Изабрана поглавља
примењене анализе
22. новембар 2018

1. Балиан-Лоу теорема

1.1 Оквири и базе

У наставку са $\mathcal{H}$ обележавамо сепарабилан Хилбертов простор.

Дефиниција 1.1.1 *Фамилија елемената $\{f_n\} \subseteq \mathcal{H}$ је* **оквир** *у $\mathcal{H}$ акко постоје константе $A, B > 0$ тако да важи*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_n |\langle f, f_n\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Потребан и довољан услов да $\{f_n\}$ буде оквир у $\mathcal{H}$ је да је оператор синтезе $T : \{c_n\} \mapsto \sum c_n f_n$ добро дефинисан из l^2 **на** $\mathcal{H}$.

Дефиниција 1.1.2 *Скуп вектора $\{f_n\}$ је* **потпун** *у $\mathcal{H}$ акко је $\overline{span\{f_n\}} = \mathcal{H}$.*

Еквивалентан услов је да из $\langle f, f_n\rangle = 0$ за све n следи $f = 0$. Треба приметити да ако је $\{f_n\}$ потпун у $\mathcal{H}$, онда не мора да важи да се произвољан елемент из $\mathcal{H}$ може представити у облику $\sum c_n f_n$. Дакле, оквир је увек потпун у $\mathcal{H}$.
Ако је $A = B$ оквир је *чврст*. Оквир је *егзактан* ако избацивањем произвољног елемента он престаје да буде оквир. Јасно, свака ОНБ је оквир са $A = B = 1$. Тако су оквири одиста уопштење база. У коначно димензионалним просторима сваки оквир је унија неке ОНБ и ,,још неких елемената". Ово, међутим, не важи за бесконачно димензионалне просторе.

Дефиниција 1.1.3 *За дати оквир $\{f_n\}$* **оператор оквира** *$S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ је дат са $Sf = TT^*f = \sum_n \langle f, f_n\rangle f_n$. где је T оператор синтезе.*

Ради се о једном самоадјунгованом оператору. Ево зашто је он важан:

За задати оквир $\{f_n\}$ са оператором оквира S, сваки $f \in \mathcal{H}$ се може представити у облику безусловно конвергентног реда

$$f = SS^{-1}f = \sum_n \langle f, S^{-1}f_n\rangle f_n = \sum_n \langle f, f_n\rangle S^{-1}f_n.$$

Оптималне границе оквира су дате са $A = 1/\|S^{-1}\|$, $B = \|S\|$. Ако је оквир $\{f_n\}$ чврст онда је $S = AI$ (I је идентички оператор), а ако није онда је $\{S^{-1/2}f_n\}$ чврст оквир и $A = 1$.

Дефиниција 1.1.4 *Скуп $\{f_n\}$ је* **Рисова база** *за $\mathcal{H}$ акко постоји ограничен инвертибилни оператор $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ и ОНБ $\{e_n\}$ за $\mathcal{H}$ тако да је $f_n = Ue_n$.*

Дакле, Рисове базе јесу слике ОНБ унитарним пресликавањима. Може се показати да је $\{f_n\}$ Рисова база за $\mathcal{H}$ ако и само ако је $\{f_n\}$ потпун у $\mathcal{H}$ и постоје константе $A, B > 0$ тако да важи

$$A\sum_n |c_n|^2 \leq \|\sum_n c_n f_n\|^2 \leq B\sum_n |c_n|^2$$

за сваки коначан низ скалара $\{c_n\}$. Важи и следећа:

Теорема 1.1.1 *Нека је $\{f_n\}$ оквир у $\mathcal{H}$. Тада су следећи услови еквивалентни:*
(а) $\{f_n\}$ је Рисова база за $\mathcal{H}$;
(б) $\{f_n\}$ је егзактан оквир.

На основу (б) следи да сваки оквир који није Рисова база остаје оквир када се из њега избаци неки елемент. Проучавање ове проблематике је познато под називом прекорачење оквира.

