Izabrana poglavlja
primenjene analize
17. XII 2015.

1. Kratkotrajna Furijeova transformacija

U predavanju se izlažu osnovna svojstva kratkotrajne Furijeove transformacije. Radi jednostavnosti izlaganja, pretpostavlja se da su sve funkcije elementi Švarcovog prostora $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Proširenje rezultata na $L^2(\mathbb{R}^d)$ se dobija argumentom gustine, ali ovom prilikom izostavljamo detalje.

Definicija 1.1. *Neka je data* prozorska *funkcija $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$. Kratkotrajna Furijeova transformacija (STFT) funkcije $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ u odnosu na prozor g data sa*

$$V_g f(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-2\pi i t\omega}dt, \quad x,\omega \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Osnovna svojstva kratkotrajne Furijeove transformacije se izvode korišćenjem identiteta i tehnika koje smo upoznali pri proučavanju Furijeove transformacije. Na primer, Parsevalova formula:

$$\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle,$$

relacija za komutativnost (izmenu redosleda) translacije i modulacije:

$$T_x M_\omega = e^{-2\pi i x\cdot\omega} M_\omega T_x,$$

odnos Furijeove transformacije modulacije i translacije:

$$(T_x f)\hat{} = M_{-x}\hat{f} \quad \text{i} \quad (M_\omega f)\hat{} = T_\omega \hat{f}.$$

Zatim, za konvoluciju smo pokazali da važi:

$$(f * g)\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Lema 1.2. *Neka $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Tada se operacija konvolucije može napisati kao skalarni proizvod translacije i involucije:*

$$(f * g)(x) = \langle f, T_x g^*\rangle,$$

pri čemu je involucija funkcije f data sa $f^*(x) = \overline{f(-x)}$. Takođe, Furijeova transformacija proizvoda $f \cdot g$ jednaka je konvoluciji $\hat{f} * \hat{g}$.

Dokaz. Važi:

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int f(y)g(x-y)dy \\ &= \int f(y)\overline{\overline{g(-(y-x))}}dy \\ &= \int f(y)\overline{T_x g^*(y)}dy \\ &= \langle f, T_x g^* \rangle.\end{aligned}$$

Koristeći formulu inverzije $f(x) = \int \hat{f}(\eta)e^{2\pi i x\eta}d\eta$ i teoremu Fubinija lako se dokazuje da je $(fg)\hat{}(\omega) = (\hat{f} * \hat{g})(\omega)$:

$$\begin{aligned}(fg)\hat{}(\omega) &= \int f(x)g(x)e^{-2\pi i x\omega}dx \\ &= \int (\int \hat{f}(\eta)e^{2\pi i x\eta}d\eta)g(x)e^{-2\pi i x\omega}dx \\ &= \int \hat{f}(\eta)(\int g(x)e^{-2\pi i x(\omega-\eta)}dx)d\eta \\ &= \int \hat{f}(\eta)\hat{g}(\omega-\eta)d\eta \\ &= (\hat{f} * \hat{g})(\omega).\end{aligned}$$

□

Pre nego što dokažemo sledeću teoremu primetimo da je $(M_\omega g^*)^* = M_\omega g$. Naime,

$$\begin{aligned}(M_\omega g^*)^*(x) &= \overline{M_\omega g^*}(-x) \\ &= \overline{e^{2\pi i\omega(-x)}g^*(-x)} \\ &= e^{2\pi i\omega x}\overline{\overline{g(x)}} \\ &= e^{2\pi i\omega x}g(x) = M_\omega g(x).\end{aligned}$$

Teorema 1.3. *Neka $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Tada je funkcija $V_g f$ uniformno neprekidna na $\mathbb{R}^{2d}$ i važi:*

$$
\begin{aligned}
&(2) \qquad & V_g f(x,\omega) &= (f \cdot T_x \overline{g})\hat{}\,(\omega) \\
&(3) & &= \langle f, M_\omega T_x g\rangle \\
&(4) & &= \langle \hat{f}, T_\omega M_{-x} \hat{g}\rangle \\
&(5) & &= e^{-2\pi i x\cdot\omega} (\hat{f} \cdot T_\omega \overline{\hat{g}})\hat{}\,(-x) \\
&(6) & &= e^{-2\pi i x\cdot\omega} V_{\hat{g}} \hat{f}(\omega, -x) \\
&(7) & &= (\hat{f} * M_{-x} \hat{g}^*)(\omega) \\
&(8) & &= e^{-2\pi i x\cdot\omega} (f * M_\omega g^*)(x) \\
&(9) & &= e^{-\pi i x\cdot\omega} \int_{\mathbb{R}^d} f(t + \frac{x}{2})\, \overline{g}(t - \frac{x}{2}) e^{-2\pi i t\cdot\omega} dt.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Na ovom mestu neće se dokazivati uniformna neprekidnost. Jednakost (2) direktno sledi iz definicije:

$$V_g f(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \overline{g(t-x)} \cdot e^{-2\pi i t\cdot\omega} dt = (f \cdot T_x \overline{g})\hat{}\,(\omega).$$

