Izabrana poglavlja
primenjene analize
15. XI 2018.

1. Kratkotrajna Furijeova transformacija

U predavanju se izlažu osnovna svojstva kratkotrajne Furijeove transformacije. Radi jednostavnosti izlaganja, pretpostavlja se da su sve funkcije elementi Švarcovog prostora $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Proširenje rezultata na $L^2(\mathbb{R}^d)$ se dobija argumentom gustine, ali ovom prilikom izostavljamo detalje.

Definicija 1.1. *Neka je data* prozorska *funkcija* $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$. *Kratkotrajna Furijeova transformacija (STFT) funkcije* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *u odnosu na prozor* g *data sa*

$$V_g f(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)} e^{-2\pi i t\omega} dt, \quad x, \omega \in \mathbb{R}^d.$$

Osnovna svojstva kratkotrajne Furijeove transformacije se izvode korišćenjem identiteta i tehnika koje smo upoznali pri proučavanju Furijeove transformacije. Na primer, Parsevalova formula:

$$\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle,$$

relacija za komutativnost (izmenu redosleda) translacije i modulacije:

$$T_x M_\omega = e^{-2\pi i x\cdot\omega} M_\omega T_x,$$

odnos Furijeove transformacije modulacije i translacije:

$$(T_x f)\hat{} = M_{-x}\hat{f} \quad \text{i} \quad (M_\omega f)\hat{} = T_\omega \hat{f}.$$

Odavde sledi

$$(M_\omega T_x f)\hat{} = T_\omega M_{-x}\hat{f} \quad \text{kao i} \quad (T_x M_\omega f)\hat{} = M_{-x} T_\omega \hat{f},$$

što će se koristiti u nastavku. Zatim, za konvoluciju smo pokazali da važi:

$$(f * g)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Lema 1.2. *Neka* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. *Tada se operacija konvolucije može napisati kao skalarni proizvod translacije i involucije:*

$$(f * g)(x) = \langle f, T_x g^*\rangle,$$

pri čemu je involucija funkcije f *data sa* $f^*(x) = \overline{f(-x)}$. *Takođe, Furijeova transformacija proizvoda* $f \cdot g$ *jednaka je konvoluciji* $\hat{f} * \hat{g}$.

Dokaz. Važi:

$$
\begin{aligned}
(f * g)(x) &= \int f(y)g(x-y)dy \\
&= \int f(y)\overline{\overline{g(-(y-x))}}dy \\
&= \int f(y)\overline{T_x g^*(y)}dy \\
&= \langle f, T_x g^* \rangle .
\end{aligned}
$$

Koristeći formulu inverzije $f(x) = \int \hat{f}(\eta)e^{2\pi i x\eta}d\eta$ i teoremu Fubinija lako se dokazuje da je $(fg)\hat{}(\omega) = (\hat{f} * \hat{g})(\omega)$:

$$
\begin{aligned}
(fg)\hat{}(\omega) &= \int f(x)g(x)e^{-2\pi i x\omega}dx \\
&= \int (\int \hat{f}(\eta)e^{2\pi i x\eta}d\eta)g(x)e^{-2\pi i x\omega}dx \\
&= \int \hat{f}(\eta)(\int g(x)e^{-2\pi i x(\omega-\eta)}dx)d\eta \\
&= \int \hat{f}(\eta)\hat{g}(\omega-\eta)d\eta \\
&= (\hat{f} * \hat{g})(\omega).
\end{aligned}
$$

□

Pre nego što dokažemo sledeću teoremu primetimo da je $(M_\omega g^*)^* = M_\omega g$. Naime,

$$
\begin{aligned}
(M_\omega g^*)^*(x) &= \overline{M_\omega g^*}(-x) \\
&= \overline{e^{2\pi i\omega(-x)}g^*(-x)} \\
&= e^{2\pi i\omega x}\overline{\overline{g(x)}} \\
&= e^{2\pi i\omega x}g(x) = M_\omega g(x).
\end{aligned}
$$

Teorema 1.3. *Neka $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Tada je funkcija $V_g f$ uniformno neprekidna na $\mathbb{R}^{2d}$ i važi:*

