightarrow (\forall\alpha \in A)(x \in U \wedge x \notin U_\alpha) \\ &\Leftrightarrow (\forall\alpha \in A)(x \in U \setminus U_\alpha) \\ &\Leftrightarrow x \in \cap_{\alpha\in A} U_\alpha^c. \end{aligned}$$

2. Za indeksirane familije skupova važi uopštenje svojstva distributivnosti:

$$(\cup_{\alpha\in A} U_\alpha) \cap (\cup_{\beta\in B} V_\beta) = \cup_{\alpha\in A,\beta\in B} (U_\alpha \cap V_\beta),$$

$$(\cap_{\alpha\in A} U_\alpha) \cup (\cap_{\beta\in B} V_\beta) = \cap_{\alpha\in A,\beta\in B} (U_\alpha \cup V_\beta),$$

gde je $\cup_{\alpha\in A,\beta\in B} = \cup_{\alpha\in A}\cup_{\beta\in B}$ i $\cap_{\alpha\in A,\beta\in B} = \cap_{\alpha\in A}\cap_{\beta\in B}$.

Dokaz prve jednakosti:

$$\begin{aligned} x \in (\cup_{\alpha\in A} U_\alpha) \cap (\cup_{\beta\in B} V_\beta) &\Leftrightarrow (\exists\alpha \in A)(x \in U_\alpha) \wedge (\exists\beta \in B)(x \in V_\beta) \\ &\Leftrightarrow (\exists\alpha \in A)(\exists\beta \in B)(x \in U_\alpha \wedge x \in V_\beta) \\ &\Leftrightarrow (\exists\alpha \in A)(\exists\beta \in B)(x \in U_\alpha \cap V_\beta) \\ &\Leftrightarrow x \in \cup_{\alpha\in A,\beta\in B} (U_\alpha \cap V_\beta). \end{aligned}$$

Napomena: Treba obratiti pažnju na to da, bez ozira što su skupovi indeksa jednaki, na primer $A = B = \mathbb{N}$, prethodne relacije ne impliciraju

$$(\cup_{n\in\mathbb{N}} U_n) \cap (\cup_{n\in\mathbb{N}} V_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} (U_n \cap V_n),$$

nego

$$(\cup_{n\in\mathbb{N}} U_n) \cap (\cup_{n\in\mathbb{N}} V_n) = (\cup_{n\in\mathbb{N}} U_n) \cap (\cup_{m\in\mathbb{N}} V_m) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\cup_{m\in\mathbb{N}} (U_n \cap V_m).$$

3. Pokazati da sledeće inkluzije mogu da budu striktne:

$$\cup_{\alpha\in\mathbb{N}}\left(U_\alpha \cap V_\alpha\right) \subset \cup_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2}\left(U_\alpha \cap V_\beta\right),$$

$$\cap_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2}\left(U_\alpha \cup V_\beta\right) \subset \cap_{\alpha\in\mathbb{N}}\left(U_\alpha \cup V_\alpha\right).$$

   Za dokaz je dovoljno posmatrati konačan skup indeksa $\{1,2\}$ i skupove $U_1 = \{1,2\}$, $U_2 = \{3,4\}$, $V_1 = \{1,3\}$ i $V_2 = \{2,4\}$.

4. Pokazati da je $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n = U_1 \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}}(U_1 \setminus U_n)$.

   Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, onda $x \in U_1$, pa preostaje da se pokaže da $x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}}(U_1 \setminus U_n)$. Dokaz izvodimo kontradikcijom. Pretpostavimo $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}}(U_1 \setminus U_n)$. Tada $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tako da važi $x \in U_1 \land x \notin U_{n_0}$. Odavde sledi da $x \notin U_{n_0}$ pa prema tome $x \notin \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, što je kontradikcija.

   ($\Leftarrow$) Neka $x \in U_1 \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}}(U_1 \setminus U_n)$, dakle $x \in U_1 \land x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}}(U_1 \setminus U_n)$. Dalje,

$$\begin{aligned}
x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}}(U_1 \setminus U_n) &\Leftrightarrow \neg(x \in \cup_{n\in\mathbb{N}}(U_1 \setminus U_n)) \\
&\Leftrightarrow \neg(\exists n \in \mathbb{N})(x \in (U_1 \setminus U_n)) \\
&\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\neg(x \in U_1 \land x \notin U_n)) \\
&\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(x \notin U_1 \lor x \in U_n)) \\
&\Leftrightarrow x \notin U_1 \lor (\forall n \in \mathbb{N})(x \in U_n) \\
&\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(x \in U_n) \Leftrightarrow x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n,
\end{aligned}$$

   jer je $x \notin U_1$ netačan iskaz i $(\perp \lor p) \Leftrightarrow p$.

5. Familija skupova indeksirana nizom prirodnih brojeva, naziva se *niz*. Niz skupova U_n, $n \in \mathbb{N}$, je *monotono opadajući niz skupova* ako je $U_n \supset U_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Ako je $U_n \subset U_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ onda se niz skupova U_n, $n \in \mathbb{N}$ naziva *monotono rastući niz skupova*.

   Ako su U_n i V_n monotono opadajući nizovi skupova onda važi

$$\cap_{n\in\mathbb{N}}(U_n \cup V_n) = (\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n) \cup (\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n).$$

Dokaz. ($\Leftarrow$) Kako je

$$\left(\cap_{n\in\mathbb{N}}U_n\right)\cup\left(\cap_{n\in\mathbb{N}}V_n\right)=\cap_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}\left(U_n\cup V_m\right)\subset\cap_{n\in\mathbb{N}}\left(U_n\cup V_n\right),$$

ovaj smer sledi iz prethodnih razmatranja i u njemu se ne koristi uslov monotonosti.

($\Rightarrow$) Neka važi $x\in\cap_{n\in\mathbb{N}}(U_n\cup V_n)$. Pretpostavimo da $x\notin\cap_{n\in\mathbb{N}}U_n$ i dokažimo da tada mora da važi $x\in\cap_{n\in\mathbb{N}}V_n$.

Dakle, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ takav da važi $x\notin U_{n_0}$. Iz monotonosti niza $\{U_n\}$ sledi da tada $(\forall m\in\mathbb{N})$ $(m\geq n_0)$ $(x\notin U_m)$.

Nastavak dokaza izvodimo kontradikcijom. Ako $\exists m_0\in\mathbb{N}$ takav da $x\notin V_{m_0}$, onda $(\forall m\in\mathbb{N})$ $(m\geq m_0)$ $(x\notin V_m)$.

Moguća su dva slučaja: $n_0\geq m_0$ ili $m_0\geq n_0$. U prvom slučaju, $x\notin U_{n_0}\cup V_{n_0}$, a u drugom $x\notin U_{m_0}\cup V_{m_0}$. Prema tome, $x\notin\cap_{n\in\mathbb{N}}(U_n\cup V_n)$, što je u kontradikciji sa uslovom zadatka.

Zaključujemo da, ako $x\in\cap_{n\in\mathbb{N}}(U_n\cup V_n)$ i ako $x\notin\cap_{n\in\mathbb{N}}U_n$ onda $x\in\cap_{n\in\mathbb{N}}V_n$, čime je tvrdjenje dokazano.

Primer 8.0.2. *Dokazati da za simetričnu razliku i indeksirane familije skupova važi:*

$$\left(\cup_{\alpha\in A}U_\alpha\right)\triangle\left(\cup_{\beta\in B}V_\beta\right)\subset\cup_{\alpha\in A,\beta\in B}\left(U_\alpha\triangle V_\beta\right),$$

$$\cap_{\alpha\in A,\beta\in B}\left(U_\alpha\triangle V_\beta\right)\subset\left(\cap_{\alpha\in A}U_\alpha\right)\triangle\left(\cup_{\beta\in B}V_\beta\right),$$

$$\left(\cap_{\alpha\in A}U_\alpha\right)\triangle\left(\cap_{\beta\in B}V_\beta\right)\subset\cup_{\alpha\in A,\beta\in B}\left(U_\alpha\triangle V_\beta\right).$$

Glava 9

Granična vrednost skupova

Ideja definicije granične vrednosti za indeksirane familije skupova je inspirisana teoremom o graničnoj vrednosti brojnog niza, po kojoj dati niz realnih brojeva ima graničnu vrednost ako se najveća i najmanja tačka nagomilavanja (limes superior i limes inferior) tog niza poklapaju.

Prema tome, predavanje počinjemo definicijom.

Definicija 9.0.3. *Dat je niz skupova $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Limes superior datog niza skupova, u oznaci $\limsup U_n$, je skup čiji elementi pripadaju skupovima U_m za beskonačno mnogo indeksa $m \in \mathbb{N}$. Limes inferior datog niza skupova, u oznaci $\liminf U_n$ je skup čiji elementi pripadaju svim skupovima datog niza izuzev eventualno skupovima U_m za neki konačan skup indeksa $m \in \mathbb{N}$.*

Iz definicije direktno slede inkluzije

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subset \liminf U_n \subset \limsup U_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Da je $\liminf U_n \subset \limsup U_n$ vidi se i iz sledećeg niza implikacija:

$$\begin{aligned} x \in \liminf U_n \quad &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(x \in U_{n+k-1}) \\ &\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(x \in U_{k+n-1}) \\ &\Leftrightarrow x \in \limsup U_n. \end{aligned}$$

Nije teško dokazati da važi

$$\limsup U_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\in\mathbb{N}} U_{n+k-1}, \quad \liminf U_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{k\in\mathbb{N}} U_{n+k-1}. \quad (9.1)$$

Pokažimo za $\limsup U_n$. Podsetimo se kako se generiše ispunjavanje nekog uslova P beskonačno mnogo puta:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(m \geq n \Rightarrow P(m)),$$

pa se tako činjenica da $x \in \limsup U_n$ može zapisati sa

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(m \geq n \Rightarrow x \in U_m),$$

to jest $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{m\geq n} U_m$. S obzirom da se svaki broj $m \in \mathbb{N}$ za koji važi $m \geq n$ može zapisati kao $m = n + k - 1$ za neki broj $k \in \mathbb{N}$, dobija se

$$\limsup U_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\in\mathbb{N}} U_{n+k-1},$$

što je ekvivalentno sa

$$\limsup U_n = \cap_{n\geq n_0} \cup_{k\in\mathbb{N}} U_{n+k-1}, \quad (9.2)$$

za neki broj $n_0 \in \mathbb{N}$. Drugim rečima, i ovaj zapis kaže da se neki element nalazi u beskonačno mnogo skupova iz niza skupova U_n.

