Izabrana poglavlja
primenjene analize
01. XI 2018.

# 1. Furijeova transformacija u $L^1(\mathbb{R})$

U ovom predavanju se proučavaju osnovna svojstva Furijeove transformacije. Pretpostavlja se da je čitalac upoznat sa Banahovim prostorima $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$. Posebno, koristiće se norme:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx, \\
\|f\|_{L^2} &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^2, \\
\|f\|_{L^\infty} &= \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \inf\{M \ : \ f \leq M \quad skoro \quad svuda\}.
\end{aligned}$$

Pri tome, $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p = \{1, 2, \infty\}$ kao i samo ako su odgovarajuće norme konačne. Elemente prostora $L^p(\mathbb{R})$, $p = \{1, 2, \infty\}$ nazivamo integrabilnim, kvadrat integrabilnim i esencijalno ograničenim funkcijama.

## 1.1. **Motivacija.**

U kursu Furijeove analize posmatra se Hilbertov prostor kvadrat integrabilnih funkcija $L^2(0, 1)$ i dokazuje se da je skup funkcija $\{e^{2\pi i n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ potpun sistem ortogonalnih funkcija, odakle sledi razvoj u Furijeov red proizvoljne funkcije $f \in L^2(0, 1)$:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}, \quad x \in [0, 1],$$

gde je $c_n = \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx$, $n \in \mathbb{Z}$. Pri tome je jednakost u normi prostora $L^2(0, 1)$.

Ovde uočavamo operatore *analize*:

$$C : L^2(0, 1) \to l^2(\mathbb{Z}), \quad Cf = \{c_n\}$$

i *sinteze*

$$S : l^2(\mathbb{Z}) \to L^2(0, 1), \quad S(\{c_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}.$$

Sa $l^2(\mathbb{Z})$ je označen prostor kvadrat integrabilnih nizova (kompleksnih brojeva): $\{c_n\} \in l^2(\mathbb{Z})$ ako i samo ako je $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$.

Funkcije $e^{2\pi inx}$ nisu (kvadrat) integrabilne na $\mathbb{R}$, ali su ograničene: $|e^{2\pi inx}| = 1$, $n \in \mathbb{Z}$, pa je preslikavanje

$$c_n = \langle f, e^{2\pi inx} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

dobro definisano za sve apsolutno integrabilne funkcije $f \in L^1(\mathbb{R})$. [1]

1.2. **Definicija i osnovna svojstva.** S obzirom da preusmeravamo pažnju sa funkcija definisanih nad intervalom $[0,1]$ (odnosno periodičnih funkcija) na apsolutno integrabilne funkcije, umesto celobrojnih vrednosti (frekvencija) $n \in \mathbb{Z}$ posmatraće se sve realne frekvencije $\xi \in \mathbb{R}$, odnosno umesto baznih funkcija $e^{2\pi inx}$ posmatraće se funkcije $e^{2\pi i\xi x}$. Po analogiji sa operatorom analize koji funkciji dodeljuje niz, uvodi se novi operator, Furijeova transformacija, koja funkciji $f$ dodeljuje funkciju $\hat{f}$ na sledeći način:

**Definicija 1.1.** *Furijeova transformacija funkcije $f \in L^1(\mathbb{R})$ je funkcija $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definisana sa*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Kao operator, Furijeova transformacija je preslikavanje $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$.

U literaturi se ponekad Furijeova transformacija definiše korišćenjem neke druge konstante umesto konstante $-2\pi$.

Funkcija $f \in L^1(\mathbb{R})$ ne mora da bude definisana za sve $x \in \mathbb{R}$, to jest moguće je da je $f$ definisana za skoro sve $x \in \mathbb{R}$. Nasuprot tome, $\hat{f}$ je definisana za sve $\xi \in \mathbb{R}$, jer je

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-2\pi i\xi x}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1} < \infty. \tag{1}$$

Može se dokazati i jače tvrđenje:

**Lema 1.2.** *Ako $f \in L^1(\mathbb{R})$ onda je njena Furijeova transformacija $\hat{f}$ ograničena i uniformno neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$ i $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$.*

---

[1] Za vežbu dokazati: $(1+x^2)^{-1/2} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ i $|x|^{-1/2}(1+x^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}) \setminus L^2(\mathbb{R})$.

