Izabrana poglavlja
primenjene analize
14. XII 2017.

1. Vajerštrasova teorema o aproksimaciji

Karl Vajerštras (1815 - 1897) je 1885. godine, objavio dokaz sledeće teoreme.

Teorema 1.1. *Neka je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija. Tada za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji polinom* $P(x)$ *takav da je*

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Dokaz se zasniva na razvoju gausovske funkcije u uniformno konvergentan stepeni red i činjenici da za ograničnu uniformo neprekidnu funkciju f važi:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)^2} dy - f(x)| = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ovde prepoznajemo svojstvo delta niza. U nastavku dajemo Landauov dokaz iz 1908. godine i počinjemo da posebnim slučajem Vajerštrasove teoreme.

1.1. **Landauov dokaz.**

Teorema 1.2. *Neka je* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija tako da važi:* $f(0) = f(1) = 0$*. Tada za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji polinom* $Q_n(x)$ *takav da je*

$$|Q_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

S obzirom da nas interesuje aproksimacija funkcije f na $[0, 1]$, možemo je neprekidno produžiti na $\mathbb{R}$ tako da je $f(x) = 0$ za $x \notin [0, 1]$, dakle nosač funkcije f je $[0, 1]$. Ova jednostavna primedba igra značajnu ulogu u dokazu. Ovako dobijena funkcija je uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$.

Dokaz. Posmatra se niz polinoma $\{Q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ definisan sa

$$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

pri čemu su konstante c_n izabrane tako da važi $\int_{-1}^{1} Q_n(x)dx = 1$. Interesuju nas vrednosti ovih polinoma kada je $x \in [0, 1]$, pa primećujemo da se svaki član ovog niza polinoma može neprekidno produžiti na $\mathbb{R}$ tako da je $Q_n(x) = 0$, za sve $x \notin [0, 1]$ i sve $n \in \mathbb{N}$.

Napomena 1.3. *Jasno,* $c_n^{-1} = \int_{-1}^{1} Q_n(x)dx$. *Parcijalnom integracijom se dobija veza*
$$c_m^{-1} = c_{m-1}^{-1} - \frac{1}{2m} c_m^{-1}, \quad m \geq 2,$$
odakle je $c_n = \dfrac{(2n+1)!}{2(2^n n!)^2} \sim \sqrt{n/\pi}, \quad n \to \infty$. *Nama je potrebna procena* $c_n < \sqrt{n}$ *koja se dobija na sledeći način.*
$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1-x^2)^n dx$$
$$\geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2)dx = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}},$$
pri čemu smo koristili Bernulijevu nejednakost
$$(1+t)^n \geq (1+nt), \quad \forall t > -1,$$
koja se može dokazati primenom matematičke indukcije, ili posmatrajući funkciju $(1-x^2)^n - 1 + nx^2$, *koja je jednaka nuli za* $x = 0$, *a njen izvod je pozitivan na* $(0,1)$.

Na osnovu procene $c_n < \sqrt{n}$ sledi da za proizvoljno $\delta \in (0,1)$ važi
$$Q_n(x) < \sqrt{n}(1-\delta^2)^n, \quad \delta \leq |x| \leq 1.$$

Neka je $P_n(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt$, $0 \leq x \leq 1$. S obzirom da je nosač funkcije f interval $[0,1]$, sledi da je $f(x+t) = 0$ kada je $t \leq -x$ ili $t \geq 1-x$. Prema tome,
$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)dt = \int_0^1 f(t)Q_n(t-x)dt, \quad x \in [0,1].$$
Pokažimo da je $P_n(x)$ polinom. Neka je $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Važi:
$$\int_0^1 f(t)\sum_{k=0}^{n} a_k (t-x)^k dt = \int_0^1 f(t)\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-t)^{k-j} x^j dt$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} \int_0^1 f(t)\ (-t)^{k-j} dt \right) x^j = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j,$$
gde je $b_j = \displaystyle\sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} \int_0^1 f(t)\ (-t)^{k-j} dt$, a koristili smo smenu brojača:
$$\sum_{k=0}^{n} \left(A_k \sum_{j=0}^{k} B_j \right) = \sum_{j=0}^{n} B_j \left(\sum_{k=j}^{n} A_k \right).$$

Konačno, iz uniformne neprekidnosti funkcije f sledi da za zadato $\varepsilon > 0$ bira se $\delta > 0$ tako da je

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{kadgod je} \quad |y - x| < \delta.$$

Ako je $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, onda važi:

$$|P_n(x)-f(x)| = |\int_{-1}^{1}(f(x+t)-f(x))Q_n(t)dt| \leq \int_{-1}^{1}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)dt$$

$$\leq 2M\left(\int_{-1}^{-\delta} + \int_{\delta}^{1} Q_n(t)dt\right) + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)dt \leq 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

za dovoljno veliko n, jer je $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(1-\delta^2)^n = 0$. Ovim je teorema dokazana. $\square$

U slučaju da je $f(0) = A$, i $f(1) = B$, za proizvoljne $A, B \in \mathbb{R}$, funkcija

$$g(x) = f(x) + (f(0) - f(1))x - f(0)$$

je neprekidna funkcija za koju je $g(0) = g(1) = 0$, pa, kako je

$$f(x) = g(x) - (f(0) - f(1))x + f(0),$$

a funkcija g se može uniformo aproksimirati polinomom $Q_n(x)$ na $[0, 1]$, sledi da se funkcija f na intervalu $[0, 1]$ može uniformo aproksimirati polinomom

$$Q_n(x) - (f(0) - f(1))x + f(0).$$

Preostaje da se objasni proširenje teoreme na slučaj proizvoljnog intervala $[a, b]$, odnosno na funkcije f kompaktnog nosača (jer je svaki kompaktan skup ograničen, pa prema tome sadržan u nekom intervalu $[a, b]$).

