Izabrana poglavlja
primenjene analize
25. X 2018.
dr Nenad Teofanov

1. Uvodna razmatranja

U ovom predavanju se navodi jedna motivacija za proučavanje tema koje čine sadržaj kursa.

1.1. Linearni vremensko-invarijantni i vremensko-neprekidni sistemi. *Sistem* L je operator koji ulaznom signalu/funkciji f dodeljuje izlaz $y = L(f)$, koji se zove i *odziv sistema*. Sistem je linearan ako važi

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Vremenska neprekidnost sistema znači da su ulazna i izlazna funkcija definisane nad nekim vremenskim intervalom. Pretpostavlja se da su vrednosti ovih funkcija kompleksni brojevi. Sistem je invarijantan u vremenu ako iz $f(t) \mapsto y(t)$ sledi $f(t - t_0) \mapsto y(t - t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Za linearne vremensko-neprekidne i vremensko-invarijantne sisteme se koristi oznaka LTC.

Vremenski harmonik je signal oblika $ce^{i\omega t}$, gde su $c = Ae^{i\phi_0} \in \mathbb{C}$ i $\omega \in \mathbb{R}$ zadati, a $t \in \mathbb{R}$. Broj ω je frekvencija, $A \in \mathbb{R}$ amplituda, a $\phi_0 \in \mathbb{R}$ početna faza vremenskog harmonika $ce^{i\omega t} = Ae^{i\phi_0}e^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t + \phi_0)}$.

Ako je L LTC sistem, a f vremenski harmonik, onda je odziv sistema takodje vremenski harmonik oblika $\mathcal{H}(\omega)e^{i\omega t}$. Naime, ako je $Lf = y$, onda je

$$\begin{aligned} y(t - t_0) &= L(f(t - t_0)) = L(ce^{i\omega(t - t_0)}) \\ &= L(ce^{-i\omega t_0}e^{i\omega t}) = e^{-i\omega t_0}L(ce^{i\omega t}) = e^{-i\omega t_0}y(t), \end{aligned}$$

pa je (za $t = 0$ i $t_0 = -s$) $y(s) = y(0)e^{i\omega s}$, $s \in \mathbb{R}$.

Dakle, $L : e^{i\omega t} \mapsto \mathcal{H}(\omega)e^{i\omega t}$. Funkcija $\mathcal{H}(\omega) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se naziva *frekvencijski odziv sistema*, funkcija sistema ili funkcija prelaza (prenosa). Za $\mathcal{H}(\omega) = |\mathcal{H}(\omega)|e^{i\Phi(\omega)}$, modul $|\mathcal{H}(\omega)|$ je amplituda odziva, a argument $\Phi(\omega)$ faza odziva.

Primer 1.1. *U strujnom kolu sa generatorom napona $E(t)$, otpornikom R i kalemom L, jačina struje je data sa*

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-x)R/L}E(x)dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ako je ulaz u strujno kolo vremenski harmonik $e^{i\omega t}$, *onda je*

$$i(t) = \left(\frac{1}{L} \int_0^\infty e^{-\xi R/L} e^{-i\omega\xi} d\xi \right) e^{i\omega t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

pa je frekvencijski odziv u primeru strujnog kola

$$\mathcal{H}(\omega) = \frac{1}{L} \int_0^\infty e^{-\xi R/L} e^{-i\omega\xi} d\xi, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Ovo je, po definiciji, Furijeova transformacija funkcije $e^{-\xi R/L}$, $\xi \in \mathbb{R}$, *pa se direktnim računom, ili iz tablica Furijeovih transformacija dobija* $\mathcal{H}(\omega) = 1/(R + i\omega L)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Prema tome, frekvencijski odziv sistema u odnosu na vremenski harmonik se izražava preko Furijeove transformacije.

Sistem je *stabilan* ako je odziv svakog ograničenog signala ograničen.

1.2. **Impulsni odziv LCT sistema.** Furijeova transformacija ili spektar signala f se definiše nesvojstvenim integralom:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

pri čemu se ω interpretira kao ugaona frekvencija koja se meri u radijanima po sekundi. Modifikacija spektra F se dobija množenjem sa nekom pogodno odabranom funkcijom: $H(\omega) \cdot F(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$. Teorema o konvoluciji kaže da je $Y(\omega) = H(\omega)F(\omega)$ Furijeova transformacija konvolucije

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) h(t - x) dx = (f * h)(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

pri čemu su Y i H Furijeove transformacije funkcija y i h respektivno. Ako je, na primer, potrebno odstraniti frekvencije iznad unapred utvrđenog praga $\omega_0 > 0$, onda se $F(\omega)$ množi takozvanom blok funkcijom koja je jednaka sa 1 za $|\omega| \leq \omega_0$, a koja se inače anulira (za $|\omega| > \omega_0$). Kaže se da je signal f u tom slučaju propušten kroz *filter*.