Dalje je

$$(f \cdot T_x \overline{g})\hat{}\,(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \cdot \overline{e^{2\pi i t\cdot\omega} \cdot T_x g(t)} dt = \langle f, M_\omega T_x g\rangle,$$

a to je (3). Iz Parsevalove jednakosti i odnosa Furijeove transformacije sa operacijama translacije i modulacije sledi jednakost (4):

$$\langle f, M_\omega T_x g\rangle = \langle \hat{f}, (M_\omega T_x g)\hat{}\,\rangle = \langle \hat{f}, T_\omega M_{-x} \hat{g}\rangle.$$

Koristeći (2) $\Leftrightarrow$ (3) (primenjeno na $\hat{f}$ i $\hat{g}$ umesto na f i g dobijaju se (5) i (6):

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{f}, T_\omega M_{-x} \hat{g}\rangle &= \langle \hat{f}, e^{2\pi i x\omega} M_{-x} T_\omega \hat{g}\rangle = e^{-2\pi i x\omega} \langle \hat{f}, M_{-x} T_\omega \hat{g}\rangle \\
&= e^{-2\pi i x\omega} (\hat{f} \cdot T_\omega \overline{\hat{g}})\hat{}\,(-x) = e^{-2\pi i x\omega} V_{\hat{g}} \hat{f}(\omega, -x).
\end{aligned}
$$

Iz Leme 1.2 sledi

$$V_g f(x,\omega) = (f \cdot T_x \overline{g})\hat{}\,(\omega) = (\hat{f} * (T_x \overline{g})\hat{}\,)(\omega).$$

Kako je $(T_x \overline{g})\hat{}\, = M_{-x} \hat{\overline{g}}$ dobija se (7):

$$V_g f(x,\omega) = (\hat{f} * M_{-x} \hat{\overline{g}})(\omega) = (\hat{f} * M_{-x} \hat{g}^*)(\omega),$$

jer je

$$
\begin{aligned}
\hat{\overline{g}}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g}(x) e^{-2\pi i x\omega} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x) e^{2\pi i x\omega}} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(x) e^{-2\pi i x(-\omega)}} dx = \overline{\hat{g}(-\omega)} = \hat{g}^*(\omega).
\end{aligned}
$$

Formula (8) sledi iz $(M_\omega g^*)^* = M_\omega g$ i zapisivanja translacije u vidu konvolucije:

$$\langle f, T_x M_\omega g\rangle = \langle f, T_x(M_\omega g^*)^*\rangle = (f * M_\omega g^*)(x).$$

Konačno, (9) se dobija smenom promenljive $t \mapsto t + x/2$. integralu.

□

Formule navedene u prethodnoj teoremi predstavljaju različite oblike kratkotrajne Furijeove transformacije (STFT):

a) U formulama (3) i (4) $V_g f$ je zapisana kao skalarni proizvod funkcije f $(\hat{f})$ sa odgovarajućim vremensko-frekvencijskim pomeranjima funkcije g $(\hat{g})$.
b) U formulama (2) i (5) STFT je zapisana kao (lokalna) Furijeova transformacija funkcija f i $\hat{f}$;
c) U formulama (7) i (8) STFT je zapisana kao konvolucija.

Formula $V_g f(x,\omega) = e^{-2\pi i x\cdot\omega} V_{\hat{g}}\hat{f}(\omega, -x)$ se naziva *osnovni identitet vremensko-frekvencijske analize.*

Neka je $f \otimes g$ tenzorski proizvod dat sa $(f\otimes g)(x,t) = f(x)g(t)$, neka je $\mathcal{T}_a$ asimetrična transformacija koordinata data sa

$$\mathcal{T}_a F(x,t) = F(t, t-x)$$

i neka je $\mathcal{F}_2$ parcijalna Furijeova transformacija funkcije F definisane na $\mathbb{R}^{2d}$ po promenljivoj $\omega \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{F}_2 F(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x,t) e^{-2\pi i t\cdot\omega} dt.$$