Ovo proširenje se ostvaruje bijekcijom $h : [a, b] \to [0, 1]$, datom sa

$$h(x) = \frac{x - a}{b - a}, \quad x \in [a, b].$$

Pri tome je inverzno preslikavanje $h^{-1}(x) = a + (b - a)x$ bijekcija intervala $[0, 1]$ na $[a, b]$.

Dakle, ako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, onda je funkcija

$$g(x) = f \circ h^{-1}(x) = f(a + (b - a)x)$$

neprekidna na $[0, 1]$ i $f(x) = g((x - a)/(b - a))$, $x \in [a, b]$.

Konačno, ako je $Q_n(x)$ polinom za koji je

$$|Q_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad x \in [0, 1],$$

onda za polinom $P_n(x) = Q_n(\frac{x-a}{b-a})$, $x \in [a,b]$, važi

$$|P_n(x) - f(x)| = \left| Q_n(\frac{x-a}{b-a}) - g(\frac{x-a}{b-a}) \right| < \varepsilon, \quad x \in [a,b].$$

Ovim je dokazana teorema 1.1.

1.2. **Dokaz sa aproksimacijom jedinice.** Kao što se može primetiti, suština dokaza Vajerštrasove teoreme je konvolucija funkcije f sa delta nizom, odnosno sa aproksimacijom jedinice. Niz polinoma iz Landauovog dokaza je poseban primer aproksimacije jedinice.

Definicija 1.4. *Niz neprekidnih funkcija $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je aproksimacija jedinice ako važi:*

(1) $g_n(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.
(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)dx = 1$.
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq 1/n} g_n(x)dx = 0$.

U jeziku konvolucije navodimo uopštenje Vajerštrasove teoreme.

Teorema 1.5. *Neka je f neprekidna funkcija kompaktnog nosača i neka je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aproksimacija jedinice. Tada niz funkcija $\{f * g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira ka f.*

Dokaz. Neka je nosač funkcije f sadržan u $[a,b]$ i neka je $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Važi:

$$|f * g_n(x) - f(x)| = |\int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y) - f(x))g_n(y)dy|$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{-1/n} + \int_{1/n}^{\infty} |f(x-y) - f(x)|g_n(y)dy \right) + \int_{-1/n}^{1/n} |f(x-y) - f(x)|g_n(y)dy$$

$$\leq 2M \int_{|y|\geq 1/n}^{\infty} g_n(y)dy + \int_{-1/n}^{1/n} |f(x-y) - f(x)|g_n(y)dy.$$

Iz uslova (3) sledi da, za zadato $\varepsilon > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je

$$2M \int_{|y|\geq 1/n}^{\infty} g_n(y)dy < \frac{\varepsilon}{2},$$

a na osnovu uniformne neprekidnosti funkcije f, za zadato $\varepsilon > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je

$$|f(x-y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{kadgod je} \quad |(x-y) - x| < \frac{1}{n},$$

pa, za tako odabrano n, važi:

$$\int_{-1/n}^{1/n} |f(x-y)-f(x)|g_n(y)dy < \frac{\varepsilon}{2}\int_{-1/n}^{1/n} g_n(y)dy < \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g_n(y)dy = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dakle, za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$ važi:

$$|f * g_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Napomena 1.6. *Uslov (3) je ekvivalentan sa svakim od sledećih uslova:*

(3)' $(\forall \varepsilon > 0)(\forall \delta \in (0,1))(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$

$$(n \geq n_0 \Rightarrow \int_{|x|>\delta} g_n(x)dx < \varepsilon).$$

(3)" $(\forall \varepsilon > 0)(\forall \delta \in (0,1))(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$

$$(n \geq n_0 \Rightarrow g_n(x) < \varepsilon, \forall x \in (-\delta, \delta)).$$

1.3. **Aproksimacija jedinice dilatacijama.** Na kraju, navodimo teoremu sa posebno konstruisanim aproksimacijama jedinice.

Neka je g apsolutno integrabilna funkcija, $g \in L^1(\mathbb{R})$ i neka je, za $\epsilon > 0$

$$g_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} g(\frac{x}{\epsilon}), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Dilatacije ne menjaju vrednost integrala funkcije g :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\epsilon(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(\frac{x}{\epsilon})d(\frac{x}{\epsilon}) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$$

i, nešto opštije,

$$\int_a^b g_\epsilon(x)dx == \int_{a/\epsilon}^{b/\epsilon} g(x)dx.$$

Sa $f(x^+)$ i $f(x^-)$ ćemo označiti desnu, odnosno levu graničnu vrednost u tački x po delovima neprekidne funkcije f.

