Izabrana poglavlja
primenjene analize
24. XII 2015.

1. Gaborovi okviri

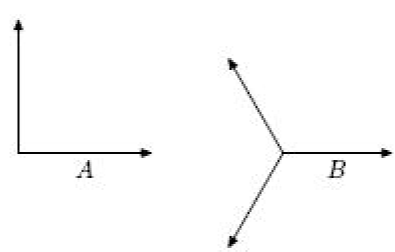
Formule inverzije za kratkotrajnu Furijeovu transformaciju (STFT) i za malotalasnu transformaciju pokazuju da se signali mogu predstaviti u vidu integrala. U praksi je, međutim, korisnije predstaviti signal u vidu konvergentnog reda. U ovom predavanju se razmatra diskretizacija integrala u formuli inverzije za STFT.

Najpre ćemo se podsetiti nekih činjenica teorije okvira.

2. Motivacija u $\mathbb{R}^2$

Dati su skupovi vektora u $\mathbb{R}^2$: $A = \{(1,0),(0,1)\} = \{e_1, e_2\}$,

$$B = \sqrt{\frac{2}{3}}\Big\{(1,0),(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),(-\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2})\Big\} = \{f_1, f_2, f_3\}.$$



Slika 1. Skupovi A i B.

Skup A je ortonormirana baza (ONB) Hilbertovog prostora $\mathbb{R}^2$ i sa skupom B ima sledeće sličnosti i razlike:

- Svaki vektor iz $\mathbb{R}^2$ se može napisati kao linearna kombinacija vektora skupa A, odnosno skupa B.
- Vektori skupa A su linearno nezavisni, pa su koeficijenti razvoja $x = c_1e_1 + c_2e_2$ jedinstveno određeni. Vektori skupa B nisu linearno nezavisni, pa koeficijenti u odgovarajućem razvoju nisu jedinstveni.

- Norme vektora skupa A su jednake jedinici, a skupa B su jednake sa $\sqrt{\frac{2}{3}}$.
- Vektori skupa A su ortogonalni, a vektori skupa B nisu.
- Koeficijenti u razvoju $x = c_1e_1 + c_2e_2$ su dati skalarnim proizvodom $c_j = \langle x, e_j\rangle$, $j = 1, 2$. Takođe, važi: $x = d_1f_1 + d_2f_2 + d_3f_3$ za $d_j = \langle x, f_j\rangle$, $j = 1, 2, 3$.
- Norma vektora $x \in \mathbb{R}^2$ se može rekonstuisati iz koeficijenata, odnosno važi Parsevalova jednakost:

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1,2} |c_j|^2 = \sum_{j=1,2,3} |d_j|^2.$$

Dati skupovi su primeri (Parsevalovih) *okvira* prostora $\mathbb{R}^2$. Primer skupa B pokazuje da se mnoga svojstva ONB mogu preneti na skupove koji nisu baze[1]. U ovoj činjenici leži osnovna motivacija za proučavanje okvira u Hilbertovim prostorima.

U nastavku će se sa $\mathcal{H}$ označavati separabilan Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ i normom $\|\cdot\|$. Informacija o elementu $x \in \mathcal{H}$ se prenosi na c_j, koeficijente razvoja tog elementa u red/konačnu sumu pomoću neke ONB. Pri prenosu podataka internetom, na primer, koriste se koeficijenti razlaganja nekog signala i odgovarajući aparat linearne algebre i numeričke matematike za izradu brzih i pouzdanih algoritama pomoću kojih se signali razlažu, obrađuju, prenose, skladište i rekonstruišu.

Uslov ortogonalnosti implicira da se izgubljeni koeficijenti ne mogu rekonstruisati iz preostalih, pa je deo informacije koju oni nose zauvek izgubljen. Pri prenosu slike ili zvuka se ispostavlja da su ponekad algoritmi efikasniji ako se odustane od uslova jedinstvenosti. Tako, najznačajnije karakteristike ONB, linearna nezavisnost i ortogonalnost u nekim situacijama predstavljaju ozbiljna ograničenja. Sa druge strane, okviri se mogu dizajnirati/skrojiti tako da ispune izvesne specifičnosti koje nameće priroda posmatranog problema.