Dokaz za $\liminf U_n$: Neka $x \in \liminf U_n$ i neka je $S = \{n_1, n_2, \ldots, n_j\}$, $n_1 < n_2 < \cdots < n_j$, konačan skup indeksa tako da važi $x \notin U_m \Leftrightarrow m \in S$. Treba da se dokaže da $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tako da važi $x \in \cap_{k\in\mathbb{N}} U_{n_0+k-1}$.

Ako se izabere $n_0 = n_j + 1$, onda $x \in U_{n_0+k-1}$ za svaki indeks $k \in \mathbb{N}$, odakle sledi $\liminf U_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{k\in\mathbb{N}} U_{n+k-1}$.

Dokažimo obratnu inkluziju. Neka $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{k\in\mathbb{N}} U_{n+k-1}$, to jest, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tako da važi $x \in \cap_{k\in\mathbb{N}} U_{n_0+k-1}$. Dakle, ako $x \notin U_m$ onda je $m < n_0$, što znači da je skup indeksa S takvih da $x \notin U_m$ ako i samo ako $m \in S$ konačan.

U sledećim zadacima se ispituje odnos uvedenih pojmova i operacija komplementiranja, preseka, unije i simetrične razlike. I ovom prilikom će se koristiti valjane formule iz prethodne lekcije, pa ih stoga ponovo navodimo:

$$\begin{array}{ll}
(1) & (\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \Longleftrightarrow (\forall x)(A(x)) \wedge (\forall x)(B(x)) \\
(2) & (\exists x)(A(x) \vee B(x)) \Longleftrightarrow (\exists x)(A(x)) \vee (\exists x)(B(x)) \\
(3) & (\forall x)(A(x)) \vee (\forall x)(B(x)) \Longrightarrow (\forall x)((A(x) \vee B(x)) \\
(4) & (\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Longrightarrow (\exists x)(A(x)) \wedge (\exists x)(B(x)).
\end{array}$$

Primer 9.0.4. *Dat je niz skupova* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Za* $\liminf U_n$ *i* $\limsup U_n$ *važe sledeće relacije:*

1. $(\liminf U_n)^c = \limsup U_n^c$,
2. $\limsup(U_n \cup V_n) = \limsup U_n \cup \limsup V_n$,
3. $\liminf(U_n \cap V_n) = \liminf U_n \cap \liminf V_n$,
4. $\limsup(U_n \cap V_n) \subset \limsup U_n \cap \limsup V_n$,
5. $\liminf U_n \cup \liminf V_n \subset \liminf(U_n \cup V_n)$,
6. $A\triangle \liminf U_n \subset \limsup(A\triangle U_n)$,
7. $A\triangle \limsup U_n \subset \limsup(A\triangle U_n)$.

Dokaz. Dokaz: 1. Neka važi $x \in (\liminf U_n)^c$. Ovo je ekvivalentno sa:

$$\begin{array}{rc} & \neg(x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{k\in\mathbb{N}} U_{n+k-1}) \\ \Leftrightarrow & \neg((\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(x \in U_{k+n-1})) \\ \Leftrightarrow & (\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(x \notin U_{k+n-1})) \\ \Leftrightarrow & x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\in\mathbb{N}} (U^c_{n+k-1}) \\ \Leftrightarrow & x \in \limsup U_n^c. \end{array}$$

Iz ovog zadatka sledi da se u nastavku mogu izvoditi zaključci na osnovu dualnosti, jer su skupovi jednaki ako i samo ako su im jednaki komplementi. Prema tome, ako stavimo $V_n = U_n^c$ iz upravo dokazanog zadatka sledi jednakost

$$(\liminf V_n^c) = (\limsup V_n)^c.$$

Koristeći ovu činjenicu i de Morganove zakone, zaključujemo da je 2. ekvivalentno sa 3. Naime, ako 2. važi za proizvoljne skupove, onda važi i kada se zamene U_n sa U_n^c i V_n sa V_n^c, pa se dobija

$$\limsup(U_n^c \cup V_n^c) = \limsup U_n^c \cup \limsup V_n^c.$$

Takodje, $\liminf(U_n \cap V_n) = \liminf U_n \cap \liminf V_n$ ako i samo ako je

$$\begin{aligned} & (\liminf(U_n \cap V_n))^c = (\liminf U_n \cap \liminf V_n)^c \\ \Leftrightarrow \quad & \limsup(U_n \cap V_n)^c = (\liminf U_n)^c \cup (\liminf V_n)^c \\ \Leftrightarrow \quad & \limsup(U_n^c \cup V_n^c) = \limsup U_n^c \cup \limsup V_n^c, \end{aligned}$$

a to je tvrdjenje 2.

Slično, koristeći $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$ sledi da su 4. i 5. ekvivalenti. Ako 4. važi za proizvoljne skupove, onda važi i kada se zamene U_n sa U_n^c i V_n sa V_n^c, pa se dobija

$$\begin{aligned} & (\limsup U_n^c \cap \limsup V_n^c)^c \subset (\limsup(U_n^c \cap V_n^c))^c \\ \Leftrightarrow \quad & (\limsup U_n^c)^c \cup (\limsup V_n^c)^c \subset \liminf(U_n^c \cap V_n^c)^c \\ \Leftrightarrow \quad & \liminf U_n \cup \liminf V_n \subset \liminf(U_n \cup V_n) \end{aligned}$$

a to je tvrdjenje 5.

U nastavku stoga dokazujemo samo 2. i 4.

2. Jedan smer je lakši za dokazivanje. Iz $U_n \subset U_n \cup V_n$ i $V_n \subset U_n \cup V_n$ sledi

$$\cup_{k\in\mathbb{N}} U_{n+k-1} \subset \cup_{k\in\mathbb{N}}(U_{n+k-1} \cup V_{n+k-1}) \ \wedge \ \cup_{k\in\mathbb{N}} V_{n+k-1} \subset \cup_{k\in\mathbb{N}}(U_{n+k-1} \cup V_{n+k-1})$$

pa je

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\in\mathbb{N}} U_{n+k-1} \subset \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\in\mathbb{N}} (U_{n+k-1} \cup V_{n+k-1}) \ \text{ i}$$

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\in\mathbb{N}} V_{n+k-1} \subset \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\in\mathbb{N}} (U_{n+k-1} \cup V_{n+k-1}),$$

to jest

$$\limsup U_n \cup \limsup V_n \subset \limsup(U_n \cup V_n).$$

U suprotnom smeru, neka važi $x \in \limsup(U_n \cup V_n)$, to jest

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(x \in (U_{n+k-1} \cup V_{n+k-1})).$$

Da bismo dokazali $\limsup(U_n \cup V_n) \subset \limsup U_n \cup \limsup V_n$, dovoljno je da pretpostavimo da $x \notin \limsup U_n$ i da dokažemo da tada $x \in \limsup V_n$.

Iskaz $x \notin \limsup U_n$ je ekvivalentan sa

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(x \notin (U_{n_0+k-1}),$$

odnosno $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ takav da $x \notin U_m$ za sve $m \geq n_0$.

Uslov $x \in \limsup(U_n \cup V_n)$ glasi:

$$(\forall m > n_0)(\exists k \in \mathbb{N})((x \in U_{m+k-1}) \vee (x \in V_{m+k-1})).$$

Sada koristimo valjanu formulu (2) po kojoj

$$(\forall m \geq n_0)((\exists k \in \mathbb{N})(x \in U_{m+k-1}) \vee (\exists k \in \mathbb{N})(x \in V_{m+k-1})).$$

Kako je $x \in U_{m+k-1}$ netačan iskaz jer $x \notin U_m$ za sve $m \geq n_0$, zaključujemo da važi:

$$(\forall m \geq n_0)(\exists k \in \mathbb{N})(x \in V_{m+k-1})),$$

to jest

$$x \in \cap_{m \geq n_0} \cup_{k \in \mathbb{N}} V_{k+m-1} = \limsup V_n,$$

(vidi (9.2)) što je i trebalo dokazati.

4. Kako je $U_n \cap V_n \subset U_n$ i $U_n \cap V_n \subset V_n$ sledi

$$(\cup_{k\in\mathbb{N}}(U_{n+k-1} \cap V_{n+k-1}) \subset \cup_{k\in\mathbb{N}} U_{n+k-1}) \;\; \wedge \;\; (\cup_{k\in\mathbb{N}}(U_{n+k-1} \cap V_{n+k-1}) \subset \cup_{k\in\mathbb{N}} V_{n+k-1}),$$

odakle je

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\in\mathbb{N}} (U_{n+k-1} \cap V_{n+k-1}) \subset \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\in\mathbb{N}} U_{n+k-1} \text{ i}$$

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\in\mathbb{N}} (U_{n+k-1} \cap V_{n+k-1}) \subset \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\in\mathbb{N}} V_{n+k-1},$$

to jest

$$\limsup(U_n \cap V_n) \subset \limsup U_n \quad \wedge \quad \limsup(U_n \cap V_n) \subset \limsup V_n,$$

to jest $\limsup(U_n \cap V_n) \subset \limsup U_n \cap \limsup V_n$, čime smo dokazali 4.