STFT se, prema tome može zapisati i u sledećem obliku:

$$V_g f = \mathcal{F}_2 \mathcal{T}_a (f \otimes \overline{g}).$$

Lema 1.4. *Kad god je $V_g f$ definisano važi:*

$$(10) \quad V_g(T_u M_\eta f)(x,\omega) = e^{-2\pi i u\cdot\omega} V_g f(x-u, \omega-\eta), \quad x,u,\omega,\eta \in \mathbb{R}^d.$$

Dokaz. Uvrstivši relaciju komutativnosti $M_{-\eta}T_{-u}M_\omega T_x = e^{2\pi i u\cdot\omega} M_{\omega-\eta}T_{x-u}$ u definiciju dobija se

$$\begin{aligned} V_g(T_u M_\eta f)(x,\omega) &= \langle T_u M_\eta f, M_\omega T_x g\rangle \\ &= \langle f, M_{-\eta}T_{-u}M_\omega T_x g\rangle \\ &= \langle f, e^{2\pi i u\cdot\omega} M_{\omega-\eta}T_{x-u} g\rangle \\ &= e^{-2\pi i u\cdot\omega}\langle f, M_{\omega-\eta}T_{x-u} g\rangle \\ &= e^{-2\pi i u\cdot\omega} V_g f(x-u, \omega-\eta). \end{aligned}$$

□

1.1. **Relacija ortogonalnosti i formula inverzije.** Kratkotrajna Furijeova transformacija poseduje određene osobine slične onima koje poseduje Furijeova transformacija. Sledeća teorema o skalarnom proizvodu dve STFT odgovara Parsevalovoj formuli i često se koristi.

Teorema 1.5. (Relacije ortogonalnosti za STFT) *Neka* $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*. Tada* $V_{g_j} f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ *za* $j = 1, 2$*, i važi*

$$\langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}. \tag{11}$$

Dokaz. Korisitmo najpre zapis STFT dat sa (2), a zatim Parsevalovu jednakost primenjenu na integral po promenljivoj ω:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} V_{g_1} f_1(x,\omega) \overline{V_{g_2} f_2(x,\omega)} d\omega dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} (f_1 \cdot T_x \overline{g_1})\hat{}(\omega) \overline{(f_2 \cdot T_x \overline{g_2})\hat{}(\omega)} d\omega \Big) dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f_1(t) \cdot T_x \overline{g_1(t)} \cdot \overline{f_2(t) \cdot T_x \overline{g_2(t)}} dt \Big) dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} (f_1(t) \cdot \overline{f_2(t)} \cdot \overline{g_1(t-x)} \cdot g_2(t-x) dt \Big) dx.
\end{aligned}$$

pri čemu Fubinijeva teorema dozvoljava promenu redosleda integracije. Dakle,

$$\begin{aligned}
\langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} &= \int_{\mathbb{R}^d} f_1(t) \overline{f_2(t)} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \overline{g_1(t-x)} g_2(t-x) dx \Big) dt \\
&= \langle f_1, f_2 \rangle \, \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}.
\end{aligned}$$

□

Posledica 1.6. *Ako* $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$*, tada je* $\|V_g f\| = \|f\| \|g\|$*. Posebno, ako je* $\|g\| = 1$ *tada je*

$$\|f\| = \|V_g f\| \tag{12}$$

za sve $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$*, odnosno STFT je izometrija iz* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *u* $L^2(\mathbb{R}^{2d})$*.*

Ostaje pitanje kako iz $V_g f$ da dobijemo funkciju f, odnosno da li postoji formula inverzije za STFT i u kom smislu. Najpre uvodimo *jednakost u slabom smislu*: Dve funkcije f i $\tilde{f}$ su jednake u slabom smislu u $L^2(\mathbb{R}^d)$ ako je

$$\langle f, h \rangle = \langle \tilde{f}, h \rangle, \quad \forall h \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Tada je $\langle f - \tilde{f}, h \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - \tilde{f}(x)) \overline{h(x)} dx = 0$, za sve $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Ako je $h = f - \tilde{f}$, dobija se $\|f - \tilde{f}\| = 0$, pa iz slabe jednakosti sledi jednakost u normi.

Teorema 1.7. (Formula inverzije za STFT) *Pretpostavimo da $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i $\langle g, \gamma \rangle \neq 0$. Tada za sve $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ važi*

$$f = \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x, \omega) M_\omega T_x \gamma \, d\omega \, dx \tag{13}$$

u slabom smislu.