Neka je $B = \{f_n\}$. Zatvaranje skupa svih konačnih linearnih kombinacija vektora skupa B se označava sa $\overline{\text{span}}B$. Postavljaju se sledeća pitanja:

- Da li je $\overline{\text{span}}B = \mathcal{H}$?
- Ako je $f = \sum c_nf_n$ da li su koeficijenti c_n jedinstveno određeni i da li je konvergencija reda bezuslovna?
- Ako B nije ONB, da li onda važi $c_n = \langle f, f_n\rangle$?

[1]Ovde se podrazumeva da je neki skup baza vektorskog prostora ako se njegovi elementi mogu na jedinstven način predstaviti kao linearne kombinacije tog skupa.

- Pretpostavimo da važi $\{c_n\} \in l^2$. Kakav je odnos norme $f \in \mathcal{H}$ i norme niza $\{c_n\}$?

3. Okviri i baze

Familija elemenata $\{f_n\} \subseteq \mathcal{H}$ je *Beselov niz* ako postoji konstanta $B > 0$ tako da važi

$$\sum |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Potreban i dovoljan uslov da $\{f_n\}$ bude Beselov niz je da je operator sinteze

$$T : \{c_n\} \to \sum c_n f_n$$

dobro definisan iz l^2 u $\mathcal{H}$.

Na osnovu teoreme Banah-Štajnhaus-a T je ograničen. Njemu adjungovan operator, operator analize, $T^* : \mathcal{H} \to l^2$ je dat sa $T^* f = \{\langle f, f_n \rangle\}$.

Treba primetiti da, ako je $\{f_n\}$ Beselov niz, onda red $\sum c_n f_n$ konvergira bezuslovno za svako $\{c_n\}$ iz l^2. Bezuslovna konvergencija znači da $\sum c_{\pi(n)} f_{\pi(n)}$ konvergira za svaku permutaciju $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Definicija 3.1. *Familija elemenata $\{f_n\} \subseteq \mathcal{H}$ je* okvir *u $\mathcal{H}$ ako postoje konstante $A, B > 0$ tako da važi*

$$A\|f\|^2 \leq \sum |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Potreban i dovoljan uslov da $\{f_n\}$ bude okvir u $\mathcal{H}$ je da je operator

$$T : \{c_n\} \to \sum c_n f_n$$

dobro definisan iz l^2 **na** $\mathcal{H}$.

Skup vektora $\{f_n\}$ je potpun u $\mathcal{H}$ ako je $\text{span}\{f_n\}$ gust u $\mathcal{H}$, ili, ekvivalentno, ako iz $\langle f, f_n \rangle = 0$ za sve indekse n sledi $f = 0$. Treba primetiti da, u opštem slučaju, ako je $\{f_n\}$ je potpun u $\mathcal{H}$, onda ne mora da važi da se proizvoljan element iz $\mathcal{H}$ može razviti u red oblika $\sum c_n f_n$. Dakle, okvir je uvek potpun u $\mathcal{H}$.

Ako je $A = B$ onda je okvir *čvrst*. Okvir je *egzaktan* ako izbacivanjem jednog (proizvoljnog) elementa on prestaje da bude okvir. Svaka ONB je okvir i $A = B = 1$. Takođe, dodavanjem proizvoljnog Beselovog niza na ONB, uvek se dobije okvir. U konačno-dimenzionim prostorima, svaki okvir je unija neke baze i „još nekih elemenata". Ovo, međutim, ne važi za beskonačno dimenzione prostore.

3.1. **Operator okvira.** *Operator okvira* $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ je dat sa

$$Sf = TT^* f = \sum \langle f, f_n \rangle f_n.$$

On je ograničen, pozitivan[2] i sirjektivan. Važi $S = S^*$ jer je svaki ograničen i pozitivan operator na kompleksnom Hilbertovom prostoru samo-adjungovan.

Ako je $\{f_n\}$ okvir sa granicama A i B, onda je $AI \leq S \leq BI$, gde je I jedinični operator. Zaista, iz

$$\langle AIx, x \rangle = A\|x\|^2, \quad \langle Sx, x \rangle = \sum |\langle x, f_n \rangle|^2, \quad \langle BIx, x \rangle = B\|x\|^2,$$

za sve $x \in \mathcal{H}$, i iz definicije okvira sledi $\langle AIx, x \rangle \leq \langle Sx, x \rangle \leq \langle BIx, x \rangle$. Odavde sledi i injektivnost operatora S. S obzirom da je S sirjektivan, on definiše topološki izomorfizam.