6. Neka $x \in A \triangle \liminf U_n$, to jest $x \in A \setminus \liminf U_n$ ili $x \in \liminf U_n \setminus A$. U prvom slučaju važi:

$$\begin{aligned}
& x \in A \quad \wedge \quad x \notin \liminf U_n \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \quad \wedge \quad x \in (\liminf U_n)^c \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \quad \wedge \quad x \in \limsup U_n^c \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \quad \wedge \quad x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\in\mathbb{N}} U_{n+k-1}^c \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \quad \wedge \quad (\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(x \in U_{n+k-1}^c)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(x \in A \setminus U_{n+k-1}) \Leftrightarrow x \in \limsup A \setminus U_n.$$

Ako je pak $x \in \liminf U_n \setminus A$ onda važi

$$\begin{aligned}
& x \in \liminf U_n \quad \wedge \quad x \notin A \\
\Leftrightarrow\ & x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{k\in\mathbb{N}} U_{n+k-1} \quad \wedge \quad x \notin A \\
\Leftrightarrow\ & (\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(x \in U_{n+k-1}) \quad \wedge \quad x \notin A
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in \liminf U_n \setminus A \Rightarrow x \in \limsup U_n \setminus A.$$

Dakle, $x \in \limsup A \setminus U_n$ ili $x \in \limsup U_n \setminus A$, pa, na osnovu svojstva 2 sledi

$$x \in \limsup(A \setminus U_n \cup U_n \setminus A) = \limsup A \triangle U_n.$$

Zadatak 7. se radi na sličan način. $\square$

Sada smo u mogućnosti da definišemo graničnu vrednost niza skupova.

Definicija 9.0.5. *Dat je niz skupova $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ako za taj niz važi*

$$\limsup U_n = \liminf U_n \tag{9.3}$$

onda je dati niz skupova $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i njegova granična vrednost je skup definisan sa (9.3).

Čitaocu se ostavlja da za vežbu proveri sledeće činjenice:

Ako je $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podniz niza $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onda je $\liminf U_n \subset \liminf V_n$ i $\limsup V_n \subset \limsup U_n$. Odavde sledi da konvergencija niza skupova implicira konvergenciju svakog njegovog podniza.

Ako je dati niz skupova $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotono rastući, onda postoji granična vrednost tog niza skupova i jednaka je $\cup_{n\in\mathbb{N}}U_n$.

Ako je dati niz skupova $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotono opadajući, onda postoji granična vrednost tog niza skupova i jednaka je $\cap_{n\in\mathbb{N}}U_n$.

Neka $U_n \subset U$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ako je $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz skupova pri čemu je njegova granična vrednost skup $A \subset U$ onda je $(U_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz skupova pri čemu je njegova granična vrednost skup A^c.

Ako su granične vrednosti datih nizova skupova $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jednake sa U i V respektivno, onda su granične vrednosti nizova $(U_n \cup V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(U_n \cap V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jednake sa $U \cup V$ i $U \cap V$ respektivno.

Glava 10

Realni brojevi kao Dedekindovi preseci

Skup realnih brojeva se konstruiše pomoću skupa racionalnih brojeva, pri čemu postoji nekoliko načina izvodjenja takve konstrukcije. Na ovom mestu se smatra da su čitaocu poznata svojstva strukture racionalnih brojeva $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$. Naime, polazi se od pretpostavke da je $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ *totalno (linearno) uredjeno polje* i da egzistencija racionalnih brojeva sledi iz egzistencije prirodnih brojeva.[1]

Cilj predavanja je definisanje i konstrukcija *kompletnog* linearno uredjenog polja. Tako konstruisanu strukturu nazivamo poljem realnih brojeva čiji elementi su realni brojevi. Kompletno linearno uredjenje je jedinstveno do na izomorfizam.

[1] Struktura $Q = (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ je pri tome minimalno totalno uredjeno polje u smislu da proizvoljno totalno uredjeno polje $F = (F, +_F, \cdot_F, 0_F, 1_F, \leq_F)$ sadrži izomorfnu kopiju od Q, vidi [17]. Grubo rečeno, izomorfizam f izmedju struktura A i B je bijekcija koja očuvava strukturu.

10.1 Aksiome totalno uređenog polja

Podsetimo se najpre pojma totalno uređenog polja. Struktura $(F, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ je *totalno uređeno polje* ako su ispunjene sledeće aksiome:

Svojstva operacije $+$:

A.1 $(\forall x, y \in F)(x + y = y + x)$,

A.2 $(\forall x, y, z \in F)((x + y) + z = x + (y + z))$,

A.3 $(\exists 0 \in F)(\forall x \in F)(x + 0 = x)$,

A.4 $(\forall x \in F)(\exists (-x) \in F)(x + (-x) = 0)$.

Svojstva operacije $\cdot$:

A.5 $(\forall x, y \in F)(x \cdot y = y \cdot x)$,

A.6 $(\forall x, y, z \in F)((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$,

A.7 $(\exists 1 \in F \setminus \{0\})(\forall x \in F)(x \cdot 1 = x)$,

A.8 $(\forall x \in F \setminus \{0\})(\exists x^{-1} \in F)(x \cdot x^{-1} = 1)$.

Distributivnost množenja u odnosu na sabiranje:

A.9 $(\forall x, y, z \in F)((x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z))$.

Svojstva relacije $\leq$:

A.10 $(\forall x \in F)(x \leq x)$,

A.11 $(\forall x, y \in F)(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$,

A.12 $(\forall x, y, z \in F)(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z))$,

A.13 $(\forall x, y \in F)(x \leq y \vee y \leq x)$.

Odnos operacija $+$ i $\cdot$ i relacije $\leq$:

A.14 $(\forall x, y, z \in F)(x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z)$,

A.15 $(\forall x, y \in F)(0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y)$.

Pri tome, aksiome A.1–A.9 definišu strukturu polja, a aksiome A.10–A.12 uvode poredak koji je, po aksiomi A.12, totalan.

Ako se uvede relacija strogog poretka $<$: $x < y \;\Leftrightarrow (x \leq y \;\wedge\; x \neq y)$ onda je tačno jedan od sledeća tri iskaza istinit: $x < y$, $y < x$, $x = y$.

U totalno uredjenom polju $(F, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ se definiše apsolutna vrednost elementa $x \in F$ na sledeći način:

$$|x| = \begin{cases} \;\;x, & 0 \leq x, \\ -x, & x \leq 0. \end{cases}$$

Rastojanje elemenata x i y iz F je $|x - y| \in F$.

Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (preslikavanje skupa $\mathbb{N}$ u F) je *Košijev niz u F* ako važi

$$(\forall \varepsilon \in F_+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})(n_0 \leq n \Longrightarrow |a_n - a_{n+m}| < \varepsilon),$$

gde je $F_+ = \{x \in F \mid 0 < x\}$.

10.2 Supremum i Dedekindova aksioma kompletnosti

Aksiome A.1–A.15 se odnose na elemente polja F. Za definisanje pojma kompletnosti neophodo je posmatrati kolekcije elemenata, podskupove skupa F.

Neka je A neprazan podskup skupa F. Skup A je ograničen sa gornje strane ako postoji $M \in F$ takav da za sve $a \in A$ važi $a \leq M$. Analogno se definiše pojam skupa koji je ograničen sa donje strane. Skup je ograničen ako je ograničen i sa gornje i sa donje strane. Element $\min A \in A \subset F$ je minimum skupa A ako je $\min A \leq a$ za sve elemente $a \in A$. Takav element je, ako postoji, jedinstveno odredjen. Analogno se definiše maksimalni element skupa A.

Definicija 10.2.1. Supremum *skupa A, u oznaci* $\sup A \in F$ *je najmanje od svih gornjih ograničenja skupa A, ako postoji. Dakle,*

$$\sup A = \min\{x \in F \mid (\forall a \in A)(a \leq x)\}.$$

Iz definicije 10.2.1 direktno sledi da je supremum nekog skupa $S \subset F$ jedinstveno određen, ako postoji.

Definicija 10.2.2. *Neka je $(F, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ totalno uredjeno polje. Polje F je (Dedekind) kompletno ako ispunjava Dedekindovu aksiomu, to jest uslov kompletnosti koji glasi: Svaki neprazan sa gornje strane ograničen skup u F ima supremum u F.*

U nastavku se posmatra polje racionalnih brojeva. Sa jedne strane, aksiome totalno uređenog polja $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ se mogu dokazati kao posledica odgovarajućih definicija skupa $\mathbb{Q}$, relacije poretka i operacija sabiranja i množenja u okviru nekog kursa iz algebre. Sa druge strane, ove aksiome se mogu postulirati, odnosno, uzeti za definiciju totalno uređenog polja $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$.

Polje racionalnih brojeva ne ispunjava uslov kompletnosti jer, na primer, skup $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ koji je ograničen sa gornje strane nema supremum u $\mathbb{Q}$. Dokaz se može naći u [7, 20].

Smatra se da se stroga definicija skupa realnih brojeva pojavila oko 1872. godine u radovima Kanta, Vajerštrasa, Hajnea i Dedekinda. Dedekindova definicija se zasniva na pojmu preseka u skupu racionalnih brojeva. Iako se radi o veoma apstraktnoj konstrukciji, ovde je navodimo zbog njenog pedagoškog značaja.

Definicija 10.2.3. *Skup $A \subset \mathbb{Q}$ je* Dedekindov presek *u $\mathbb{Q}$ ako važi:*

1) $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{Q}$,

2) *Ako $p \in A$ i $q < p$ onda $q \in A$,*

3) *U skupu A ne postoji maksimum: Ako $p \in A$ onda postoji $q \in A$ takav da je $p < q$.*

Neka je $\mathbb{R} = \{A \subset \mathbb{Q} \mid A$ je Dedekindov presek u $\mathbb{Q}\}$.

Skup $\mathbb{R}$ nije prazan, jer se svakom elementu $q \in \mathbb{Q}$ može dodeliti Dedekindov presek

$$A_q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}.$$

Nije teško utvrditi da je ovako definisan skup A_q jedan Dedekindov presek, to jest element skupa $\mathbb{R}$. Štaviše, preslikavanje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definisano sa $f(q) = A_q$ je bijekcija.