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad & V_g f(x,\omega) &= (f \cdot T_x \overline{g})\hat{}(\omega)\\
&(2) & &= \langle f, M_\omega T_x g\rangle\\
&(3) & &= \langle \hat{f}, T_\omega M_{-x}\hat{g}\rangle\\
&(4) & &= e^{-2\pi i x\cdot\omega}(\hat{f}\cdot T_\omega \overline{\hat{g}})\hat{}(-x)\\
&(5) & &= e^{-2\pi i x\cdot\omega} V_{\hat{g}}\hat{f}(\omega,-x)\\
&(6) & &= (\hat{f} * M_{-x}\hat{g}^*)(\omega)\\
&(7) & &= e^{-2\pi i x\cdot\omega}(f * M_\omega g^*)(x)\\
&(8) & &= e^{-\pi i x\cdot\omega}\int_{\mathbb{R}^d} f(t+\frac{x}{2})\,\overline{g}(t-\frac{x}{2})e^{-2\pi i t\cdot\omega}dt.
\end{aligned}
$$

Napomena 1.4. *Teorema važi i za $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Dokaz. Na ovom mestu neće se dokazivati uniformna neprekidnost. Jednakost (1) direktno sledi iz definicije:

$$V_g f(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\cdot\overline{g(t-x)}\cdot e^{-2\pi i t\cdot\omega}dt = (f\cdot T_x\overline{g})\hat{}(\omega).$$

Dalje je

$$(f\cdot T_x\overline{g})\hat{}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\cdot\overline{e^{2\pi i t\cdot\omega}\cdot T_x g(t)}dt = \langle f, M_\omega T_x g\rangle,$$

a to je (2). Iz Parsevalove jednakosti i odnosa Furijeove transformacije sa operacijama translacije i modulacije sledi jednakost (3):

$$\langle f, M_\omega T_x g\rangle = \langle \hat{f}, (M_\omega T_x g)\hat{}\,\rangle = \langle \hat{f}, T_\omega M_{-x}\hat{g}\rangle.$$

Koristeći (1) $\Leftrightarrow$ (2) (primenjeno na $\hat{f}$ i $\hat{g}$ umesto na f i g dobijaju se (4) i (5):

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{f}, T_\omega M_{-x}\hat{g}\rangle &= \langle \hat{f}, e^{2\pi i x\omega}M_{-x}T_\omega\hat{g}\rangle = e^{-2\pi i x\omega}\langle \hat{f}, M_{-x}T_\omega\hat{g}\rangle\\
&= e^{-2\pi i x\omega}(\hat{f}\cdot T_\omega\overline{\hat{g}})\hat{}(-x) = e^{-2\pi i x\omega}V_{\hat{g}}\hat{f}(\omega,-x).
\end{aligned}
$$

Ovde smo koristili

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{f}, M_{-x}T_\omega\hat{g}\rangle &= \int \hat{f}(\eta)\overline{e^{-2\pi i x\eta}\hat{g}(\eta-\omega)}d\eta\\
&= \int \hat{f}(\eta)e^{-2\pi i(-x)\eta}\overline{T_\omega\hat{g}(\eta)}d\eta\\
&= (\hat{f}\cdot T_\omega\overline{\hat{g}})\hat{}(-x).
\end{aligned}
$$

Iz Leme 1.2 sledi

$$V_g f(x,\omega) = (f \cdot T_x \overline{g})\hat{}(\omega) = (\hat{f} * (T_x \overline{g})\hat{})(\omega).$$

Kako je $(T_x\overline{g})\hat{} = M_{-x}\hat{\overline{g}}$ dobija se (6):

$$V_g f(x,\omega) = (\hat{f} * M_{-x}\hat{\overline{g}})(\omega) = (\hat{f} * M_{-x}\hat{g}^*)(\omega),$$

jer je

$$\begin{aligned}\hat{\overline{g}}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g}(x) e^{-2\pi i x\omega} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x) e^{2\pi i x\omega}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x) e^{-2\pi i x(-\omega)}} dx = \overline{\hat{g}(-\omega)} = \hat{g}^*(\omega).\end{aligned}$$

Formula (7) sledi iz $(M_\omega g^*)^* = M_\omega g$ i zapisivanja translacije u vidu konvolucije:

$$\langle f, T_x M_\omega g\rangle = \langle f, T_x (M_\omega g^*)^*\rangle = (f * M_\omega g^*)(x).$$

Konačno, (8) se dobija smenom promenljive $t \mapsto t + x/2.$ integralu.

