Furijeova analiza (30. XII 2020.)
dr Nenad Teofanov

1. Jedna neprekidna nigde diferencijabilne funkcija

U primeru koji sledi koristili smo knjigu T. W. Körner, *Fourier analysis*, Cambridge University Press, 1988.

Posmatra se funkcionalni red $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\sin(n!^2 x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Iz Vajerštrasovog kriterijuma sledi da taj red uniformno konvergira na svakom intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Njegova granica je neprekidna $2\pi-$periodična funkcija, označimo je sa $f(x)$.

U nastavku se koriste sledeće činjenice:

a) $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{2}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$;

b) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$;

c) Neka $x \in \mathbb{R}$ (ili bilo kojem intervalu dužine barem 2π). Tada postoji $\tilde{x} \in (-\pi, \pi]$ (ili u bilo kojem intervalu dužine barem 2π) tako da važi $|\sin x - \sin \tilde{x}| = 1$.

Dokaz a) Iz

$$(n+k)! = (n+k)\cdot(n+k-1)\cdot\dots\cdot(n+1)\cdot n! \geq \overbrace{2\cdot 2\cdot\ldots 2}^{k \text{ puta}}\cdot n! = 2^k n!,$$

za svaki broj $k \in \mathbb{N}$, sledi

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{2}{n!}, \quad n \in \mathbb{N};$$

b) Neka je $x < y$ (za $x = y$ dobija se $0 \leq 0$). Iz teoreme srednje vrednosti za interval $[x, y]$ sledi da postoji $\theta \in (x, y)$ tako da važi

$$|\sin x - \sin y| = |\cos\theta||x - y| \leq |x - y|.$$

c) Neka je x bilo koji zadat broj i neka je T interval dužine 2π. Na primer, neka je $T = (x + \pi, x + 3\pi]$.

Ako je $0 \leq \sin x \leq 1$, onda $-1 + \sin x \in [-1, 0]$. S obzirom da je funkcija $\sin t$ sirjektivno preslikavanje iz T u $[-1, 1]$, tada postoji $\tilde{x} \in T$ tako da je $\sin\tilde{x} = -1 + \sin x$. Za tako izabran broj $\tilde{x}$ važi $|\sin x - \sin\tilde{x}| = 1$.

Ako je, međutim, $-1 \leq \sin x < 0$, onda $1 + \sin x \in [0, 1)$. Kao i u prethodnom slučaju, iz sirjektivnosti funkcije $\sin t : T \mapsto [-1, 1]$, sledi da postoji $\tilde{x} \in T$ tako da je $\sin \tilde{x} = 1 + \sin x$. Za tako izabran broj $\tilde{x}$ važi $|\sin x - \sin \tilde{x}| = 1$. Ovim je c) dokazano.

S obzirom da je za svako $K \in \mathbb{N}$ funkcija $\sin Kt$ periodična sa periodom $2\pi/K$, na osnovu c) se zaključuje da za $x \in \mathbb{R}$ postoji $\tilde{x} \in (x + \pi/K, x + 3\pi/K]$ tako da važi $|\sin Kx - \sin K\tilde{x}| = 1$.

Sada se vraćamo na svojstva funkcije

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \sin(k!^2 x) + \frac{1}{n!} \sin(n!^2 x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sin(k!^2 x) \\ = h_n(x) + k_n(x) + r_n(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Neka je fiksiran broj $x \in \mathbb{R}$. Na osnovu c) može se izabrati niz brojeva x_n, $n \in \mathbb{N}$, tako da važi

$$\frac{\pi}{n!^2} < |x - x_n| \leq \frac{3\pi}{n!^2}$$

i pri tome je $|k_n(x) - k_n(x_n)| = \dfrac{1}{n!} |\sin(n!^2 x) - \sin(n!^2 x_n)| = \dfrac{1}{n!}$.

Za tako odabran niz, na osnovu b) i $|x - x_n| \leq 3\pi/n!^2$, dobija se

$$\begin{aligned} |h_n(x) - h_n(x_n)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} |k!^2 x - k!^2 x_n| \\ &= ((n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k!) |x - x_n| \\ &\leq ((n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} (n-2)!) |x - x_n| \\ &= 2(n-1)! |x - x_n| \leq \frac{6\pi}{n \cdot n!}. \end{aligned}$$

Konačno, na osnovu a) sledi

$$|r_n(x) - r_n(x_n)| \leq |r_n(x)| + |r_n(x_n)| \leq 2 \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{4}{(n+1)!}.$$

Za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_n) &\geq (k_n(x) - k_n(x_n)) - |h_n(x_n) - h_n(x)| - |r_n(x_n) - r_n(x)| \\ &\geq \frac{1}{n!} - \frac{6\pi}{n \cdot n!} - \frac{4}{(n+1)!} = \frac{1}{n!}(1 - \frac{6\pi}{n} - \frac{4}{n+1}), \end{aligned}$$

pri čemu se pretpostavlja da je niz x_n, $n \in \mathbb{N}$, izabran tako da važe sve do sada posmatrane procene.

S obzirom da je $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{6\pi}{n}+\frac{4}{n+1})=1$, za dovoljno velik broj $n\in\mathbb{N}$ je $0<\frac{6\pi}{n}+\frac{4}{n+1}<\frac{1}{2}$, pa je tada

$$|f(x)-f(x_n)|\geq\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2n!}.$$

Prema tome, kada $n\to\infty$ dobija se

$$\left|\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}\right|\geq\frac{1}{2n!}\cdot\frac{n!^2}{3\pi}=\frac{n!}{6\pi}\to\infty.$$

Zaključak: Za svaki broj $x\in\mathbb{R}$ postoji niz x_n, $n\in\mathbb{N}$ takav da je $\lim_{n\to\infty}|x-x_n|=0$, i da pri tome $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}|$ ne postoji.

To znači da ova neprekidna funkcija f nije diferencijabilna ni u jednoj tački domena.

Komentar Vajerštras je na predavanju u Kraljevskoj akademiji nauka u Berlinu, 18. jula 1872. godine, naveo primer neprekidne nigde diferencijabilne funkcije u obliku

$$\sum_{k=0}^{\infty}a^k\cos(b^k\pi x),\quad 0<a<1, ab>1+3\pi/2, b>1 \quad \text{je neparan broj.}$$

Jedna vizualizacija Vajerštrasove funkcije za razne vrednosti a i b se može videti na jutjub kanalu:

https://www.youtube.com/watch?v=jz1fugkBGNA

1916. godine, Hardi je pokazao da je dovoljno da važi $0<a<1$, $ab\geq 1$, i $b>1$.

Vajerštras je na svom predavanju spomenuo da je (oko 1861. godine) Riman[1] posmatrao funkciju $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin(k^2x)$. Takva funkcija ima (konačan) izvod samo u tačkama oblika $\pi\frac{2p+1}{2q+1}$, $p,q\in\mathbb{Z}$. U tim tačkama vrednost prvog izvoda je $-1/2$.

1879. godine, Darbu je dokazao da je funkcija $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sin((k+1)!x)$ neprekidna nigde diferencijablina.

1890. godine, Peano konstruiše neprekidnu funkciju iz intervala $[0,1]$ na kvadrat $[0,1]\times[0,1]$. Peanova funkcija je takođe primer nigde diferencijabilne funkcije.

[1]Riman je preminuo 1866. godine.