Teorema 1.7. *Neka je f po delovima neprekidna funkcija i neka je $g \in L^1(\mathbb{R})$ funkcija za koju je $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$ i neka je*

$$\alpha = \int_{-\infty}^{0} g(x)dx \quad i \quad \beta = \int_0^{\infty} g(x)dx.$$

Uz to, pretpostavlja se da je f ograničena ili da je g kompaktnog nosača, tako da je $(f * g)(x)$ dobro definisana za sve $x \in \mathbb{R}$. Ako je $g_\epsilon(x)$ dato sa (1), onda je

$$\lim_{\epsilon \to 0} (f * g_\epsilon)(x) = \alpha f(x^+) + \beta f(x^-), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Posebno, ako je f neprekidna, onda je $\lim_{\epsilon\to 0}(f * g_\epsilon)(x) = f(x)$. *Ako je, pri tome, f neprekidna na nekom intervalu $[a, b]$, onda je ova konvergencija uniformna.*

Primetimo da je $\alpha + \beta = 1$, i $\alpha = \beta = 1/2$ ako je g parna funkcija.

Dokaz. Kako je

$$(f * g_\epsilon)(x) - (\alpha f(x^+) + \beta f(x^-))$$
$$= \int_{-\infty}^{0} [f(x-y) - f(x^+)]g_\epsilon(y)dy + \int_0^\infty [f(x-y) - f(x^-)]g_\epsilon(y)dy,$$

dovoljno je pokazati da su oba integrala proizvoljno malih vrednosti za dovoljno malo $\epsilon > 0$. Takođe, dovoljno je aproksimirati jedan od njih, jer je argumentacija slična i za drugi.

Iz definicije granične vrednosti u tački x sledi da za zadato $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $|f(x-y) - f(x^-)| < \varepsilon$ kada je $y \in (0, \delta)$, pa je

$$\left| \int_0^\delta [f(x-y) - f(x^-)]g_\epsilon(y)dy \right| \leq \varepsilon \int_0^\delta |g_\epsilon(y)|dy$$
$$= \varepsilon \int_0^{\delta/\epsilon} |g(y)|dy \leq \varepsilon \int_0^\infty |g(y)|dy,$$

što pogodnim izborom $\varepsilon > 0$ može biti proizvoljno mali broj.

Za procenu integrala $\int_\delta^\infty [f(x-y) - f(x^-)]g_\epsilon(y)dy$, u slučaju da je f ograničena, $|f(x)| \leq M$, $x \in \mathbb{R}$, dobija se

$$\left| \int_\delta^\infty [f(x-y) - f(x^-)]g_\epsilon(y)dy \right| \leq 2M \int_\delta^\infty |g_\epsilon(y)|dy = 2M \int_{\delta/\epsilon}^\infty |g(y)|dy,$$

što pogodnim izborom $\epsilon > 0$ može biti proizvoljno mali broj.

Konačno, ako je nosač funkcije g sadržan u $[-R, R]$ onda je $g_\epsilon(x) = 0$ za $|x| > \epsilon R$, pa za izbor $0 < \epsilon$ za koji je $R < \delta/\epsilon$ važi $\int_{\delta/\epsilon}^\infty |g(y)|dy = 0$.

Ovim je prvo tvrđenje teoreme dokazano.

U slučaju da je f neprekidna na $[a, b]$, ona je na tom intervalu i uniformno neprekidna, pa izbor $\delta > 0$ ne zavisi od tačke $x \in [a, b]$. Čitaocu se ostavlja za vežbu da pokaže traženu uniformnu konvergenciju na $[a, b]$. $\square$

Bez dokaza navodimo još jednu verziju ove teoreme.

Teorema 1.8. *Neka je f kvadrat integrabilna funkcija, $f \in L^2(\mathbb{R})$, i neka je $g \in L^1(\mathbb{R})$ ograničena funkcija za koju je $\int_{-\infty}^\infty g(x)dx = 1$. Tada je $f * g(x)$ dobro definisana za sve $x \in \mathbb{R}$. Ako je $g_\epsilon(x)$ dato sa (1), onda konvolucija $(f * g_\epsilon)(x)$ konvergira ka f u normi prostora $L^2(\mathbb{R})$, kada $\epsilon \to 0$.*

Pogodan izbor funkcije g u ovom poglavlju je gausovska funkcija

$$G(x) = \pi^{-1/2} e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ako je f ograničena i po delovim neprekidna funkcija, onda je $f * G_\epsilon$ glatka funkcija (klase C^∞) koja aproksimira funkciju f za male vrednosti $\epsilon > 0$. Tako se ove konvolucije smatraju „uglačanim verzijama" funkcije f.

1.4. **Rezime.**

(1) Formulisati i dokazati teoremu 1.2 i teoremu 1.1.
(2) Formulisati i dokazati teoremu 1.5.
(3) Formulisati i dokazati teoremu 1.7