Jasno, inverzni operator S^{-1} operatora S je takođe ograničen i pozitivan. Pri tome je $B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I$ i, ako je $\{f_n\}$ okvir, onda je i $\{S^{-1}f_n\}$ okvir. Prema tome, za zadati okvir $\{f_n\}$ sa operatorom okvira S, svaki $f \in \mathcal{H}$ se može predstaviti u obliku bezuslovno konvergentnog reda

$$f = SS^{-1}f = \sum \langle f, S^{-1}f_n \rangle f_n = \sum \langle f, f_n \rangle S^{-1} f_n. \tag{1}$$

Optimalne granice okvira se date sa $A = 1/\|S^{-1}\|$, $B = \|S\|$. Ako je okvir $\{f_n\}$ čvrst, onda je $S = AI$, a ako nije, onda je $\{S^{-1/2}f_n\}$ čvrst okvir i $A = 1$.

Niz $\{\tilde{f}_n\}$ je *dualni okvir* okvira $\{f_n\}$ ako je

$$f = \sum \langle f, \tilde{f}_n \rangle f_n = \sum \langle f, f_n \rangle \tilde{f}_n, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Iz (1) sledi da, ako je $\{f_n\}$ okvir, onda je i $\{S^{-1}f_n\}$ okvir, *kanonični dualni okvir*.

3.2. **Risove baze i okviri.** Polazna tačka teorije okvira je odnos okvira i baza. Od posebnog interesa su Risove baze koje se definišu kao slike ONB unitarnim preslikavanjima. Skup $\{f_n\}$ je *Risova baza* za $\mathcal{H}$ ako postoji ograničen invertibilni operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ i ONB $\{e_n\}$ za $\mathcal{H}$ tako da je $f_n = Ue_n$. Može se pokazati da je $\{f_n\}$ Risova baza za $\mathcal{H}$ ako i samo ako je $\{f_n\}$ potpun u $\mathcal{H}$ i postoje konstante $A, B > 0$ tako da važi

$$A \sum |c_n|^2 \leq \| \sum c_n f_n \|^2 \leq B \sum |c_n|^2.$$

za svaki konačan niz skalara $\{c_n\}$.

U formulaciji naredne teoreme koristi se pojam *biortogonalnog niza.* Nizovi $\{f_n\}$ i $\{g_n\}$ su biortogonalni ako je $\langle f_n, g_m \rangle = 0$ za $n \neq m$

[2]Pozitivnost operatora S sledi iz ograničenosti operatora T.

i $\langle f_n, g_m\rangle = 1$ za $n = m$. Jasno, ako je $\{f_n\}$ baza u $\mathcal{H}$ koja ima biortogonalni niz $\{g_n\}$ onda je $f = \sum\langle f, g_n\rangle f_n = \sum\langle f, f_n\rangle g_n$, za svako $f \in \mathcal{H}$.

Teorema 3.2. *Neka je $\{f_n\}$ okvir u $\mathcal{H}$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni.*

a) *$\{f_n\}$ je Risova baza za $\mathcal{H}$.*
b) *$\{f_n\}$ je egzaktan okvir.*
c) *$\{f_n\}$ ima jedinstven biortogonalan niz.*
d) *$\{S^{-1}f_n\}$ je biortogonalan niz nizu $\{f_n\}$.*
e) *Ako je $\sum c_n f_n = 0$ u $\mathcal{H}$ za neki niz $\{c_n\}$ iz l^2, onda je $c_n = 0$ za svaki indeks n.*

Napomena 3.3.
- *Deo* e) *prethodne teoreme pokazuje da koeficijenti u razvoju po okvirima koji nisu (Risove) baze nisu jedinstveno određeni. Uslov* e) *je jači od linearne nezavisnosti i naziva se $\omega-$nezavisnost.*
- *U svetlu prethodne teoreme, stiče se utisak da su okviri neka vrsta nadogradnje nad bazom. Međutim, postoje okviri čija nijedna potfamilija nije Risova baza. Na primer:*

$$\left\{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \dots\right\}.$$

- *Na osnovu* b) *sledi da svaki okvir koji nije Risova baza, ostaje okvir kada se iz njega izbaci neki element. Proučavanje ove problematike je poznato poz nazivom* prekoračenje *okvira.*
- *Značajna razlika između okvira i Risovih baza je da je jezgro operatora sinteze T datog okvira u opštem slučaju netrivijalno (uporedi sa uslovom* e) *teoreme 3.2), što je ekvivalentno tvrdnji da je kodomen operatora T^* (zatvoren) pravi potprostor u l^2.*

4. Gaborovi okviri

U ovom poglavlju daje se konkretan primer okvira u $L^2(\mathbb{R})$ koji ilustruje bogatsvo matematičkih ideja i teškoće na koje nailazi apstraktna teorija u konkretnim realizacijama.