Dokaz. Kako je $V_g f(x, \omega) = \langle f, M_\omega T_x g \rangle$, dobija se

$$\overline{V_\gamma h}(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{h}(t) M_\omega T_x \gamma(t) dt,$$

pa je $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x, \omega) \cdot \overline{V_\gamma h}(x, \omega) \, dx \, d\omega$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x, \omega) \cdot M_\omega T_x \gamma(t) \, dx \, d\omega \right) \overline{h}(t) dt \\ &= \langle \iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x, \omega) \cdot M_\omega T_x \gamma \;\, dx \, d\omega, h \rangle. \end{aligned}$$

Na osnovu relacije ortogonalnosti važi

$$\langle f, h \rangle = \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \cdot \langle V_g f, V_\gamma h \rangle$$

$$= \langle \left(\iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x, \omega) \cdot M_\omega T_x \gamma \;\, dx \, d\omega \right), h \rangle, \quad \forall h \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

odakle sledi (13).

□

2. Malotalasna transformacija

Definicija 2.1. *Mali talas*[1] *je funkcija $\psi \in L^2(\mathbb{R}) \setminus 0$ za koju važi:*

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty, \tag{14}$$

a malotalasna transformacija je definisana sa

$$(T^{wav} f)(a, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |a|^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi(\frac{x - t}{a})} f(x) dx, \tag{15}$$

za $a \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$.

[1] engl. wavelet

Primetimo da iz $C_\psi < \infty$ sledi $\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0$, pa funkcija ψ osciluje i opada u beskonačnosti, zbog čega je prozvana malim talasom, to jest talasićem. Sa druge strane, ako je $\hat{\psi}(0) = 0$ i ako je $\hat{\psi}(\omega)$ neprekidno diferencijabilna, onda važi $C_\psi < \infty$. Na primer, iz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |t|)|\psi(t)|dt < \infty$$

sledi da je $\hat{\psi}(\omega)$ neprekidno diferencijabilna.

Na primer, funkcija g data sa

$$g(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq u < 1, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

je jedan mali talas, koji se naziva Harovim vejvletom.

Koristeći operatore translacije i dilatacije malotalasna transformacija se može zapisati u sledećem obliku:

$$(T^{wav} f)(a, t) = \langle f, T_t D_{1/a} g \rangle = (f * D_{1/a} g^*)(t).$$

Kao i kod kratkotrajne Fujeove transformacije, polazni signal se može rekonstruisati iz svoje vejvlet transformacije. Dokažimo najpre relaciju ortogonalnosti za malotalasnu transformaciju.

Teorema 2.2. *Neka je* $\psi \neq 0$ *proizvoljan mali talas. Tada za sve* $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ *važi*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T^{wav} f(a, b) \overline{T^{wav} g(a, b)} \frac{dadb}{a^2} = C_\psi \langle f, g \rangle, \tag{16}$$

gde je C_ψ *definisano sa* (14).

Dokaz. Bez dodatnih objašnjenja koristiće se Fubinijeva teorema po potrebi. Iz Parsevalove jednakosti sledi

$$\langle f, T_t D_{1/a} g \rangle = \langle \hat{f}, (T_t D_{1/a} g)\hat{\ } \rangle = \langle \hat{f}, M_{-t} D_a \hat{g} \ \rangle$$

pa je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T^{wav} f(a, b) \overline{T^{wav} g(a, b)} \frac{dadb}{a^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)|a|^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i b \xi} \overline{\hat{\psi}(a\xi)} d\xi][\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{g}(\xi')}|a|^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i b \xi'} \hat{\psi}(a\xi') d\xi'] \frac{dadb}{a^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i b(\xi' - \xi)} db \int_{-\infty}^{+\infty} [\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)|a|^{\frac{1}{2}} \overline{\hat{\psi}(a\xi)} d\xi][\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{g}(\xi')}|a|^{\frac{1}{2}} \hat{\psi}(a\xi') d\xi'] \frac{da}{a^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [\iint_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\psi}(a\xi)} \overline{\hat{g}(\xi')} \hat{\psi}(a\xi') \delta(\xi - \xi') d\xi d\xi'] \frac{da}{|a|}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(a\xi)|^2 \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} d\xi \frac{da}{|a|},$$

pri čemu smo koristili $\hat{\delta} = 1$, odnosno $\delta(\cdot) = \hat{1} = \int e^{-2\pi x \cdot} dx$. Ovo je formalni zapis u kojem se manipuliše divergentim integralima, a strogi matematički dokaz datih jednakosti se može dobiti, na primer korišćenjem delta konvergentnih nizova. Uz to, koristili smo $\delta(\xi - \xi') = \delta(\xi' - \xi)$ i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{g}(\xi')}\hat{\psi}(a\xi')\delta(\xi - \xi')d\xi' = (\delta * (\overline{\hat{g}(\cdot)}\hat{\psi}(a\cdot))(\xi) = \overline{\hat{g}(\xi)}\hat{\psi}(a\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Smenom $a\xi \mapsto y$ dobija se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(a\xi)|^2 \frac{da}{|a|} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(y)|^2 \frac{dy}{|y|} = C_\psi,$$

pa je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T^{wav} f(a,b)\overline{T^{wav} g(a,b)} \frac{dadb}{a^2} = C_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = C_\psi \langle f, g\rangle.$$