U stvari, skupovi oblika A_q, $q \in \mathbb{Q}$, igraju najznačajniju ulogu u Dedekindovoj konstrukciji.

Cilj predavanja je da se pokaže da je uz pomoć Dedekindovih preseka moguće definisati totalno uređeno polje koje je pri tome Dedekind kompletno. U skupu $\mathbb{R}$ svih Dedekindovih preseka neophodno je definisati operacije sabiranja i množenja i relaciju poretka. Zatim se proverava da li dobijena struktura ispunjava aksiome totalno uredjenog polja i, konačno, dokazuje se aksioma kompletnosti.

Osim toga, na osnovu konstrukcije se može zaključiti da ovako uvedena struktura skupa $\mathbb{R}$ sadrži izomorfnu kopiju od $\mathbb{Q}$. Taj izomorfizam je dat preslikavanjem $f(q) = A_q$.

10.3 Operacije i poredak u skupu Dedekindovih preseka

Posmatra se skup $\mathbb{R} = \{A \subset \mathbb{Q} \mid A \textit{ je Dedekindov presek u } \mathbb{Q}\}$. Elemente toga skupa možemo zvati realnim brojevima, što je naizgled kontraintuitivno.

Da bismo skup $\mathbb{R}$ snabdeli strukturom, najpre uvodimo poredak. Za dva Dedekindova preseka A i B uvodi se relacija $\leq$ na sledeći način:

$$A \leq B \Leftrightarrow A \subset B. \tag{10.1}$$

Ovako uvedena relacija je očigledno relacija poretka. Strogi poredak se dobija strogom inkluzijom.

Uvedeno uredjenje je totalno. Naime, iz $\neg(A \leq B)$ sledi da postoji $p \in A$ i $p \notin B$. Dalje, iz $p \notin B$ sledi da $\forall q \in \mathbb{Q}\ p \leq q \Rightarrow q \notin B$. Neka je $r \in \mathbb{Q}$ takav da $r \notin A$. Tada je $p < r$ pa važi $r \notin B$. Odavde je $B \leq A$.

Operacija sabiranja $+$ u skupu $\mathbb{R}$ je data sa:

$$\text{za sve} \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad A + B := \{p + q \quad | \; p \in A, \; q \in B\}. \qquad (10.2)$$

Lema 10.3.1. *Neka je* $\mathbb{R}$ *skup Dedekindovih preseka i neka je sabiranje* $+$ *definisano sa* (10.2)*. Tada je* $(\mathbb{R}, +)$ *Abelova grupa.*

Dokaz. Dokažimo najpre da je sa (10.2) definisan element skupa $\mathbb{R}$, odnosno presek.

1) Skup $A + B$ je neprazan jer su A i B neprazni.

S obzirom da su A i B preseci, sledi da postoje $p, q \in \mathbb{Q}$ takvi da je $a < p$ za sve $a \in A$ i $b < q$ za sve $b \in B$. Prema tome, ako je x proizvoljan element skupa $A + B$ onda je $x = a + b$ za neke $a \in A$ i $b \in B$, pa je $x < p + q$, odnosno, $p + q \in \mathbb{Q} \setminus (A + B)$.

2) Neka je, dalje, $x = a + b \in A + B$. Ako je $y < x$ onda je $d = x - y > 0$ i $a - d \in A$ jer je A presek, pa je

$$y = x - d = a + b - d = (a - d) + b \in A + B.$$

3) Takođe, postoje $a_1 \in A$ za koji je $a < a_1$ kao i $b_1 \in B$ za koji je $b < b_1$, pa je $y = a_1 + b_1 \in A + B$ i $x < y$.

Prema tome $A + B$ je presek, odnosno sabiranje je dobro definisana operacija.

Komutativnost i asocijativnost direktno slede iz definicije, pa preostaje da se odredi neutralni element i inverzni element u odnosu na sabiranje.

Logični kandidat za neutralni element je A_0. Proverimo jednakost $A + A_0 = A$, za proizvoljno $A \in \mathbb{R}$.

Neka je $x = a + a_0 \in A + A_0$. Iz $a_0 < 0$ sledi $x = a + a_0 < a$, pa $x \in A$ jer je A presek.

Ako, nasuprot tome, $x \in A$, onda postoji $a \in A$ takav da je $x < a$, pa iz $x - a < 0$ sledi $x = a + (x - a) \in A + A_0$.

Dokažimo da je inverzni element za $A \in \mathbb{R}$ definisan sa

$$-A = \{x \in \mathbb{Q} \;\; | \;\; \exists r > 0 \;\; \text{tako da je} \;\; x + a < -r \;\; \text{za sve} \; a \in A\}.$$

Primetimo da izbor broja r zavisi od x, $r = r(x)$, kao i da je $x + a < 0$ za sve $x \in -A$ i za sve $a \in A$.

Najpre treba dokazati da je $-A$ presek.

1) Iz $A \in \mathbb{R}$ sledi da postoji $q \in \mathbb{Q} \setminus A$ i $a < q$ za sve $a \in A$. Odavde za $x = -q - 1$ važi

$$-q - 1 + a < -q - 1 + q = -1 < 0,$$

pa $x \in -A$, to jest $-A \neq \emptyset$.

Neka je $a \in A$ proizvoljno izabran element skupa A i neka je $r > 0$ proizvoljno izabran broj. Tada je $a + r - a > a + (-a) = 0$, pa $-a \notin -A$, jer za $-a$ važi:

$$(\forall r > 0)(\exists a \in A)(-a + a \geq -r),$$

odnosno $-A \neq \mathbb{Q}$.

2) Ako $x \in -A$ i ako je $y < x$, onda je trivijalno ispunjeno $y + a < x + a < -r$ za sve $a \in A$, odnosno za $r = r(y)$ je dovoljno izabrati $r = r(x)$. Dakle, $y \in -A$.

3) Neka $x \in -A$ i neka je $r > 0$ odgovarajući broj iz definicije skupa $-A$. Dakle, $a < -x - r$ za sve $a \in A$. Za $x + r/2 > x$ važi

$$x + \frac{r}{2} + a < x + \frac{r}{2} + (-x - r) = -\frac{r}{2} < 0,$$

odakle sledi da $x + r/2 \in -A$, čime je dokazano da je $-A$ presek.

Sada prelazimo na dokaz skupovne jednakosti $A + (-A) = A_0$.

Neka je $x = a + b \in A + (-A)$. Tada postoji $r = r(b) > 0$ takav da je $a + b < -r < 0$, odnosno $x \in A_0$. (Ovde se vidi zašto se u definiciji skupa $-A$ zahteva da uslov $x + a < -r(x)$ važi za sve $a \in A$.)

U obratnom smeru se suštinski koristi Arhimedovo svojstvo skupa $\mathbb{Q}$, po kojem za zadate pozitivne brojeve k i l postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da važi $l < nk$.[2]

[2] Ako je $l \leq k$, onda je $n = 2$, pa posmatramo slučaj $k < l$. Ako je $k = p/q$, i $l = r/s$, za neke prirodne brojeve p, q, r i s, onda je $k < l \Leftrightarrow ps < rq$, pa za $n = rq + 1$ važi:

$$nps = (rq + 1)ps = rqps + ps > rq \Longrightarrow n\frac{p}{q} > \frac{r}{s}, \text{ odnosno } nk > l.$$

Neka $x \in A_0$, to jest $-x > 0$. Za $a \in A$ i za ma koji broj $q \in \mathbb{Q} \setminus A$ važi $q - a > 0$, pa na osnovu Arhimedovog svojstva sledi da postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$q - a < n(-x),$$

odakle sledi da $a - nx \notin A$. Posmatra se konačna lista od $2n + 2$ broja:

$$a < a - \frac{x}{2} < a - 2\frac{x}{2} < a - 3\frac{x}{2} < \cdots < a - 2(n-1)\frac{x}{2} < a - 2n\frac{x}{2} < a - (2n+1)\frac{x}{2}.$$

Znamo da $a \in A$ i da $a - nx \notin A$, pa postoji $k \in \{0, 1, \ldots 2n - 1\}$ tako da važi:

$$a - k\frac{x}{2} \in A, \quad a - (k+1)\frac{x}{2} \notin A, \quad a - (k+2)\frac{x}{2} \notin A.$$

Iz $a - (k+1)\frac{x}{2} \notin A$ sledi $a - (k+1)\frac{x}{2} > p$ za svaki element $p \in A$ (jer je A presek). Prema tome za $-a + (k+2)x/2$ postoji $r = -x/2 > 0$ tako je

$$p + \left(-a + (k+2)\frac{x}{2}\right) < a - (k+1)\frac{x}{2} + \left(-a + (k+2)\frac{x}{2}\right) = x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} < 0,$$

za sve $p \in A$, pa $-a + (k+2)x/2 \in -A$.

Dakle, za zadato $x \in A_0$ postoje elementi skupa A i $-A$ tako da $x \in A + (-A)$:

$$a - k\frac{x}{2} + \left(-a + (k+2)\frac{x}{2}\right) = a - a + (k+2)\frac{x}{2} - k\frac{x}{2} = x,$$

pa je $A_0 \subset A + (-A)$, to jest $A + (-A) = 0$. $\square$

Čitaocu se ostavlja da za vežbu dokaže sledeće činjenice:

a) $-(-A) = A$,

b) $A_0 < A \Longleftrightarrow -A < A_0$,

c) $-(A + B) = (-A) + (-B)$.

U skupu Dedekindovih preseka operacija množenja se uvodi po etapama.