Osnovni operatori vremensko-frekvencijske analize su operatori translacije i modulacije:

$$T_x f(t) = f(t-x), \quad M_\omega f(t) = e^{2\pi i\omega\cdot t} f(t), \quad x, \omega \in \mathbb{R}.$$

Operatori oblika $T_x M_\omega$ i $M_\omega T_x$ se zovu vremensko-frekvencijska pomeranja. Važi:

$$T_x M_\omega = e^{-2\pi i\omega\cdot x} M_\omega T_x.$$

Definicija 4.1. *Za zadatu funkciju $g \in L^2(\mathbb{R})$ i parametre mreže $a, b > 0$, skup vremensko-frekvencijskih pomeranja*

$$\mathcal{G}_{g,a,b} = \{g_{ak,bn}(x) = e^{2\pi ibnx} g(x - ak) = T_{ak} M_{bn} g, \quad k, n \in \mathbb{Z}\},$$

se zove Gaborov sistem.

Deneš Gabor je, u radu objavljenom 1946. godine, predložio upotrebu niza $\mathcal{G}_{e^{-\pi x^2/a^2},a,1/a}$ kao baznog sistema. Izbor Gausijana $2^{1/4} e^{-\pi x^2}$ je logičan jer je njegova Furijeova transformacija istog oblika, pa Gausijan vrši dobru lokalizaciju u vremensko-frekvencijskoj ravni. U vezi sa tim, Gausijan minimizuje *princip neodređenosti*, koji u jednom od svojih oblika glasi:

Teorema 4.2. *Ako $f \in L^2(\mathbb{R})$, onda za proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$ važi:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (x - a)^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (\omega - b)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|^2. \tag{2}$$

Pri tome, jednakost važi ako i samo ako je f umnožak Gausove funkcije $e^{2\pi ib(x-a)} e^{-\pi(x-a)^2/c}$, za neke $a, b \in \mathbb{R}$ i $c > 0$.

Gaborov okvir u $L^2(\mathbb{R})$ je Gaborov sistem $\mathcal{G}_{g,a,b}$ koji je okvir u $L^2(\mathbb{R})$. Za odgovarajući operator okvira važi

$$Sf = \sum\sum_{k,n \in \mathbb{Z}} \langle f, T_{ak} M_{bn} g \rangle T_{ak} M_{bn} g.$$

Dualni okvir Gaborovog okvira je takođe Gaborov okvir. Preciznije:

Propozicija 4.3. *Ako je $\mathcal{G}_{g,a,b}$ Gaborov okvir u $L^2(\mathbb{R})$, onda postoji $\gamma \in L^2(\mathbb{R})$ tako da je $\mathcal{G}_{\gamma,a,b}$ Gaborov okvir koji je dualan okviru $\mathcal{G}_{g,a,b}$. Dakle,*

$$\begin{aligned} f &= \sum\sum_{k,n \in \mathbb{Z}} \langle f, T_{ak} M_{bn} g \rangle T_{ak} M_{bn} \gamma \\ &= \sum\sum_{k,n \in \mathbb{Z}} \langle f, T_{ak} M_{bn} \gamma \rangle T_{ak} M_{bn} g, \end{aligned}$$

sa bezuslovnom konvergencijom u $L^2(\mathbb{R})$.

U dokazu se koristi činjenica da operator Gaborovog okvira komutira sa vremensko-frekvencijskim pomeranjima i definicija funkcije γ sa $\gamma = S^{-1} g$.

Egzistencija Gaborovih okvira je u tesnoj vezi sa svojstvima operatora Gaborovog okvira.

Najopštije pitanje u vezi sa Gaborovim sistemima je karakterizacija funkcija g i parametara a i b za koje je $\mathcal{G}_{g,a,b}$ potpun u $L^2(\mathbb{R})$.