Дефиниција 1.1.5 *За задату функцију $g \in L^2(\mathbb{R})$ и параметре мреже $a, b > 0$, скуп временско-фреквенцијских померања*

$$\mathcal{G}_{g,a,b} = \mathcal{G}(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{g_{ak,bn}(x) = e^{2\pi \imath bnx} g(x - ak) = M_{bn} T_{ak} g : k, n \in \mathbb{Z}\}$$

се зове **Габоров систем**.

Дефиниција 1.1.6 **Габоров оквир** *у $L^2(\mathbb{R})$ је Габоров систем $G_{g,a,b}$ који је оквир у $L^2(\mathbb{R})$.*

За одговарајући оператор оквира важи $Sf = \sum\sum_{k,n\in\mathbb{Z}} \langle f, M_{ak} M_{bn} g\rangle T_{ak} M_{bn} g$. Егзистенција Габорових оквира је у тесној вези са својствима оператора Габорових оквира, али то је посебна проблематика којом се ми овде нећемо бавити.

Да бисмо показали због чега су Габорови оквири толико важни, наводимо у наставку једну од верзија Балиан-Лоу теореме, која нам каже да просто не можемо изградити Габорове системе који ће бити Рисове базе за $L^2(\mathbb{R})$, те да нужно морамо дозволити флексибилност коју имају оквири да бисмо добили ,,корисне" Габорове системе.

1.2 Балиан-Лоу теорема

Славни класични принцип неодређености квантне механике има следећу математичку формулацију:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |xg(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\xi \hat{g}(\xi)|^2 d\xi\right) \geq \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx, \quad g \in L^2. \tag{1}$$

Њега тумачимо тако да не постоји идеална локализација. Лева страна неједнакости (1) може бити коначна или бесконачна, али у сваком случају не сме бити мања од десне стране. Познато је да једнакост у (1) достиже гаусијан $e^{-\pi x^2}$, и да су једине функције које ту једнакост достижу транслације и модулације гаусијана. Класична БЛТ тврди да ако је $\mathcal{G}(g, 1, 1)$ Рисова база за $L^2(\mathbb{R})$, онда не само да важи неједнакост (1), него лева страна у тој неједнакости мора заправо бити бесконачна. Другим речима, функција генератор Габоровог система који је и Рисова база ,,максимизује неодређеност”.

То такође значи и да ако имамо мрежни Габоров оквир који ,,у себи нема вишка” (тј. који је и Рисова база), онда функција генератор g има тако сиромашне временско-фреквенцијске локализационе особине да је не можемо користити за нетривијалне примене. Другим речима, није могуће да функција g има рапидно опадање и у временском и у фреквенцијском домену.

Дајемо и доказујемо тзв. класичну верзију Балиан-Лоу теореме:

Теорема 1.2.1 *Ако је $\mathcal{G}(g,1,1)$ Рисова база за $L^2(\mathbb{R})$ онда*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}|xg(x)|^2dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\xi\hat{g}(\xi)|^2d\xi\right)=\infty. \tag{2}$$

Доказ дајемо у специјалном случају, када је $\mathcal{G}$ ортонормирана база. Овај доказ потиче од Battle-а и може се проширити на случај када је $\mathcal{G}(g,1,1)$ Рисова база. Доказ се ослања на операторе који имају главну улогу у доказивању класичног принципа неодређености.

Доказ (у специјалном случају). Оператори позиције и момента из квантне механике дати су у математичкој нотацији редом са:

$$Pf(x)=xf(x) \text{ и } Mf(x)=\tfrac{1}{2\pi\imath}f'(x).$$

Ови оператори очито не пресликавају $L^2(\mathbb{R})$ на себе. Међутим, можемо их учинити добро дефинисаним ако рестрикујемо њихове домене на одговарајуће густе подскупове $L^2(\mathbb{R})$, али чак и ако то урадимо, ови оператори остају неограничени у односу на L^2-норму. Па ипак, ови оператори играју главну улогу у квантној механици и хармонијској анализи.