Od posebnog značaja je jedinični element konvolucije. To je Dirakov delta impuls, δ koji se definiše kontradiktornim uslovima:

$$\delta(x - \xi) = 0, \ \ x \neq \xi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1,$$

$$\int_a^b \delta(x - \xi) dx = \begin{cases} 1, & a \leq \xi \leq b, \\ 0, & \text{inače} . \end{cases}$$

Uz izvesna pojašnjenja, može se pokazati da je Dirakova delta jedinični element konvolucije, odnosno,

$$f(t) = (f * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Na ovaj način je funkcija f prikazana uz pomoć neprekidne superpozicije delta impulsa $\delta(t-\tau)$. Naknadno ćemo dati primer realizacije delta impulsa kao limesa niza funkcija.

Posmatrajmo LCT sistem L. Svojstvo linearnosti se može proširiti na pravilo neprekidne superpozicije kojim se beskonačne sume zamenjuju integralima: $L\int = \int L$, pa važi

$$y(t) = Lf(t) = L(f*\delta)(t) = L\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)L\delta(t-\tau)d\tau.$$

Ako se uvede oznaka $h = L\delta$, iz linearnosti sistema dakle sledi

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = (f * h)(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Furijeova transformacija izlaza $Y(\omega) = H(\omega)\cdot F(\omega)$ je proizvod Furijeovih transformacija ulaza f i funkcije $h = L\delta$ koja se naziva *impulsni odziv sistema*.

LTC sistemi se karakterišu konvolucijom i impulsnim odzivom.

Veza između frekvencijskog odziva sistema $\mathcal{H}(\omega)$ i njegovog impulsnog odziva $h = L\delta$ se dobija iz:

$$Le^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)}h(\tau)d\tau = H(\omega)e^{i\omega t}.$$

Frekvencijski odziv sistema je Furijeova transformacija njegovog impulsnog odziva.

Ako je moguće primeniti formulu inverzne Furijeove transformacije za izlaz y, $y(t) = \frac{1}{2\pi}\int Y(\omega)e^{i\omega t}d\omega$, onda je

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)F(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Odavde sledi da je, za fiksirano t, svaka frekvencijska komponenta $e^{i\omega t}$ spektra F ulaznog signala f pojačana ili oslabljena sa $H = \mathcal{F}h$, pa ta funkcija ima ulogu filtriranja u frekvencijskom domenu, čime se opravdava naziv funkcija prenosa sistema.

Sledeća teorema karakteriše stabilnost sistema preko njegovog impulsnog odziva.

Teorema 1.2. *LCT sistem određen impulsnim odzivom $h = L\delta$ je stabilan ako i samo ako $h \in L^1(\mathbb{R})$, to jest $\int |h(t)|dt < \infty$.*

Dokaz. Neka je $|f(t)| \leq M$, $t \in \mathbb{R}$ i neka $h \in L^1(\mathbb{R})$. Važi:

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)||h(t-\tau)|d\tau \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|d\tau < \infty.$$

Obratni smer se dokazuje kontrapozicijom. Pretpostavimo da $h \notin L^1(\mathbb{R})$ i definišemo pomoćnu funkciju:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\overline{h(-t)}}{|h(-t)|}, & h(-t) \neq 0, \\ 0, & h(-t) = 0. \end{cases}$$

Funkcija f je ograničena, $|f(t)| \leq 1$ i

$$y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(0-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \infty.$$

Dakle, sistem nije stabilan. □

1.3. **Primer delta konvergentnog niza.** U vremensko-frekvencijskoj analizi (i u nastavku kursa) posebnu ulogu igraju gausovske funkcije. U opštem slučaju to su funkcije oblika $ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}$, gde su a, b, c realni parametri.

Dat je niz gausovskih funkcija $\{(m/\pi)^{1/2}e^{-mx^2}\}_{m\in\mathbb{N}}$. Dokažimo da ovaj niz ima svojstvo rasejanja:

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2} e^{-mx^2} f(x)dx = f(0),$$

gde je f ograničena, integrabilna i neprekidna u nuli. Drugim rečima, dati niz je delta-konvergentan u sledećem smislu:

Definicija 1.3. *Niz funkcija $\{s_m\}$ je delta konvergentan, u oznaci $\lim_{m\to\infty} s_m(t) = \delta(t)$, ako je*

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)f(t)dt = f(0),$$

za sve dovoljno glatke funkcije f.