Razumljivo, ovako postavljeno, pitanje je previše široko za konkretan/upotrebljiv odgovor. Čak i u slučaju Gaborovog sistema $\mathcal{G}_{e^{-\pi x^2},1,1}$, dakle sa fiksiranom funkcijom i parametrima, na odgovor se čekalo godinama nakon što je Fon Nojman (1932. godine) pretpostavio da je taj Gaborov sistem potpun u $L^2(\mathbb{R})$. Dokaz je objavljen 1971. godine od strane Bargmana sa saradnicima i, nezavisno od njih, Perelomova.

Teorema 4.4. *Skup funkcija $\mathcal{G}_{e^{-\pi x^2},1,1}$ je potpun u $L^2(\mathbb{R})$. Štaviše, on ostaje potpun i kada se iz njega izbaci jedan element, ali ne i kada se izbace dva elementa.*

Skup parametara a i b za koje važi $\overline{\text{span}}\mathcal{G}_{g,a,b} = L^2(\mathbb{R})$ je usko povezan sa izborom funkcije g. Na primer, ako je nosač funkcije g u intervalu dužine d, onda je za potpunost Gaborovog sistema potrebno da važi $a \leq d$. Slično, ako je nosač od $\hat{g}$ u intervalu dužine d, onda se na parametar modulacije b postavlja uslov $b \leq d$. Sa druge strane, bez obzira na izbor funkcije $g \in L^2(\mathbb{R})$, intuitivno je jasno da mreža $a\mathbb{Z}\times b\mathbb{Z}$ ne može da bude „retka". Preciznije, važi sledeća teorema.

Teorema 4.5. *Ako je $ab > 1$ onda ne postoji $g \in L^2(\mathbb{R})$ tako da je $\overline{\text{span}}\mathcal{G}_{g,a,b} = L^2(\mathbb{R})$.*

Prema tome, ako važe uslovi teoreme 4.5, $\mathcal{G}_{g,a,b}$ nije okvir.

Dokaz za $ab > 1$, $ab \in \mathbb{Q}$ je dala Dobeši eksplicitnom konstrukcijom funkcije $f \neq 0$ takve da, za zadatu funkciju $g \in L^2(\mathbb{R})$, važi $f \perp \mathcal{G}_{g,a,b}$. Dokaz za $ab > 1$, $ab \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ je egzistencijalne prirode i zahteva posebnu vrstu argumentacije.

Iz teoreme 4.5 sledi da, ako postoji $g \in L^2(\mathbb{R})$ tako da je $\mathcal{G}_{g,a,b}$ okvir u $L^2(\mathbb{R})$, onda je $ab \leq 1$. Ovaj rezultat je, međutim, lakše dokazati nego teoremu 4.5.

U slučaju $a = b = 1$ važi sledeće:

Teorema 4.6. *Ako je $\mathcal{G}_{g,1,1}$ okvir u $L^2(\mathbb{R})$, onda je $\int x^2|g(x)|^2dx = \infty$ ili je $\int \omega^2|g(\omega)|^2d\omega = \infty$.*

Teorema 4.6 je poseban slučaj Balian-Lou teoreme koja ima interesantnu istoriju, a dokazana je osamdesetih godina dvadesetog veka. Iz teorema 4.4 i 4.6 sledi da potpun sistem $\mathcal{G}_{e^{-\pi x^2},1,1}$ nije okvir u $L^2(\mathbb{R})$. U stvari, Jansen je, u nekoliko radova iz 1981. godine pokazao sledeće:

- $\mathcal{G}_{e^{-\pi x^2},1,1}$ nije potpun u Švarcovom prostoru brzo opadajućih funkcija, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, u topologiji od $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- Postoji $f \in L^2(\mathbb{R})$ koja se ne može napisati u obliku $\sum c_{j,k}T_jM_ke^{-\pi x^2}$ sa konvergencijom u $L^2(\mathbb{R})$.

- Ipak, svaka funkcija $f \in L^2(\mathbb{R})$ se može napisati u obliku reda $\sum c_{j,k} T_j M_k e^{-\pi x^2}$, koji konvergira u prostoru distribucija sporog rasta, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Neka je $\chi_{[0,1]}$ karakteristična funkcija jediničnog intervala. Skup tačaka $(a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ za koje je $\mathcal{G}_{\chi_{[0,1]},a,b}$ okvir u $L^2(\mathbb{R})$ je veoma neobičan podskup skupa $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ nazvan Jansenova kravata. Taj skup nije otvoren; za mnoge tačke (a, b) koje generišu okvir, mogu se naći tačke (a', b') u proizvoljnoj okolini tačke (a, b) takve da $\mathcal{G}_{\chi_{[0,1]},a',b'}$ nije okvir.