Претпоставимо да је $g\in L^2(\mathbb{R})$ таква да је $\mathcal{G}(g,1,1)$ ортонормирана база за $L^2(\mathbb{R})$. То одмах имплицира

$$\langle g,M_nT_kg\rangle=\delta_{0k}\delta_{0n},\quad k,n\in\mathbb{Z},$$

где је δ_{pq} Дираков делта симбол $\delta_{pq}=\begin{cases}1 & p=q,\\ 0 & p\neq q.\end{cases}$

Ако је $\int|xg(x)|^2dx=\infty$ или $\int|\xi\hat{g}(\xi)|^2d\xi=\infty$ онда једначина (2) тривијално важи, па претпоставимо зато да су обе ове величине коначне и изведимо контрадикцију. Да су те величине коначне значи да за оператор позиције важи $Pg\in L^2(\mathbb{R})$ и $P\hat{g}\in L^2(\mathbb{R})$.

Остатак доказа поделимо на четири леме, при чему ће из последње две следити жељена контрадикција.

Лема 1.2.1 *Доказати да је $\langle Pg,M_nT_kg\rangle=\langle M_{-n}T_{-k}g,Pg\rangle$.*

Доказ леме 1.2.1. За $k=n=0$ лема важи, па претпоставимо да је бар један од бројева k или n различит од нуле. Пошто g и Pg обе припадају простору L^2, за $(k,n)\in\mathbb{Z}^2\backslash\{(0,0)\}$ добијамо да је

$$\langle Pg,M_nT_kg\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}xg(x)e^{-2\pi\imath nx}\overline{g(x-k)}dx=$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{e^{2\pi \imath n x}(x-k)g(x-k)}dx + k\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{e^{2\pi \imath n x}g(x-k)}dx =$$

$$= \langle g, M_n T_k P g\rangle + k\langle g, M_n T_k g\rangle =$$

$$= \langle g, M_n T_k P g\rangle + k\delta_{0k}\delta_{0n} =$$

$$= \langle g, M_n T_k P g\rangle + 0. \tag{3}$$

Адјунговани оператор од M_n је M_{-n}, од T_k је T_{-k}, и M_n и T_k комутирају, па је

$$\langle g, M_n T_k P g\rangle = \langle T_{-k} M_{-n} g, P g\rangle = \langle M_{-n} T_{-k} g, P g\rangle \tag{4}$$

Комбинујући једначине (3) и (4) видимо да је

$$\langle P g, M_n T_k g\rangle = \langle M_{-n} T_{-k} g, P g\rangle. \tag{5}$$

■

Наш следећи циљ је да применимо сличан рачун на Mg уместо Pg.

Лема 1.2.2 *Доказати да је* $\langle Mg, M_n T_k g\rangle = \langle M_{-n} T_{-k} g, Mg\rangle$.

Доказ леме 1.2.2. С обзиром да Фуријеова трансформација размењује глаткост и опадање, хипотеза да $g, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ имплицира да g има одређену ,,дозу глаткоће". Прецизније, g је апсолутно непрекидна на сваком коначном интервалу, $g'(x)$ постоји с.с., $g' \in L^2(\mathbb{R})$ и

$$\widehat{g'}(\xi) = 2\pi\imath\xi\hat{g}(\xi) = 2\pi\imath P\hat{g}(\xi) \quad s.s.$$

Претходни резултат је теорема за себе, па га овде усвајамо без доказа.

Посебно, $Mg \in L^2(\mathbb{R})$ и

$$(Mg)^{\wedge} = (\frac{1}{2\pi\imath}g')^{\wedge} = P\hat{g}.$$

Сада се пребацујемо на рачунање са Фуријеовом трансформацијом од Mg, те користимо (5) да би добили да је

$$\langle Mg, M_n T_k g\rangle = \langle (Mg)^{\wedge}, (M_n T_k g)^{\wedge}\rangle$$

$$= \langle P\hat{g}, T_n M_{-k}\hat{g}\rangle$$

$$= \langle P\hat{g}, M_{-k} T_n\hat{g}\rangle$$

$$= \langle M_k T_{-n}\hat{g}, P\hat{g}\rangle$$

$$= \langle (T_{-k} M_{-n} g)^{\wedge}, (Mg)^{\wedge}\rangle$$

$$= \langle T_{-k} M_{-n} g, Mg\rangle$$

$$= \langle M_{-n} T_{-k} g, Mg\rangle. \tag{6}$$

■

Лема 1.2.3 *Доказати да важи* $\langle Mg, Pg\rangle = \langle Pg, Mg\rangle$.