Neka su A i B Dedekindovi preseciza koje važi $A_0 < A$ i $A_0 < B$. Drugim rečima, posmatramo najpre "pozitivne" preseke. Tada se prozivod preseka definiše sa

$$A \cdot B := \{r \in \mathbb{Q} |\ r \le p \cdot q \quad 0 < p, 0 < q, \ \text{za neke } p \in A,\ q \in B\}. \tag{10.3}$$

U preostalim slučajevima množenje se definiše pomoću skupova $-A$ i/ili $-B$ kao što sledi:

$$A \cdot B = \begin{cases} A_0 & \iff A = A_0 \vee B = A_0, \\ -((-A) \cdot B) & \iff A < A_0 \wedge A_0 < B, \\ -(A \cdot (-B)) & \iff A_0 < A \wedge B < A_0, \\ (-A) \cdot (-B) & \iff A < A_0 \wedge B < A_0. \end{cases} \tag{10.4}$$

Lema 10.3.2. *Neka je $\mathbb{R}$ skup Dedekindovih preseka i neka je množenje $\cdot$ definisano sa* (10.3) *i* (10.4). *Tada je* $(\mathbb{R} \setminus \{A_0\}, \cdot)$ *je Abelova grupa.*

Dokaz. Dokažimo da je proizvod pozitivnih preseka dobro definisan.

1) Primetimo najpre da iz $A_0 < A$ sledi da postoji $a \in A$ i $a > 0$. Tako dje, $ab \in A \cdot B$ ako je $a \in A$, $a > 0$ i $b \in B$, $b > 0$ (jer $\exists \tilde{a} \in A$, $\tilde{a} > a$ i $\exists \tilde{b} \in B$, $\tilde{b} > b$ i $\tilde{a}\tilde{b} > ab$), pa skup $A \cdot B$ nije prazan.

Takodje, za $r \in \mathbb{Q} \setminus A$, $s \in \mathbb{Q} \setminus B$ važi $rs > ab$ za proizvoljne $a \in A$ $a > 0$ i $b \in B$, $b > 0$, pa $rs \in \mathbb{Q} \setminus A \cdot B$.

2) Ako je $x \in A \cdot B$ i $y < x$, onda važi $y < x \le a \cdot b$ za neke $a \in A$, $a > 0$ i $b \in B$, $b > 0$ pa $y \in A \cdot B$.

3) Konačno, neka $x \in A \cdot B$, to jest $x < ab$ za neke elemente $a \in A$ $a > 0$ i $b \in B$, $b > 0$. Tada postoje $a_1 \in A$ i $b_1 \in B$, takvi da je $0 < a < a_1$ i $0 < b < b_1$, pa $a_1 b_1 \in A \cdot B$ i $x < a_1 b_1$.

Dakle, $A \cdot B$ je presek.

Neutralni element za množenje je $A_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid \quad x < 1\}$, a za $A > A_0$ inverzni element u odnosu na množenje se definiše na sledeći način:

$$A^{-1} = A_0 \cup \{0\} \cup \{p \in \mathbb{Q} \mid \ \exists r > 0 \ \text{ tako da je } \ -\frac{1}{p} + a < -r \ \text{ za sve } a \in A\}.$$

U slučaju da je $A < A_0$ inverzni element je $A^{-1} = -((-A)^{-1})$.

Zainteresovanom čitaocu se ostavlja da za vežbu proveri detalje i sve ostale slučajeve. $\square$

Lema 10.3.3. *Neka je* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *skup Dedekindovih preseka, gde je* $+$ *dato sa* (10.2), *a* $\cdot$ (10.3) *i* (10.4). *Ako je* $\leq$ *(totalni) poredak definisan sa* (10.1), *onda važi*

A.14 $(\forall A, B, C \in \mathbb{R})(A \leq B \Rightarrow A + C \leq B + C)$,

A.15 $(\forall A, B \in F)(A_0 \leq A \wedge A_0 \leq B \Rightarrow A_0 \leq A \cdot B)$.

Dokaz leme 10.3.3 se ostavlja čitaocu za vežbu.

Na osnovu leme 10.3.1, leme 10.3.2 i leme 10.3.3 sledi da je $(\mathbb{R}, +, \cdot, A_0, A_1, \leq)$ totalno uredjeno polje.

Preostaje da se dokaže da je totalno uredjeno polje $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ Dedekind kompletno.

Teorema 10.3.4. *Neka je* $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$, *ograničen sa gornje strane. Tada postoji* $\sup S \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Elementi skupa S su Dedekindovi preseci, pa je logičan kandidat za supremum skupa S unija tih preseka. Dakle, neka je $s := \cup_{A \in S} A$. Najpre se dokazuje da $s \in \mathbb{R}$, to jest da je s jedan Dedekindov presek.

1) Jasno, $s \neq \emptyset$ jer S nije prazan skup. Dalje, kako je S ograničen, to znači da postoji $B \in \mathbb{R}$ takav da je $(\forall A \in S)(A \subset B)$. Kako $B \neq \mathbb{Q}$ jer je B Dedekindov presek, sledi da postoji $q \in \mathbb{Q}$ i $q \notin B$. Taj broj q ne pripada skupu s. Evo zašto. Ako pretpostavimo da $q \in s$ onda postoji $A \in S$ takav da je $q \in A$, pa je $q \in B$, što je kontradikcija. Dakle, $s \neq \mathbb{Q}$.

2) Neka $p \in s$ i neka je $q < p$. Tada postoji $A \in S$ takav da je $p \in A$. S obzirom da je A presek, sledi da $q \in A$, pa je $q \in s$.

3) Kada bi u s postojao maksimum q, onda bi, po definiciji, postojao $A \in S$ takav da $q \in A$, pri čemu bi q morao da bude maksimum tog skupa A jer je s njegov nadskup. Ovo je kontradikcija jer su svi elementi skupa S Dedekindovi preseci, te nijedan od njih nema maksimum.

Dakle, dokazali smo da je $s \in \mathbb{R}$. Takodje, s je jedno gornje ograničenje skupa S jer po konstrukciji $A \in S \Rightarrow A \leq s$. Konačno, neka je B ma koje gornje ograničenje skupa S i neka $x \in s$. Tada važi $x \in A$ za neki element $A \in S$, pa iz $A \subset B$ sledi $x \in B$, to jest $s \leq B$. Prema tome $s = \sup S$, čime je teorema dokazana. $\square$

Zaključak: Dedekindovi preseci sa odgovarajućim operacijama sabiranja i množenja i sa relacijom poretka definišu jedno kompletno totalno uređeno polje. To polje nazivamo poljem realnih brojeva, a njegove elemente (preseke) realnim brojevima.

Na kraju, bez dokaza komentarišemo jedinstvenost skupa realnih brojeva, odnosno činjenicu da su kompletna totalno uređena polja međusobno izomorfna..

Neka su $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ i $(\tilde{\mathbb{R}}, \tilde{+}, \tilde{\cdot}, \tilde{0}, \tilde{1}, \tilde{\leq})$ dva kompletna totalno uredjena polja. Izomorfizam $f : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$ je moguće definisati na sledeći način. Najpre, označimo sa Q i $\tilde{Q}$ izomorfne kopije polja racionalnih brojeva u $\mathbb{R}$ i $\tilde{\mathbb{R}}$ respektivno. Ovi skupovi su medjusobno izomorfni. Označimo sa g taj izomorfizam. Neka je $f : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$ definisana sa

$$f(A) = \sup\{g(q) \mid q \in Q, q < A\}, \quad \forall A \in \mathbb{R}.$$

Ovde se, jednostavnosti radi, identifikuje $q \in \mathbb{Q}$ sa $A_q \in \mathbb{R}$.

Ograničenost skupa $\tilde{A} = \{g(q) \mid q \in Q, q < A\}$ se može dokazati na sledeći način. Iz $A \in \mathbb{R}$ sledi da postoji $M \in \mathbb{Q}$ tako da važi $A \leq A_M$, pa iz $\tilde{a} \in \tilde{A}$ sledi da postoji $a \in A$ takav da je $\tilde{a} = g(a)$, $a < A \leq A_M$ odakle je $\tilde{a} \in \tilde{A}_M = \{g(q) \mid q \in Q, q < A_M\}$. Prema tome, $\tilde{A}$ je ograničen skup, odakle sledi da je f dobro definisano preslikavanje.

Posebno se dokazuje da je f izomorfizam. Prilikom dokazivanja da f očuvava poredak koristi se činjenica da su Q i $\tilde{Q}$ gusti u $\mathbb{R}$ i $\tilde{\mathbb{R}}$ respektivno.

Glava 11

Kompaktnost u skupu realnih brojeva

U ovoj lekciji će se koristiti neka svojstva realnih brojeva sa kojima se čitalac već upoznao tokom kursa iz uvoda u analizu.

Na primer, važi Kantorov princip: Ako je $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz zatvorenih intervala za koje važi $I_{n+1} \subset I_n$, $n \in \mathbb{N}$, onda postoji realan broj α koji pripada svim intervalima, to jest $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Ovo tvrđenje je jednostavna posledica principa supremuma.

Cilj predavanja je dokaz ekvivalentnih tvrđenja o kompaktnim skupovima u skupu $\mathbb{R}$. Da bismo pripremili neophodne pojmove i činjenice za formulaciju i dokaz teoreme 11.5.1, u posebnim poglavljima se navode osnovni pojmovi i svojstva topoloških prostora, metrike i norme i tačaka nagomilavanja skupova i nizova.