Slika 2. A. J. E. M. Janssen i njegova "kravata".

Skup $\mathcal{G}_{\chi_{[0,1]},1,1}$ je ONB u $L^2(\mathbb{R})$. Na osnovu teoreme 4.6 ova ONB ima lošu lokalizaciju u frekvencijskom domenu. Zaista, Furijeova transformacija funkcije $\chi_{[0,1]}$ je $\frac{\sin \pi\omega}{\pi\omega}$, čija „energija” nije lokalizovana.

Drugim rečima, cilj lokalizacije je približavanje jednakosti u principu neodređenosti, a iz teoreme 4.6 sledi da leva strana nejednakosti (2) ima najgoru moguću vrednost: $+\infty$. Alternativni pristup prevazilaženju ograničenja nametnutih teoremom Balian-Lou je upotreba Vilsonovih baza, što predstavlja posebno polje proučavanja u okviru vremensko-frekvencijske analize.

Perturbacija tačaka (a, b) za zadati Gaborov sistem nije lokalnog karaktera, u smislu da generiše „velika” pomeranja tačaka (ak, bl) za velike vrednosti $k, l \in \mathbb{Z}$. Za $ab < 1$ i Gausijan $e^{-\pi x^2}$, $\mathcal{G}_{e^{-\pi x^2},a,b}$ je uvek okvir u $L^2(\mathbb{R})$. Male perturbacije parametara a i b u ovom slučaju neće narušiti svojstvo okvira. Takođe, za svaki perturbovani Gaborov okvir, sa $g(x) = e^{-\pi x^2}$, dualni prozor je brzo opadajuća funkcija.

Neka je dat prozor $g \in L^2(\mathbb{R})$. Kratkotrajna Furijeova transformacija signala $f \in L^2(\mathbb{R})$ je definisana sa

$$V_g f(x,\xi) = \langle f, M_\xi T_x g\rangle = \int e^{-2\pi i t\xi}\overline{g(t-x)}f(t)dt, \quad x,\xi \in \mathbb{R}.$$

Prostor S_0 čine funkcije f iz $L^2(\mathbb{R})$ za koje je $V_g f \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, odnosno apsolutno integrabilna funkcija po obe promenjive.

Teorema 4.7. *Neka je $ab > 0$. Ako je $g \in S_0$ takva da je $\mathcal{G}_{g,a,b}$ okvir u $L^2(\mathbb{R})$, onda je operator okvira S bijekcija S_0 na samog sebe. Posebno, $S^{-1}g \in S_0$.*

Na kraju navodimo teoremu Dobeši, Grosmana i Mejera, poznatu kao „bezbolni neortogonalni razvoji".

Teorema 4.8. *Neka je $ab > 0$ i $g \in L^2(\mathbb{R})$. Tada važi:*

a) *Ako je $0 < ab \leq 1$ i ako je $\operatorname{supp} g \subseteq [0, b^{-1}]$, onda je $\mathcal{G}_{g,a,b}$ okvir u $L^2(\mathbb{R})$ ako i samo ako postoje $A, B > 0$ tako da je*

$$Ab \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |g(x-ak)|^2 \leq Bb \;\; \textit{skoro svuda.} \tag{3}$$

U tom slučaju A i B su granice okvira $\mathcal{G}_{g,a,b}$.

b) *Ako je $0 < ab < 1$ onda postoji g, $\operatorname{supp} g \subseteq [0, b^{-1}]$ tako da važi (3) pri čemu g može biti i beksonačno diferencijabilna funkcija.*

c) *Ako je $ab = 1$ onda svaka funkcija g za koju je $\operatorname{supp} g \subseteq [0, b^{-1}]$ i za koju važi (3) mora imati barem jednu tačku prekida.*

d) *Ako je $ab > 1$ i $\operatorname{supp} g \subseteq [0, b^{-1}]$ onda ne važi (3) i $\mathcal{G}_{g,a,b}$ nije potpun sistem u $L^2(\mathbb{R})$.*