*Dokaz.* Za proizvoljne $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ važi:

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi+\eta) - \hat{f}(\xi)| &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} \left(e^{-2\pi i \eta x} - 1\right) dx \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)||e^{-2\pi i \xi x}||e^{-2\pi i \eta x} - 1| dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)||e^{-2\pi i \eta x} - 1| dx,
\end{aligned}$$

pa je

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\xi+\eta) - \hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)||e^{-2\pi i \eta x} - 1| dx.$$

Kako je $|f(x)||e^{-2\pi i \eta x} - 1| \leq 2|f(x)|$, Na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji važi

$$\lim_{\eta \to 0} (\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\xi+\eta) - \hat{f}(\xi)|) \leq \lim_{\eta \to 0} (\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)||e^{-2\pi i \eta x} - 1| dx) = 0,$$

odakle sledi uniformna neprekidnost funkcije $\hat{f}$.

Oganičenost sledi iz (1), a supremum po $\xi$ daje $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$. $\square$

**Primer 1.3.** *Neka je $\chi_{[-T,T]}$ karakteristična funkcija intervala $[-T,T]$, $T > 0:$*

$$\chi_{[-T,T]}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-T,T], \\ 0, & t \notin [-T,T]. \end{cases}$$

*Ova funkcija pripada prostoru $L^1(\mathbb{R})$, a njena Furijeova transformacija je data sa:*

$$\hat{\chi}_{[-T,T]}(\xi) = \int_{-T}^{T} e^{-2\pi i \xi x} dx = \begin{cases} \frac{\sin 2\pi T\xi}{\pi\xi}, & \xi \neq 0, \\ 2T, & \xi = 0. \end{cases}$$

Primetimo da je $\|\hat{\chi}_{[-T,T]}\|_{L^\infty} < \infty$.[2]

Kada je $T = 1/2$, funkcija $\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}$ se zove *sinc* funkcija (preciznije, njeno neprekidno produženje u nuli). Ona je uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$, ali nije apsolutno integrabilna. Dokažimo to.

[2]Odrediti $\|\chi_{[-T,T]}\|_{L^1}$ i $\|\hat{\chi}_{[-T,T]}\|_{L^\infty}$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}|d\xi &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\frac{\sin t}{t}|dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}|\frac{\sin t}{t}|dt \\ &\geq \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{\infty}|\frac{\sin t}{t}|dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\frac{\sin t}{t}|dt \\ &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|dt = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty.\end{aligned}$$

Nasuprot tome, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \pi$, odakle sledi $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mt}{\pi t}dt = 1$.

**Primer 1.4.** *Niz funkcija* $\{\frac{\sin mt}{\pi t}\}_{m\in\mathbb{N}}$ *je delta konvergentan niz, to jest*

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mt}{\pi t}f(t)dt = f(0).$$

*Ovu činjenicu usvajamo bez dokaza. Intuitivno, kada* $m\to\infty$ *funkcije* $\frac{\sin mt}{\pi t}$ *teže ka Furijeovoj transformaciji konstantne funkcije* $\chi_{(-\infty,\infty)}(\xi) = 1$, *a kako je* $\hat{\delta} = 1$ *(ovo sledi iz formule za Furijeovu transformaciju konvolucije), naslućujemo da* $\frac{\sin mt}{\pi t}$ *konvergira ka delta impulsu kada* $m\to\infty$.

Sledeći rezultat daje dodatno svojstvo Furijeove transformacije apsolutno integrabilne funkcije.

**Teorema 1.5.** *(Riman-Lebegova lema) Ako* $f\in L^1(\mathbb{R})$ *onda njena Furijeova transformacija* $\hat{f}$ *pripada prostoru* $C_0(\mathbb{R})$ *neprekidnih funkcija koje u beskonačnosti opadaju ka nuli, to jest* $\lim_{|\xi|\to\infty}|\hat{f}(\xi)| = 0$.