Svojstvo rasejanja implicira $\lim\limits_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(x-t)f(x)dx = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, jer se smenom $x - t = s$ dobija

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(s)f(s+t)ds = f(0+t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ovim se opravdava naziv delta konvergentan niz.

Najpre dokazujemo da je $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$. Od nekoliko načina da se odredi vrednost ovog nesvojstvenog integrala, biramo onaj u kojem se koristi tehnika diferenciranja pod znakom integrala.

Za $t > 0$ posmatra se funkcija $F(t) = \left(\displaystyle\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2$. Važi:

$$F'(t) = 2e^{-t^2} \cdot \int_0^t e^{-x^2}dx = 2e^{-t^2} \cdot \int_0^1 te^{-t^2y^2}dy = \int_0^1 2te^{-(1+y^2)t^2}dy,$$

za sve $t > 0$. Kako je $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{e^{-(1+y^2)t^2}}{1+y^2}\right) = -2te^{-(1+y^2)t^2}$ dobija se

$$F'(t) = -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-(1+y^2)t^2}}{1+y^2}\right)dy = -\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2}}{1+y^2}dy = -\frac{d}{dt}G(t), \quad t > 0.$$

Odavde je $F(t) = -G(t) + C$, za neku konstantu $C \in \mathbb{R}$ i sve $t > 0$. Odredimo konstantu C koristeći graničnu vrednost kada t teži ka nuli:

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2 = -\lim_{t\to 0^+}\int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2}}{1+y^2}dy + C,$$

odakle je $0 = -\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy + C$, iz čega sledi $C = \pi/4$. Znači,

$$\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2}}{1+y^2}dy,$$

pa je

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4} - \lim_{t\to+\infty}\int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2}}{1+y^2}dy,$$

to jest $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Prema tome $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$. Smenom promenljive $x \mapsto \sqrt{m}y$ dobija se $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2} e^{-mx^2}dx = 1$.

Sada dokazujemo svojstvo rasejanja. S obzirom da je ograničenost funkcije njeno globalno svojstvo, a neprekidnost u nuli lokalno, funkciju

f zapisujemo u obliku $f(x) = f(0) + (f(x) - f(0))$:

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2} e^{-mx^2} f(x)dx$$
$$= f(0) + \lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2} e^{-mx^2} (f(x) - f(0))dx,$$

i pokazujemo da drugi sabirak teži ka nuli kada $m \to \infty$. Za proizvoljno $A > 0$ važi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2} e^{-mx^2} (f(x) - f(0))dx$$
$$= \int_{-\infty}^{-A} + \int_{-A}^{A} + \int_{A}^{\infty} \left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2} e^{-mx^2} (f(x) - f(0))dx.$$

Iz ograničenosti funkcije f sledi da je $|f(x)-f(0)| \leq M$, za neko $M > 0$, odakle je

$$|\int_{-\infty}^{-A} \left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2} e^{-mx^2} (f(x) - f(0))dx|$$
$$\leq M \int_{-\infty}^{-A} |\left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2} e^{-mx^2}|dx = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-A\sqrt{m}} e^{-y^2} dy \to 0,$$

kada $m \to \infty$. Slično,

$$\lim_{m\to\infty} \int_{A}^{\infty} \left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2} e^{-mx^2} (f(x) - f(0))dx = 0.$$

Konačno, iz neprekidnosti funkcije f za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ kadgod je $|x| < \delta$, birajući $A < \delta/2$ dobija se

$$|\int_{-A}^{A} \left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2} e^{-mx^2} (f(x)-f(0))dx| \leq \int_{-A}^{A} \left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2} e^{-mx^2} |f(x)-f(0)|dx$$
$$\leq \varepsilon \int_{-A}^{A} \left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2} e^{-mx^2} dx = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_{-A\sqrt{m}}^{A\sqrt{m}} e^{-y^2} dy \to \varepsilon,$$

kada $m \to \infty$.

Ovim je dokazano da je $\lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2} e^{-mx^2} f(x)dx = f(0)$, pa je niz gausovskih funkcija $\{(m/\pi)^{1/2} e^{-mx^2}\}_{m\in\mathbb{N}}$ jedan delta konvergentan niz.

1.4. **Rezime.**

(1) Definisati LCT sistem, frekvencijski odziv i impulsni odziv sistema i pokazati da je frekvencijski odziv sistema Furijeova transformacija njegovog impulsnog odziva.

(2) Formulisati i dokazati tvrđenje koje karakteriše stabilnost sistema pomoću njegovog impulsnog odziva.

(3) Dokazati da je $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/2} e^{-mx^2} dx = 1$.

(4) Definisati delta konvergentan niz i dokazati da je niz gausovskih funkcija primer delta konvergentnog niza.