11.1 Topološki prostor

Definicija 11.1.1. *Okolina tačke $x_0 \in \mathbb{R}$ je svaki podskup skupa $\mathbb{R}$ koji sadrži otvoren interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ za neko $\varepsilon > 0$. Skup $A \subset \mathbb{R}$ je otvoren ako je on okolina svake svoje tačke ili ako je prazan. Skup $B \subset \mathbb{R}$ je zatvoren ako je skup $A = \mathbb{R} \setminus B$ otvoren.*

Definicija 11.1.2. *a) Tačka $a \in \mathbb{R}$ je unutrašnja tačka skupa $A \subset \mathbb{R}$ ako je skup A okolina tačke a. Skup unutrašnjih tačaka skupa A naziva se unutrašnjost skupa A i označava se sa A°.*

b) Tačka $a \in \mathbb{R}$ je adherentna tačka skupa $A \subset \mathbb{R}$ ako u svakoj okolini tačke a postoji barem jedna tačka iz skupa A. Skup adherentnih tačaka skupa A naziva se adherencija ili zatvaranje skupa A i označavamo sa $\bar{A}$.

c) Tačka $a \in \mathbb{R}$ je tačka nagomilavanja skupa A ako u svakoj okolini tačke a postoji bar jedna tačka $b \in A$, $b \neq a$. Skup tačaka nagomilavanja skupa A (ili izvodni skup skupa A) označava se sa A'.

d) Tačka $a \in \mathbb{R}$ je izolovana tačka skupa A ako postoji barem jedna okolina tačke a koja osim tačke a ne sadrži ni jednu drugu tačku skupa A.

e) Tačka $a \in \mathbb{R}$ je rubna tačka skupa A ako u svakoj okolini tav cke a postoji bar jedna tačka iz skupa A i bar jedna tačka iz skupa $\mathbb{R} \setminus A$. Skup rubnih tačaka skupa A naziva se rub skupa A i označava se sa ∂A.

Definicija 11.1.3. *Skup $A \subset B \subset \mathbb{R}$ je gust u skupu B ako je svaka tačka $b \in B$ adherentna tačka skupa A, to jest ako je $B \subset \bar{A}$.*

Na osnovu navedenih definicija mogu se dokazati sledeća svojstva skupa realnih brojeva kao topološkog prostora.

1) Neka je tačka a tačka nagomilavanja skupa A. Tada u svakoj okolini tačke a postoji beskonačno mnogo elemenata skupa A.

2) Svaka tačka nagomilavanja skupa A je i adherentna tačka skupa A. Obrnuto ne mora da važi.

3) Za svake dve tačke $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, postoje disjunktne okoline tih tačaka.

4) Skup $A \subset \mathbb{R}$ je zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja.

5) Svaki beskonačan i ograničen skup $A \subset \mathbb{R}$ ima barem jednu tačku nagomilavanja u skupu realnih brojeva.

Neka je $\mathcal{O}$ kolekcija otvorenih skupova u $\mathbb{R}$. Tada je uređena dvojka $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ topološki prostor u smislu sledeće definicije.

Definicija 11.1.4. *Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{O}$ podskupova skupa X je kolekcija otvorenih skupova ako i samo ako važe sledeća tri uslova:*

1) *Prazan skup i skup X su otvoreni, to jest $\emptyset, X \subset \mathcal{O}$;*

2) *Presek svaka dva otvorena skupa je otvoren skup, to jest ako $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ onda važi: $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$;*

3) *Unija proizvoljno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup, to jest za svaku kolekciju $\{O_\lambda; : \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{O}$ važi $\cup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \subset \mathcal{O}$.*

Kolekcija $\mathcal{O}$ je topologija na skupu X, a uređeni par $(X, \mathcal{O})$ je topološki prostor.

Topologija u $\mathbb{R}$ koju čine otvoreni skupovi u smislu definicije 11.1.1 naziva se uobičajena topologija na $\mathbb{R}$ i označava se sa $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$.

U proizvoljnom skupu X, pa i u skupu $\mathbb{R}$ postoje i različite topologije. Na primer, antidiskretna (najgrublja) i diskretna (najfinija) topologija su date respektivno sa $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ i $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$, gde je sa $\mathcal{P}(X)$ označen partitivni skup skupa X, to jest u najfinijoj topologiji su otvoreni skupovi svi podskupovi skupa X.

11.2 Metrika i norma

Gotovo svi topološki prostori koji se proučavaju u klasičnoj matematičkoj analizi (prostori brojeva, nizova, neprekidnih funkcija i slično), mogu da se posmatraju kao prostori u kojima je topološka struktura određena nekom metrikom. Iz ovog razloga, u nastavku se definiše metrički prostor i njime određena topologija.

Metrički prostor je par (X, d) gde je X neprazan skup, a d preslikavanje $d : X \times X \to [0, \infty)$ za koje važe sledeći uslovi:

1. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

2. Za sve $x, y \in X$ važi $d(x, y) = d(x, y)$,

3. Za sve $x, y, z \in X$ važi nejednakost trougla: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Preslikavanje d je metrika na skupu X, a nenegativan broj $d(x, y)$ je rastojanje tačaka x i y.

Na primer, lako se proverava da je $(\mathbb{R}, d)$ metrički prostor ako je metrika d definisana na uobičajeni način: $d(x, y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

U svakom metričkom prostoru se topologija, kao i svi prethodno uvedeni pojmovi, definiše preko otvorenih lopti. Preciznije, neka je dat metrički prostor (X, d), $a \in X$ i $r > 0$. Skup tačaka

$$L(a, r) = \{x \in X | d(a, x) < r\}$$

je *otvorena lopta* u (X, d) sa centrom u tački a i poluprečnikom r.

Čitaocu ostavljamo da za vežbu pokaže da za proizvoljnu otvorenu loptu $L(a, r)$ u metričkom prostoru (X, d) važi:

$$\forall x \in L(a, r))(\exists \varepsilon = \varepsilon_x > 0)(L(x, \varepsilon) \subset L(a, r)).$$

Za neprazan skup $A \subset X$ kažemo da je *otvoren* u metričkom prostoru (X, d) ako za svako $a \in A$ postoji $r > 0$ tako da važi $L(a, r) \subset A$. Prazan skup je, po definiciji otvoren. Zatvoren skup se definiše kao komplement nekog otvorenog skupa metričkog prostora (X, d).

Na osnovu prethodnih razmatranja sledi da je otvorena lopta otvoren skup u metričkom prostoru.

Može se dokazati da je familija τ svi otvorenih skupova metričkog prostora (X, d) topologija metričkog prostora (X, d). Kaže se da je ta topologija indukovana metrikom d.

Neka je dat niz elemenata skupa X, odnosno funkcija $a : \mathbb{N} \to X$, koju ćemo označavati sa $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Element $x \in X$ je granična vrednost datog niza ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad a_n \in L(x, \varepsilon)).$$

Ako X ima strukturu vektorskog prostora nad poljem realnih brojeva, onda se preslikavanje $\| \cdot \| : X \to [0, \infty)$ koje ispunjava uslove:

1° $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in X$

2° $\|\lambda\| = |\lambda|\|x\|, \forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X$

3° $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$

naziva *normom nad X*, a uredjen par $(X, \|\cdot\|)$ je *normiran prostor*.

Svaki normirani prostor $(X, \|\cdot\|)$ je i metrički prostor (X, d) sa metrikom d koja je definisana na sledeći način:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \text{ za sve } x, y \in X.$$

Dokaz ostavljamo čitaocu za vežbu.

11.3 Tačke nagomilavanja skupova i nizova

U poglavlju o topološkom prostoru navedena je definicija tačke nagomolavanja skupa. Za zadati niz brojeva, moguće je uvesti pojam tačke nagomilavanja niza kao što sledi.

Podsetimo se: Niz elemenata skupa X je funkcija $a : \mathbb{N} \to X$, koju ćemo označavati sa $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Neka je $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastući niz prirodnih brojeva, tj. neka je

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots n_{k-1} < n_k < \ldots$$

i neka je dat niz $a : \mathbb{N} \to X$. Niz $a \circ n : \mathbb{N} \to X$ sa članovima a_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$, je *podniz* niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Označavaćemo ga sa $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, a oznaka $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se koristi kada želimo da istaknemo da je $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ podniz niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ako je X metriški prostor, onda je $a \in X$ tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ako postoji podniz $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ koji teži ka a, to jest takav da je $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Nije teško pokazati da je element $a \in X$ tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ako i samo ako u svakoj okolini elementa a ima beskonačno mnogo članova niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ako je $X = \mathbb{R}$, onda se niz $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ naziva brojni niz. Za tačke nagomilavanja brojnih niza važi sledeća teorema.

Teorema 11.3.1. *(Bolcano- Vajerštrasova teorema za nizove) Svaki ograničen niz ima barem jednu tačku nagomilavanja u $\mathbb{R}$, to jest svaki ograničen niz ima barem jedan konvergentan podniz.*

S obzirom na uvedeni pojam tačke nagomilavanja niza, navodimo razmišljanja o njegovoj sličnosti i razlici sa pojmom tačke nagomilavanja skupa. Radi jednostavnosti izlaganja, posmatra se prostor (X, τ) u kojem je topologija τ indukovana metrikom d.

1. Ako je $A \subset X$ i $a \in X$ njegova tačka nagomilavanja, tada u svakoj okolini tačke a postoji beskonačno mnogo elemenata skupa A, pa stoga skup A ne može biti konačan.

   Dakle, skup tačaka nagomilavanja proizvoljnog konačnog skupa je prazan skup.

2. Neka je $\{a_n\}$ niz u X takav da je skup $S = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ konačan. Tada postoji $a \in X$ tako da je $a_m = a$ za beskonačno mnogo indeksa $m \in \mathbb{N}$. Prema tome, postoji (stacionaran) podniz datog niza koji konvergira ka a, to jest a je tačka nagomilavanja datog niza.

   Primetimo da skup S nema tačku nagomilavanja!

3. Neka je sada $\{a_n\}$ niz u X takav da je skup $S = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beskonačan i neka je $a \in X$ tačka nagomilavanja datog niza. (Na primer, ako je dati niz ograničen, onda on sigurno ima barem jednu tačku nagomilavanja.)

   Dakle, $(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(d(a, a_m) < \varepsilon)$.

   Tipičan izbor, $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, daje konstrukciju podniza $\{a_{n_k}\}$ različitih elemenata skupa S koji konvergira ka tački a. Po toj konstrukciji (i na osnovu Arhimedovog principa) zaključuje se da se u svakoj okolini tače a nalazi beskonačno mnogo elemenata skupa S pa je a tačka nagomilavanja skupa S.