$\square$

Formule navedene u prethodnoj teoremi predstavljaju različite oblike kratkotrajne Furijeove transformacije (STFT):

a) U formulama (2) i (3) $V_g f$ je zapisana kao skalarni proizvod funkcije f ($\hat{f}$) sa odgovarajućim vremensko-frekvencijskim pomeranjima funkcije g ($\hat{g}$).

b) U formulama (1) i (4) STFT je zapisana kao (lokalna) Furijeova transformacija funkcija f i $\hat{f}$;

c) U formulama (6) i (7) STFT je zapisana kao konvolucija.

Formula $V_g f(x,\omega) = e^{-2\pi i x\cdot\omega} V_{\hat{g}} \hat{f}(\omega, -x)$ se naziva *osnovni identitet vremensko-frekvencijske analize.*

Neka je $f \otimes g$ tenzorski proizvod dat sa $(f \otimes g)(x,t) = f(x)g(t)$, neka je $\mathcal{T}_a$ asimetrična transformacija koordinata data sa

$$\mathcal{T}_a F(x,t) = F(t, t-x)$$

i neka je $\mathcal{F}_2$ parcijalna Furijeova transformacija funkcije F definisane na $\mathbb{R}^{2d}$ po promenljivoj $\omega \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{F}_2 F(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x,t) e^{-2\pi i t\cdot\omega} dt.$$

STFT se, prema tome može zapisati i u sledećem obliku:

$$V_g f = \mathcal{F}_2 \mathcal{T}_a (f \otimes \overline{g}).$$

Lema 1.5. *Kad god je $V_g f$ definisano važi:*

(9) $\quad V_g(T_u M_\eta f)(x,\omega) = e^{-2\pi i u\cdot\omega} V_g f(x-u, \omega-\eta), \quad x,u,\omega,\eta \in \mathbb{R}^d.$

Dokaz. Uvrstivši relaciju komutativnosti $M_{-\eta}T_{-u}M_\omega T_x = e^{2\pi i u\cdot\omega}M_{\omega-\eta}T_{x-u}$ u definiciju dobija se

$$\begin{aligned}
V_g(T_uM_\eta f)(x,\omega) &= \langle T_uM_\eta f, M_\omega T_x g\rangle \\
&= \langle f, M_{-\eta}T_{-u}M_\omega T_x g\rangle \\
&= \langle f, e^{2\pi i u\cdot\omega}M_{\omega-\eta}T_{x-u}g\rangle \\
&= e^{-2\pi i u\cdot\omega}\langle f, M_{\omega-\eta}T_{x-u}g\rangle \\
&= e^{-2\pi i u\cdot\omega}V_gf(x-u,\omega-\eta).
\end{aligned}$$

□

1.1. **Relacija ortogonalnosti i formula inverzije.** Kratkotrajna Furijeova transformacija poseduje određene osobine slične onima koje poseduje Furijeova transformacija. Sledeća teorema o skalarnom proizvodu dve STFT odgovara Parsevalovoj formuli i često se koristi.

Teorema 1.6. (Relacije ortogonalnosti za STFT) *Neka* $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. *Tada* $V_{g_j}f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ *za* $j=1,2$, *i važi*

$$\langle V_{g_1}f_1, V_{g_2}f_2\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \langle f_1, f_2\rangle\overline{\langle g_1, g_2\rangle}. \tag{10}$$

Dokaz. Korisitmo najpre zapis STFT dat sa (2), a zatim Parsevalovu jednakost primenjenu na integral po promenljivoj ω:

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} V_{g_1}f_1(x,\omega)\overline{V_{g_2}f_2(x,\omega)}d\omega dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}(f_1\cdot T_x\overline{g_1})\hat{}(\omega)\overline{(f_2\cdot T_x\overline{g_2})\hat{}(\omega)}d\omega\Big)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} f_1(t)\cdot T_x\overline{g_1(t)}\cdot\overline{f_2(t)\cdot T_x\overline{g_2(t)}}dt\Big)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}(f_1(t)\cdot\overline{f_2(t)}\cdot\overline{g_1(t-x)}\cdot g_2(t-x)dt\Big)dx.
\end{aligned}$$

pri čemu Fubinijeva teorema dozvoljava promenu redosleda integracije. Dakle,

$$\begin{aligned}
\langle V_{g_1}f_1, V_{g_2}f_2\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} &= \int_{\mathbb{R}^d} f_1(t)\overline{f_2(t)}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\overline{g_1(t-x)}g_2(t-x)dx\Big)dt \\
&= \langle f_1, f_2\rangle\,\overline{\langle g_1, g_2\rangle}.
\end{aligned}$$