*Dokaz.* Već znamo da je $\hat{f}$ neprekidna funkcija. Smenom $x\to s-1/(2\xi)$ dobija se

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx &= \int_{-\infty}^{\infty}f(s-\frac{1}{2\xi})e^{-2\pi i\xi(s-\frac{1}{2\xi})}ds \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}f(s-\frac{1}{2\xi})e^{-2\pi i\xi s}ds,\end{aligned}$$

jer je $e^{-\pi i} = -1$. Dalje, iz $f\in L^1(\mathbb{R})$ sledi

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}(\xi)\right| &= \left|\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(x)-f(x-\frac{1}{2\xi})\right)e^{-2\pi i\xi x}dx\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)-f(x-\frac{1}{2\xi})\right|dx,\end{aligned}$$

odakle je[3]

$$\lim_{|\xi|\to\infty} |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{|\xi|\to\infty} \left| f(x) - f(x - \frac{1}{2\xi}) \right| dx = 0.$$

$\square$

Po analogiji sa operatorom sinteze koji nizu Furijeovih koeficijenata dodeljuje funkciju uvodimo inverznu Furijeovu transformaciju na sledeći način:

**Definicija 1.6.** *Inverzna Furijeova transformacija funkcije $f \in L^1(\mathbb{R})$ je funkcija $\check{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definisana sa*

$$\mathcal{F}^{-1} f(\xi) = \check{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Primetimo da je $\check{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Odavde sledi da $\mathcal{F}^{-1} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$.

Međutim, $f \in L^1(\mathbb{R})$ ne implicira $\check{f} \in L^1(\mathbb{R})$ pa, u opštem slučaju ne možemo primeniti kompoziciju preslikavanja analize i sinteze. Iz ovog razloga naziv inverzna Furijeova transformacija je malo zbunjujući. Ipak, uz dodatna ograničenja, operator $\mathcal{F}^{-1}$ je inverzni operator operatora $\mathcal{F}$. Posebno, ako $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ onda važi:

**Teorema 1.7.** *(Formula inverzije) Ako $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ onda su $f$ i $\hat{f}$ neprekidne funkcije i*

$$f(x) = (\hat{f})^{\check{}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi,$$

*pri čemu je jednakost tačkasta za svako $x \in \mathbb{R}$. Slično,*

$$f(x) = (\check{f})^{\hat{}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\xi) e^{-2\pi i \xi x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Teorema se, za sada, usvaja bez dokaza. Jedan od načina je da se dokaže da formula inverzije ekvivalentna Planšerelovoj teoremi, a drugi je korišćenje Poasonove sumacione formule.

**Posledica 1.8.** *(jedinstvenost) Ako $f \in L^1(\mathbb{R})$ onda važi $f = 0$ skoro svuda ako i samo ako $\hat{f} = 0$ skoro svuda.*

Drugim rečima, Furijeova transformacija $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ je injektivno preslikavanje.

[3]Iako $f$ nije neprekidna, koristeći činjenicu da su neprekidne funkcije kompaktnog nosača guste u $L^1(\mathbb{R})$ može se dokazati da $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-h)|\, dx \to 0$ kada $h \to 0$.

1.3. **Konvolucija i Parsevalova jednakost.** Neka $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Primetimo najpre da je

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Ako su, pri tome, $f$ i $g$ neprekidne, onda je i $f * g$ neprekidna funkcija. Uz dodatne uslove diferencijabilnosti funkcije $g$ i integrabilnosti i ograničenosti funkcije $g'$, koristeći Lebegovu teoremu o dominantnoj konvergenciji nije teško dokazati da je $f * g$ diferencijabilna i $(f * g)' = (f * g')$. Ako je, uz to $f$ diferencijabilna, a $f'$ integrabilna i ograničena, onda je $(f * g)' = (f * g') = (f' * g)$.

U nastavku ispitujemo svojstva konvolucije da bismo dokazali Parsevalovu jednakost.