Доказ леме 1.2.3 Развијањем Pg и Mg у ортонормираној бази $\{M_n T_k g\}_{k,n\in\mathbb{Z}}$ и примењујући везе (5) и (6) добијамо

$$\begin{aligned}
\langle Mg, Pg\rangle &= \langle \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} \langle Mg, M_n T_k g\rangle M_n T_k g, Pg\rangle \\
&= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} \langle Mg, M_n T_k g\rangle \langle M_n T_k g, Pg\rangle \\
&\overset{(5),(6)}{=} \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} \langle M_{-n} T_{-k} g, Mg\rangle \langle Pg, M_{-n} T_{-k} g\rangle \\
&\overset{\text{komutativnost}}{=} \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} \langle Pg, M_{-n} T_{-k} g\rangle \langle M_{-n} T_{-k} g, Mg\rangle \\
&\overset{\text{smena brojaca}}{=} \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} \langle Pg, M_n T_k g\rangle \langle M_n T_k g, Mg\rangle \\
&= \langle Pg, Mg\rangle. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Лема 1.2.4 *Доказати да истовремено важи и* $\langle Mg, Pg\rangle = \langle Pg, Mg\rangle - \frac{1}{2\pi\imath}$.

Доказ леме 1.2.4. Прво запишимо

$$\langle Mg, Pg\rangle = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{-\infty}^{\infty} g'(x)\overline{xg(x)}dx.$$

Парцијална интеграција је валидна за апсолутно непрекидне функције. Стога:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b g'(x)\overline{xg(x)}dx = \\
&= \int_a^b (xg'(x) + g(x))\overline{g(x)}dx - \int_a^b g(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \left(b|g(b)|^2 - a|g(a)|^2 - \int_a^b xg(x)\overline{g'(x)}dx\right) - \int_a^b |g(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Ако фиксирамо a, онда сваки од интеграла који се појављују горе конвергира коначној вредности кад $b \to \infty$. Следи: $b|g(b)|^2$ мора конвергирати кад $b \to \infty$. Али, тај лимес, пошто је g квадрат интеграбилна, мора бити нула (показати за вежбу). Слично важи и када $a \to -\infty$, па имамо

$$\begin{aligned}
\langle Mg, Pg\rangle &= \frac{1}{2\pi\imath}\lim_{a\to-\infty, b\to\infty}\int_a^b g'(x)\overline{xg(x)}dx \\
&= \frac{1}{2\pi\imath}\lim_{a\to-\infty, b\to\infty}\left(-\int_a^b xg(x)\overline{g'(x)}dx - \int_a^b |g(x)|^2 dx\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} Pg(x)\overline{Mg(x)}dx - \frac{1}{2\pi\imath}\|g\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

$$= \langle Pg, Mg\rangle - \frac{1}{2\pi i}. \ \blacksquare$$

Но, овде није крај причи о базама које су у вези са временско-фреквенцијским померајима. Невероватна конструкција звана Вилсонова база даје ортонормирану базу за $L^2(\mathbb{R})$ генерисану одговарајућим линеарним комбинацијама временско-фреквенцијских помераја ,,лепих" функција.

1.3 Резиме

(1) Дефинисати оквир, оператор оквира, Рисову базу и Габорову базу. Доказати да ако $g \in L^2(\mathbb{R})$ онда је $\lim_{b\to\infty} b|g(b)|^2 = 0$.

Формулисати Балиан-Лоу теорему и доказати:

(2) лему 1.2.1;
(3) лему 1.2.2;
(4) лему 1.2.3;
(5) лему 1.2.4.