□

Posledica 1.7. *Ako* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, *tada je* $\|V_gf\| = \|f\|\|g\|$. *Posebno, ako je* $\|g\| = 1$ *tada je*

$$\|f\| = \|V_gf\| \tag{11}$$

za sve $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$*, odnosno STFT je izometrija iz* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *u* $L^2(\mathbb{R}^{2d})$.

Ostaje pitanje kako iz $V_g f$ da dobijemo funkciju f, odnosno da li postoji formula inverzije za STFT i u kom smislu. Najpre uvodimo *jednakost u slabom smislu*: Dve funkcije f i $\tilde{f}$ su jednake u slabom smislu u $L^2(\mathbb{R}^d)$ ako je

$$\langle f, h\rangle = \langle \tilde{f}, h\rangle, \quad \forall h \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Tada je $\langle f - \tilde{f}, h\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}(f(x) - \tilde{f}(x))\overline{h(x)}dx = 0$, za sve $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Ako je $h = f - \tilde{f}$, dobija se $\|f - \tilde{f}\| = 0$, pa iz slabe jednakosti sledi jednakost u normi.

Teorema 1.8. (Formula inverzije za STFT) *Pretpostavimo da* $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *i* $\langle g, \gamma\rangle \neq 0$*. Tada za sve* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *važi*

$$f = \frac{1}{\langle \gamma, g\rangle} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x,\omega) M_\omega T_x \gamma \, d\omega \, dx \tag{12}$$

u slabom smislu.

Dokaz. Kako je $V_g f(x,\omega) = \langle f, M_\omega T_x g\rangle$, dobija se

$$\overline{V_\gamma h}(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{h}(t) M_\omega T_x \gamma(t) dt,$$

pa je $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x,\omega) \cdot \overline{V_\gamma h}(x,\omega)\, dx\, d\omega$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x,\omega) \cdot M_\omega T_x \gamma(t)\, dx\, d\omega \right) \overline{h}(t) dt \\ &= \langle \iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x,\omega) \cdot M_\omega T_x \gamma \;\, dx\, d\omega, h\rangle. \end{aligned}$$

Na osnovu relacije ortogonalnosti važi

$$\langle f, h\rangle = \frac{1}{\langle \gamma, g\rangle} \cdot \langle V_g f, V_\gamma h\rangle$$

$$= \langle \left(\iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x,\omega) \cdot M_\omega T_x \gamma \;\, dx\, d\omega \right), h\rangle, \quad \forall h \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

odakle sledi (12).

$\square$

1.2. **Rezime.**

(1) Definicija STFT i detaljna argumentacija za
$$V_g f(x,\omega) = (\hat{f} * M_{-x}\hat{g}^*)(\omega).$$
(2) Definicija STFT i detaljna argumentacija za
$$V_g f(x,\omega) = e^{-2\pi i x\cdot\omega}(\hat{f}\cdot T_\omega \overline{\hat{g}})\hat{}(-x).$$
(3) Definicija STFT i detaljna argumentacija za osnovni identitet vremensko-frekvencijske analize,
$$V_g f(x,\omega) = e^{-2\pi i x\cdot\omega} V_{\hat{g}}\hat{f}(\omega,-x).$$
(4) Definicija STFT i detaljna argumentacija za
$$V_g f(x,\omega) = e^{-2\pi i x\cdot\omega}(f * M_\omega g^*)(x).$$
(5) Definicija STFT i dokaz jednakosti
$$V_g(T_u M_\eta f)(x,\omega) = e^{-2\pi i u\cdot\omega} V_g f(x-u,\omega-\eta), \quad x,u,\omega,\eta \in \mathbb{R}^d.$$
(6) Relacija ortogonalnosti za STFT.
(7) Formula inverzije za STFT.