**Lema 1.9.** *Neka $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Ako $f$ i $g$ imaju kompaktan nosač, onda $f * g$ ima kompaktan nosač.*

*Dokaz.* Podsetimo se, nosač funkcije $f$, u oznaci $\operatorname{supp} f$ je najmanji zatvoren skup za koji važi $f(x) = 0$ za skoro sve $x$ u komplementu tog skupa. Bez smanjenja opštosti (birajući odgovarajućeg predstavnika klase ekvivalencije) pretpostavljamo da je $f(x) = 0$ za sve $x \notin \operatorname{supp} f$. Slično i za funkciju $g$.

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ tačka za koju važi $(f * g)(x_0) \neq 0$. Tada postoji $y \in \mathbb{R}$ koja pripada nosaču funkcije $f$ i za koju je $x_0 - y \in \operatorname{supp} g$. Dakle, $x_0 = y + (x_0 - y) \in \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$. Odavde sledi:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f * g(x) \neq 0\} \subseteq \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g.$$

Prema tome, ako $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ onda je $f * g(x) = 0$. U odgovarajućim klasama ekvivalencije ovo implicira da je $f * g(x) = 0$ za skoro sve $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, to jest (s obzirom da posmatramo zatvorene skupove) $\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$. $\square$

Dokažimo da za $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ važi $(f * g)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$. Koristeći teoremu Fubinija dobija se

$$\begin{aligned}
(f * g)\hat{}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy \right) e^{-2\pi i y \xi} e^{-2\pi i (x-y)\xi} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i y \xi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(x - y) e^{-2\pi i (x-y)\xi} dx \right) dy \\
&= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

**Teorema 1.10.** *Neka je $f \in C_c^2(\mathbb{R})$, to jest dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija kompaktnog nosača. Tada $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ i važi Parsevalova jednakost: $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$.*

*Dokaz.* Primetimo da $f \in L^1(\mathbb{R})$. Involucija funkcije $f$ je $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$. Posmatrajmo sada funkciju $(f * \tilde{f})(x)$. Ako je $f$ neprekidna funkcija kompaktnog nosača, onda je i $(f * \tilde{f})$ neprekidna funkcija kompaktnog nosača. Važi:

$$(f * \tilde{f})(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\tilde{f}(-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\overline{f(y)}dy = \|f\|_{L^2}^2.$$

Koristeći upravo dokazano svojstvo prebacivanja konvolucije u proizvod pod dejstvom Furijeove transformacije dobija se

$$(f * \tilde{f})\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi)(\tilde{f})\hat{}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2,$$

jer je $(\tilde{f})\hat{}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Iz uslova $f \in C_c^2(\mathbb{R})$ sledi da $(f * \tilde{f}) \in C_c^2(\mathbb{R})$, pa važi $(f * \tilde{f})\hat{} \in L^1(\mathbb{R})$ (videti Posledicu 1.3 sa sledećih predavanja). Na osnovu teoreme 1.7 sledi

$$(f * \tilde{f})(0) = (\widehat{f * \tilde{f}})\check{}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * \tilde{f})\hat{}(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{f}\|_{L^2}^2.$$

Dakle, $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$. □

Na osnovu teoreme 1.10, Furijeova transformacija $\mathcal{F} : C_c^2 \to L^2$ je izometrijsko preslikavanje između $(C_c^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$ i $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$. S obzirom da je $C_c^2(\mathbb{R})$ gust u $L^2(\mathbb{R})$, preslikavanje $\mathcal{F}$ se može neprekidno proširiti do izometrije između $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$ i $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$. Štaviše, ovo proširenje, kojim se definiše Furijeova transformacija na $L^2$, je unitarno preslikavanje na $L^2(\mathbb{R})$, to jest izometrijski (=bijektivni) izomorfizam, videti sledeće predavanje.

1.4. **Rezime.**

(1) Definisati Furijeovu transformaciju. Formulisati i dokazati lemu 1.2 i teoremu 1.5.
(2) Odrediti Furijeovu transformaciju karakteristične funkcije i dokazati da *sinc* funkcija nije apsolutno integrabilna.
(3) Definisati inverznu Furijeovu transformaciju. Formulisati teoremu 1.7 i njenu posledicu. Dokazati da je $(f*g)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$, $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.
(4) Dokazati da je Furijeova transformacija involucije data sa $(\tilde{f})\hat{}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Zatim dokazati lemu 1.9 i teoremu 1.10.