4. Sada se lako dokazuje tvrđenje:

Ako svaki niz elemenata skupa A sadrži konvergentan podniz i granica tog podniza je elemenat skupa A onda svaki beskonačan podskup skupa A ima tačku nagomilavanja i ona pripada skupu A.

Dokaz. Primetimo da se u ovom tvrđenju implicitno pretpostavlja da je A beskonačan skup.

Neka je B beskonačan podskup skupa A. Tada postoji $\{b_n\}$ niz različitih elemenata skupa B. Iz uslova teoreme sledi da postoji $\{b_{n_k}\}$ podniz niza $\{b_n\}$ koji konvergira ka nekom elementu $b \in A$.

Da je b tačka nagomilavanja skupa B sledi iz prethodnih razmatranja. Naime, ako je $\mathcal{O}(b)$ proizvoljna okolina tačke b, onda postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je lopta sa centrom u b poluprečnika $1/m$ sadržana u $\mathcal{O}(b)$. Tada postoji $k_0 = k(m) \in \mathbb{N}$ takav da se svi članovi niza $\{b_{n_k}\}$, $k \geq k_0$ nalaze u toj lopti. Znači, proizvoljna okolina tačke b sadrži beskonačno mnogo elemenata skupa B, pa je b tačka nagomilavanja tog skupa. $\square$

11.4 Pojam kompaktnosti

Pre formulacije teoreme o kompatnosti, uvodimo još neke topološke pojmove.

Definicija 11.4.1. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Familija njegovih podskupova $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ je pokrivač skupa $A \subset X$ ako za svako $a \in A$ postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ tako da važi $a \in A_{\lambda_0}$. Ako su pri tome skupovi A_λ, $\lambda \in \Lambda$, otvoreni, tada se familija $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ naziva otvoreni pokrivač skupa A. Ako je $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ pokrivač skupa A, onda se svaka podfamilija familije $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ koja je takodje pokrivač skupa A naziva potpokrivač datog pokrivača.*

Definicija 11.4.2. *Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je kompaktan ako i samo ako svaki otvoren pokrivač skupa X sadrži konačan potpokrivač.*

Na primer, $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ nije kompaktan topološki prostor, jer pokrivač $\{(-n, n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne sadrži konačan potpokrivač.

Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$. Uredjeni par $(A, \mathcal{O}_A)$, gde je $\mathcal{O}_A$ kolekcija skupova dobijena presekom otvorenih skupova iz X i skupa A je topološki prostor, koji se naziva topološkim potprostorom prostora $(X, \mathcal{O})$. Kaže se da je $(A, \mathcal{O}_A)$ snabdeven topologijom koju u A indukuje topologija iz X.

Sada konačno možemo definisati kompaktan skup.

Definicija 11.4.3. *Skup A je kompaktan skup u prostoru $(X, \mathcal{O})$ ako i samo ako je potprostor $(A, \mathcal{O}_A)$ kompaktan topološki prostor.*

U proizvoljnom topološkom prostoru svaki konačan skup je kompaktan, pa ako sa $\mathcal{C}(X)$ označimo kolekciju svih kompaktnih podskupova datog prostora, a sa $\mathcal{K}(X)$ kolekciju njegovih konačnih podskupova, onda je

$$\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{C}(X) \subset \mathcal{P}(X).$$

Definicija 11.4.4. *Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je* Hauzdorfov prostor *ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ tako da važi $x \in \mathcal{O}_1$ i $y \in \mathcal{O}_2$.*

Drugim rečima, topološki prostor je Hauzdorfov ako u njemu svake dve tačke imaju disjunktne okoline. Takav prostor je na primer $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ i, opštije, svaki metrički prostor.

Kažemo da familija skupova ima osobinu konačnog preseka ako svaka njena konačna podfamilija ima neprazan presek (barem jednu zajedničku tačku).

11.5 Kompaktnost u skupu realnih brojeva

Konačno, navodimo ključnu teoremu o kompaktnim skupovima u $\mathbb{R}$.

Teorema 11.5.1. *Neka je $A \subset \mathbb{R}$. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. *A je zatvoren i ograničen.*

2. *Svaki beskonačan podskup skupa A ima tačku nagomilavanja i ona pripada skupu A (Bolcano– Vajerštrasovo svojstvo za skupove)*

3. *Svaki niz elemenata skupa A sadrži konvergentan podniz i granica tog podniza je element skupa A.*

4. *Svaki otvoren pokrivač skupa A sadrži konačan potpokrivač (Hajne– Borelovo svojstvo).*

5. *Svaka familija zatvorenih podskupova skupa A koja ima osobinu konačnog preseka ima neprazan presek.*

Skup A koji ima neku od gore navedenih osobina zove se kompaktan skup.

U dokazu će se na više mesta koristiti činjenica da je neki skup zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja.

Dokaz. Svojstvo (4) je, u stvari, karakterizacija kompaktnog skupa u $\mathbb{R}$ u smislu definicije 11.4.2 i 11.4.3.

$(1) \Rightarrow (2)$ Neka je skup A ograničen i zatvoren. Ako je skup A konačan, onda on nema nijednu tačku nagomilavanja i tada trivijalno važi (2). Prema tome, pretpostavimo da je skup A beskonačan skup i da je skup S njegov beskonačan podskup. Skup S je ograničen pa, na osnovu Bolcano–Vajerštrasove teoreme on ima bar jednu tačku nagomilavanja, označimo je sa $\alpha \in \mathbb{R}$. Pošto je S podskup od A, to je α tačka nagomilavanja i za skup A, pa $\alpha \in A$ jer je A zatvoren.

$(2) \Rightarrow (1)$ Pokazaćemo prvo da je skup A zatvoren, što je ekvivalentno sa iskazom da skup A sadrži sve svoje tačke nagomilavanja. Neka je $\beta \in \mathbb{R}$ proizvoljna tačka nagomilavanja skupa A. Po definiciji tačke nagomilavanja to znači da, za proizvoljno $\varepsilon_1 > 0$, u skupu $(\beta - \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_1) \cap A$ postoji barem jedna tačka $a_1 \in A$ i $a_1 \neq \beta$. Neka je $d_1 = |a_1 - \beta| > 0$ i neka je $\varepsilon_2 = d_1/2$. U skupu $(\beta - \varepsilon_2, \beta + \varepsilon_2) \cap A$ postoji barem jedna tačka $a_2 \in A$ i $a_2 \neq \beta$. Naravno, $a_2 \neq a_1$. Nastavljajući postupak, dobijamo beskonačan skup $S = \{a_1, a_2, \dots\} \subset A$, kojem je β tačka nagomilavanja skupa. Ona, po pretpostavci pripada skupu A. Prema tome, sve tačke nagomilavanja skupa A pripadaju skupu A, to jest skup A je zatvoren.

Preostaje da se dokaže da je skup A ograničen podskup skupa $\mathbb{R}$. Pretpostavimo suprotno, to jest da A nije ograničen skup. Ideja dokaza je da se konstruiše beskonačan skup $S \subset A$, koji nema tačku nagomilavaja u skupu A, čime se dokbija kontradikcija. Neka je a_1 proizvoljan element skupa A i neka je n_1 prirodan broj za koji važi $|a_1| < n_1$. Pošto A nije ograničen, sledi da postoji $a_2 \in A$ za koji važi $n_1 < |a_2|$, i neka je $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da važi $|a_2| < n_2$. Nastavljajući ovaj postupak izbora tačaka skupa A dobija se beskonačan skup prirodnih brojeva $\{n_1, n_2, \dots\}$ i beskonačan podskup S skupa A tako da važi

$$|a_1| < n_1 < |a_2| < n_2 < |a_3| < n_3 < \dots$$

Skup S očigledno nema nijednu tačku nagomilavanja u $\mathbb{R}$, što je u suprotnosti sa (2).

Primetimo da iz ograničenosti skupa A sledi da on ne može da ima tačku nagomilavanja koja je "fiktivni element", $\pm\infty$, pa pretpostavka $\beta \in \mathbb{R}$ u prvom delu dokaza nije ograničenje.

$(1) \Rightarrow (3)$ Neka je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz elemenata skupa A. Iz ograničenosti skupa A sledi da je i niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ograničen. Dokažimo najpre da on ima konvergentan podniz. Neka je $S = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ skup vrednosti članova niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Jasno, $S \subset A$.

Ako je skup S konačan, onda postoji elemenat $a \in S$ takav da je $a_{n_k} = a$ za beskonačno mnogo vrednosti $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ iz skupa $\mathbb{N}$. To znači da je $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergentan podniz niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pa je a tačka nagomilavanja datog niza, koja, pri tome, pripada skupu A.

Ako je skup S beskonačan onda, na osnovu (2), sledi da S ima bar jednu tačku nagomilavanja u A, označimo je sa a. Po definiciji, u svakoj okolini tačke a nalazi se beksonačno mnogo elemenata skupa S. Tako se u $(a-1, a+1)$ nalazi barem jedan element $a_{n_1} \in S$. U okolini, $(a - 1/2, a + 1/2)$ nalazi se barem jedan element $a_{n_2} \in S$ takav da je $n_1 < n_2$. Ovo je moguće jer se u $(a-1/2, a+1/2)$ nalazi beskonačno mnogo elemenata skupa S. Nastavljajući ovaj postupak, zaključujemo da, za svako $m \in \mathbb{N}$, postoji

$$a_{n_m} \in (a - 1/m, a + 1/m) \cap S,$$

pri čemu je $n_1 < n_2 < \dots < n_{m-1} < n_m$. Tako je $\{a_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ konvergentan podniz niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, a element a je tačka nagomilavanja datog niza koja pripada skupu A.

$(3) \Rightarrow (1)$ Dovoljno je da se dokaže $(3) \Rightarrow (2)$, jer znamo da $(2) \Rightarrow (1)$, pa tada $(3) \Rightarrow (1)$ na osnovu tranzitivnosti implikacije.