$\square$

Kao i u lekciji o STFT, istom argumentacijom zaključujemo da se formula (16) može čitati i kao

$$f = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T^{wav} f(a,b)\psi^{a,b} \frac{dadb}{a^2}$$

gde je $\psi^{a,b}(x) = |a|^{1/2}\psi(\frac{x-b}{a})$, pri čemu je jednakost u slabom smislu, to jest

$$\langle C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T^{wav} f(a,b)\psi^{a,b} \frac{dadb}{a^2}, h\rangle = \langle f, h\rangle, \quad \forall h \in L^2(\mathbb{R}).$$

Takođe, pri sintezi signala moguće je izabrati drukčiji mali talas od onog koji je korišćen za analizu. Preciznije, ako je

$$C_{\psi_1,\psi_2} = \int |\xi|^{-1} |\hat{\psi_1}(\xi)| \hat{\psi_2}(\xi)| d\xi < \infty,$$

istom argumentacijom kao i u dokazu formule (16) dokazuje se da važi

$$\iint \langle f, \psi_1^{a,b}\rangle \langle g, \psi_2^{a,b}\rangle \frac{dadb}{a^2} = C_{\psi_1,\psi_2}\langle f, g\rangle.$$

Za $C_{\psi_1,\psi_2} \neq 0$ se dobija

$$f = C_{\psi_1,\psi_2}^{-1} \iint \langle f, \psi_1^{a,b}\rangle \psi_2^{a,b} \frac{dadb}{a^2},$$

gde je jednakost u slabom smislu.

Na kraju, bez dokaza navodimo jedan dovoljan uslov za tačkastu konvergenciju.

Lema 2.3. *Neka $\psi_1, \psi_2 \in L^1(\mathbb{R})$, tako da je ψ_2 diferencijabilna, $\psi_2' \in L^2(\mathbb{R})$, i $x\psi_2 \in L^2(\mathbb{R})$ i neka je $\hat{\psi}_1(0) = 0 = \hat{\psi}_2(0)$. Ako je $f \in L^2(\mathbb{R})$ ograničena, tada u svakoj tački x u kojoj je f neprekidna važi*

$$f(x) = C_{\psi_1,\psi_2}^{-1} \lim_{\substack{A_1 \to 0 \\ A_2 \to \infty}} \int_{A_1 \leq |a| \leq A_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_1^{a,b} \rangle \psi_2^{a,b}(x) \frac{dadb}{a^2}$$

2.1. **Rezime.**

(1) Definicija STFT i detaljna argumentacija za
$$V_g f(x,\omega) = (\hat{f} * M_{-x}\hat{g}^*)(\omega).$$
(2) Definicija STFT i detaljna argumentacija za
$$V_g f(x,\omega) = e^{-2\pi i x\cdot\omega}(\hat{f} \cdot T_\omega \overline{\hat{g}})\hat{}(-x).$$
(3) Definicija STFT i detaljna argumentacija za osnovni identitet vremensko-frekvencijske analize,
$$V_g f(x,\omega) = e^{-2\pi i x\cdot\omega} V_{\hat{g}} \hat{f}(\omega, -x).$$
(4) Definicija STFT i detaljna argumentacija za
$$V_g f(x,\omega) = e^{-2\pi i x\cdot\omega}(f * M_\omega g^*)(x).$$
(5) Definicija STFT i dokaz jednakosti
$$V_g(T_u M_\eta f)(x,\omega) = e^{-2\pi i u\cdot\omega} V_g f(x-u, \omega-\eta), \quad x, u, \omega, \eta \in \mathbb{R}^d.$$
(6) Relacija ortogonalnosti za STFT.
(7) Formula inverzije za STFT.
(8) Definicija malog talasa, malotalasne transformacije (WT) i dokaz relacije ortogonalnosti za WT.
(9) Definicija malog talasa, malotalasne transformacije (WT) i detaljan dokaz formule inverzije
$$f = C_{\psi_1,\psi_2}^{-1} \iint \langle f, \psi_1^{a,b} \rangle \psi_2^{a,b} \frac{dadb}{a^2}.$$