Izabrana poglavlja
primenjene analize
29. XII 2018.

1. Malotalasna transformacija

Definicija 1.1. *Mali talas*[1] *je funkcija* $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus 0$ *za koju važi:*

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty, \tag{1}$$

a malotalasna transformacija je definisana sa

$$(T^{wav} f)(a,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |a|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi(\frac{x-t}{a})} f(x) dx, \tag{2}$$

za $a \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Primetimo da iz $C_\psi < \infty$ sledi $\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0$, pa funkcija ψ osciluje i opada u beskonačnosti, zbog čega je prozvana malim talasom, to jest talasićem.

Da važi $C_\psi < \infty$ dovoljno je da važi $\hat{\psi}(0) = 0$ i da je $\hat{\psi}(\omega)$ neprekidno diferencijabilna funkcija. Na primer, iz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|t|)|\psi(t)|dt < \infty$$

sledi da je $\hat{\psi}(\omega)$ neprekidno diferencijabilna.

Na primer, funkcija g data sa

$$g(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq u < 1, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

je jedan mali talas, koji se naziva Harovim vejvletom.

Koristeći operatore translacije i dilatacije malotalasna transformacija se može zapisati u sledećem obliku:

$$(T^{wav} f)(a,t) = \langle f, T_t D_{1/a} g \rangle = (f * D_{1/a} g^*)(t), \quad a \neq 0, \ t \in \mathbb{R}.$$

Kao i kod kratkotrajne Fujeove transformacije, polazni signal se može rekonstruisati iz svoje vejvlet transformacije. Dokažimo najpre relaciju ortogonalnosti za malotalasnu transformaciju.

[1] engl. wavelet

Teorema 1.2. *Neka je $\psi \neq 0$ proizvoljan mali talas. Tada za sve $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ važi*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T^{wav}f(a,b)\overline{T^{wav}g(a,b)}\frac{dadb}{a^2} = C_\psi\langle f, g\rangle, \tag{3}$$

gde je C_ψ definisano sa (1).

Dokaz. Bez dodatnih objašnjenja koristiće se Fubinijeva teorema po potrebi. Iz Parsevalove jednakosti sledi

$$\langle f, T_t D_{1/a} g\rangle = \langle \hat{f}, (T_t D_{1/a} g)\hat{}\ \rangle = \langle \hat{f}, M_{-t} D_a \hat{g}\ \rangle$$

pa je

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T^{wav}f(a,b)\overline{T^{wav}g(a,b)}\frac{dadb}{a^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)|a|^{\frac{1}{2}}e^{2\pi ib\xi}\overline{\hat{\psi}(a\xi)}d\xi][\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\hat{g}(\xi')}|a|^{\frac{1}{2}}e^{-2\pi ib\xi'}\hat{\psi}(a\xi')d\xi']\frac{dadb}{a^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi ib(\xi'-\xi)}db\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)|a|^{\frac{1}{2}}\overline{\hat{\psi}(a\xi)}d\xi][\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\hat{g}(\xi')}|a|^{\frac{1}{2}}\hat{\psi}(a\xi')d\xi']\frac{da}{a^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}[\iint_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{\psi}(a\xi)}\overline{\hat{g}(\xi')}\hat{\psi}(a\xi')\delta(\xi-\xi')d\xi d\xi']\frac{da}{|a|}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\psi}(a\xi)|^2\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi\frac{da}{|a|},$$

pri čemu smo koristili $\hat{\delta} = 1$, odnosno $\delta(\cdot) = \hat{1} = \int e^{-2\pi x\cdot}dx$. Ovo je formalni zapis u kojem se manipuliše divergentim integralima, a strogi matematički dokaz datih jednakosti se može dobiti, na primer korišćenjem delta konvergentnih nizova. Uz to, koristili smo $\delta(\xi-\xi') = \delta(\xi'-\xi)$ i

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\hat{g}(\xi')}\hat{\psi}(a\xi')\delta(\xi-\xi')d\xi' = (\delta * (\overline{\hat{g}(\cdot)}\hat{\psi}(a\cdot))(\xi) = \overline{\hat{g}(\xi)}\hat{\psi}(a\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Smenom $a\xi \mapsto y$ dobija se

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\psi}(a\xi)|^2\frac{da}{|a|} = \int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\psi}(y)|^2\frac{dy}{|y|} = C_\psi,$$

pa je

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T^{wav}f(a,b)\overline{T^{wav}g(a,b)}\frac{dadb}{a^2} = C_\psi\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = C_\psi\langle f, g\rangle.$$

$\square$

Kao i u lekciji o STFT, istom argumentacijom zaključujemo da se formula (3) može čitati i kao

$$f = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T^{wav} f(a,b) \psi^{a,b} \frac{dadb}{a^2}$$

gde je $\psi^{a,b}(x) = |a|^{1/2} \psi(\frac{x-b}{a})$, pri čemu je jednakost u slabom smislu, to jest

$$\langle C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T^{wav} f(a,b) \psi^{a,b} \frac{dadb}{a^2}, h \rangle = \langle f, h \rangle, \quad \forall h \in L^2(\mathbb{R}).$$

Takođe, pri sintezi signala moguće je izabrati drukčiji mali talas od onog koji je korišćen za analizu. Preciznije, ako je

$$C_{\psi_1,\psi_2} = \int |\xi|^{-1} |\hat{\psi}_1(\xi)| \hat{\psi}_2(\xi)| d\xi < \infty,$$

istom argumentacijom kao i u dokazu formule (3) dokazuje se da važi

$$\iint \langle f, \psi_1^{a,b} \rangle \langle g, \psi_2^{a,b} \rangle \frac{dadb}{a^2} = C_{\psi_1,\psi_2} \langle f, g \rangle.$$

Za $C_{\psi_1,\psi_2} \neq 0$ se dobija

$$f = C_{\psi_1,\psi_2}^{-1} \iint \langle f, \psi_1^{a,b} \rangle \psi_2^{a,b} \frac{dadb}{a^2},$$

gde je jednakost u slabom smislu.

Na kraju, bez dokaza navodimo jedan dovoljan uslov za tačkastu konvergenciju.

Lema 1.3. *Neka $\psi_1, \psi_2 \in L^1(\mathbb{R})$, tako da je ψ_2 diferencijabilna, $\psi_2' \in L^2(\mathbb{R})$, i $x\psi_2 \in L^2(\mathbb{R})$ i neka je $\hat{\psi}_1(0) = 0 = \hat{\psi}_2(0)$. Ako je $f \in L^2(\mathbb{R})$ ograničena, tada u svakoj tački x u kojoj je f neprekidna važi*

$$f(x) = C_{\psi_1,\psi_2}^{-1} \lim_{\substack{A_1 \to 0 \\ A_2 \to \infty}} \int_{A_1 \le |a| \le A_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_1^{a,b} \rangle \psi_2^{a,b}(x) \frac{dadb}{a^2}$$

1.1. **Rezime.**

(1) Definicija malog talasa, malotalasne transformacije (WT) i dokaz relacije ortogonalnosti za WT.

(2) Definicija malog talasa, malotalasne transformacije (WT) i detaljan dokaz formule inverzije

$$f = C_{\psi_1,\psi_2}^{-1} \iint \langle f, \psi_1^{a,b} \rangle \psi_2^{a,b} \frac{dadb}{a^2}.$$