Neka je B beskonačan podskup skupa A. Tada postoji niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ medjusobno različitih elemenata skupa B. Iz (3) sledi da postoji $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergentan podniz niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, čija je granična vrednost a element skupa A. To znači da se u svakoj okolini tačke $a \in A$ nalazi beskonačno mnogo elemenata skupa B, pa je a tačka nagomilavanja skupa B, odnosno važi (2).

$(1) \Rightarrow (4)$ Neka je A ograničen i zatvoren skup. Ako je A konačan, $cardA = n$ i $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ pokrivač skupa A, onda za svaki element $a_k \in A$, $k = 1, 2, \ldots, n$ postoji $\lambda_k \in \Lambda$, $k = 1, 2, \ldots, n$ tako da važi $a_k \in \mathcal{O}_{\lambda_k}$. Tada je $\{\mathcal{O}_{\lambda_k}\}_{\lambda_k\in\Lambda}$ konačan potpokrivač skupa A.

Pretpostavimo sada da je A beskonačan skup i da on nema Hajne–Borelovo svojstvo, što znači da postoji otvoreni pokrivač $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ koji ne sadrži konačan potpokrivač. Iz ograničenosti skupa A sledi da postoji interval $[a_1, b_1]$ takav da $A \subset [a_1, b_1]$. Posmatrajmo skupove

$$[a_1, (a_1 + b_1)/2] \cap A \quad \text{i} \quad [(a_1 + b_1)/2, b_1] \cap A.$$

Za barem jedan od tih skupova važi da $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ne sadrži konačan potpokrivač tog skupa, jer bi u suprotnom skup A imao Hajne–Borelovo svojstvo. Neka je $[a_2, b_2]$ izabran tako da je $[a_2, b_2] = [a_1, (a_1 + b_1)/2]$ ako $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, pokrivač skupa $[a_1, (a_1 + b_1)/2] \cap A$ ne sadrži konačan potpokrivač tog skupa, odnosno $[a_2, b_2] = [(a_1 + b_1)/2, b_1]$ u suprotnom slučaju. Jasno, ovako izabran interval $[a_2, b_2]$ sadrži beskonačno mnogo elemenata skupa A.

Sada posmatramo skupove

$$[a_2, (a_2 + b_2)/2] \cap A \quad \text{i} \quad [(a_2 + b_2)/2, b_2] \cap A.$$

Za barem jedan od tih skupova, po konstrukciji važi da $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ne sadrži konačan potpokrivač tog skupa. Neka je $[a_3, b_3]$ izabran tako da je $[a_3, b_3] = [a_2, (a_2 + b_2)/2]$ ako $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, pokrivač skupa $[a_2, (a_2 + b_2)/2] \cap A$ ne sadrži konačan potpokrivač tog skupa, odnosno $[a_3, b_3] = [(a_2 + b_2)/2, b_2]$ u suprotnom slučaju. Nastavljajući postupak, dobija se niz zatvorenih intervala $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ na koji se može primeniti Kantorov princip. Neka je $\alpha \in \cap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$.

Neka je $U(\alpha)$ proizvoljna okolina tačke α i $\varepsilon > 0$ izabran tako da je $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset U(\alpha)$. Po konstrukciji, dužine intervala $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, teže ka nuli, odnosno, postoji $n_0 \in n \in \mathbb{N}$ takav da je $[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$. Pošto se u intervalu $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ nalazi beskonačno mnogo elemenata skupa A, sledi da je α tačka nagomilavanja skupa A, a kako je A zatvoren skup, važi $\alpha \in A$.

Po definiciji pokrivača, postoji $\lambda_0 \in \Lambda$ tako da je $\alpha \in \mathcal{O}_{\lambda_0}$. Skup $\mathcal{O}_{\lambda_0}$ je otvoren skup, pa postoji $\varepsilon_0 > 0$ takav da je $(\alpha - \varepsilon_0, \alpha + \varepsilon_0) \subset \mathcal{O}_{\lambda_0}$. Za tako odabran broj $\varepsilon_0 > 0$ postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da je $[a_m, b_m] \subset (\alpha - \varepsilon_0, \alpha + \varepsilon_0) \subset \mathcal{O}_{\lambda_0}$. To znači da postoji konačan pokrivač skupa $[a_m, b_m] \cap A$, što je u kontradikciji sa konstrukcijom niza zatvorenih intervala $\{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Dakle, skup A ima Hajne–Borelovo svojstvo.

$(4) \Rightarrow (1)$ Neka skup A ima Hajne– Borelovo svojstvo. Ako je skup A konačan, onda (1) trivijalno važi, pa stoga pretpostavljamo da je A beskonačan. Dokazaćemo svojstvo (2) iz kojeg sledi (1). Pretpostavimo da je S beskonačan podskup skupa A koji nema tačku nagomilavanja u skupu A. To znači da za svaki element $a \in A \setminus S$ postoji okolina $\mathcal{O}_a$ za koju važi $\mathcal{O}_a \cap S = \emptyset$. Takođe, ako $s \in S$, onda s nije tačka nagomilavanja skupa S, jer je $S \subset A$, pa postoji okolina $\mathcal{O}_s \cap S = \{s\}$. Kako je

$$A \subset \left(\cup_{a \in A \setminus S} \mathcal{O}_a \right) \cup \left(\cup_{s \in S} \mathcal{O}_s \right),$$

iz pokrivača koji se sastoji od skupova $\mathcal{O}_a$, $a \in A \setminus S$ i $\mathcal{O}_s$, $s \in S$, se ne može izdvojiti konačan potpokrivač, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da skup A ima Hajne- Borelovo svojstvo.

$(4) \Rightarrow (5)$ Neka je $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ kolekcija zatvorenih podskupova skupa A koja ima svojstvo konačnog preseka. Napominjemo da se svi skupovi posmatraju u topološkom prostoru $(A, \mathcal{O}_A)$, potprostoru prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$. To znači da je, na primer A otvoren skup u $(A, \mathcal{O}_A)$, iako je on zatvoren skup u $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$.

Pretpostavimo da je $\cap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \emptyset$. Tada je

$$A = A \setminus (\cap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda) = \cup_{\lambda \in \Lambda} (A \setminus F_\lambda).$$

Dakle, $\{A \setminus F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ je otvoreni pokrivač skupa A, pa postoji konačan skup indeksa λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ tako da je

$$A \subset \cup_{1 \leq k \leq n} (A \setminus F_{\lambda_k}).$$

Odavde sledi $\cap_{1\leq k\leq n}F_{\lambda_k} = \emptyset$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ima svojstvo konačnog preseka.

(5) $\Rightarrow$ (4) Neka je $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ otvoreni pokrivač skupa A. Dakle, $A \subset \cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda$ odakle sledi $\cap_{\lambda\in\Lambda}(A \setminus \mathcal{O}_\lambda) = \emptyset$. Pošto su skupovi $A \setminus \mathcal{O}_\lambda$ zatvoreni (u topološkom prostoru $(A, \mathcal{O}_A)$), sledi da postoji konačno mnogo indeksa $= 1, 2, \ldots, n$ tako da je $\cap_{1\leq k\leq n}(A \setminus \mathcal{O}_{\lambda_k}) = \emptyset$, jer bi u suprotnom familija $\{A\setminus\mathcal{O}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ imala svojstvo konačnog preseka, pa bi bilo $\cap_{\lambda\in\Lambda}(A\setminus\mathcal{O}_\lambda) \neq \emptyset$. Dakle, $A \setminus \cup_{1\leq k\leq n}\mathcal{O}_{\lambda_k} = \emptyset$, odnosno $A \subset \cup_{1\leq k\leq n}\mathcal{O}_{\lambda_k}$, pa skup A ima Hajne–Borelovo svojstvo čime je teorema dokazaa. $\square$

Čitaocu za vežbu ostavljamo da, koristeći Hajne–Borelovo svojstvo, dokaže da su zatvoreni intervali kompaktni skupovi u prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$.

Bibliografija

[1] S. Abbott, Understanding Analysis, second edition, Springer, New York, NY, 2015.

[2] M. Aigner, G. M. Ziegler, Proofs from the Book, Springer, Berlin, 2009.

[3] S. Aljančić, Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Zavod za udžbenike, Beograd, 2011.

[4] E. D. Bloch The Real Numbers and Real Analysis, Springer, 2011.

[5] M. Božić, Pregled istorije i filozofije matematike, Zavod za udžbenike, Beograd, 2010.

[6] R. Courant, H. Robbins, revised by I. Stewart, What is Mathematics, Oxford University Press, 1996.

[7] Lj. Gajić, Predavanja iz uvoda u analizu, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, 2004.

[8] J. Gray, The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century, Springer, 2015.

[9] E. Hairer, G. Wanner, Analysis by Its History, Springer, 1996.

[10] P. Harli, Kratak uvod u logiku, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[11] I. Kleiner, Excursions in the History of Mathematics, Birkhäuser, Basel, 2012.

[12] G. Lebanon, Probability: The Analysis of Data, Volume 1, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2012.

[13] M. Kurilić, diskusije na temu predavanja, 2014.

[14] S. A. Morris, Topology Without Tears, 1985–2020, http://www.topologywithouttears.net/topbook.pdf

[15] C. A. Pickover, The Math Book, Barnes & Noble, 2013.

[16] C. A. Pickover, Wonders of Numbers, Oxford University Press, 2000.

[17] M. Rašković, N. Ikodinović, Priče o malim i velikim brojevima, Zavod za udžbenike, Beograd, 2010.

[18] J. D. Sally and P. J. Sally, Jr., Roots to Research: A Vertical Development of Mathematical Problems AMS, 2007.

[19] R. S. Strichartz, The Way of Analysis, Jones and Bartlett Publishers, 2000.

[20] N. Teofanov, Skripte za predmet Uvod u analizu, https://personal.pmf.uns.ac.rs/nenad.teofanov/teaching/uvod-u-analizu/

[21] F. van de Bult, lecture notes 2009, http://math.caltech.edu/ ma108a/defreals.pdf