Izabrana poglavlja
primenjene analize
14. XII 2017.

1. Furijeova transformacija u $L^1(\mathbb{R})$, nastavak

U ovom predavanju se nastavlja proučavanje osnovnih svojstava Furijeove transformacije.

1.1. Diferencijabilnost i opadanje. U nastavku se pokazuje da primenom Furijeove transformacije svojstvo opadanja funkcije f prelazi u odgovarajuće svojstvo diferencijabilnosti funkcije $\mathcal{F}f = \hat{f}$.

Vektorski prostor $m-$puta neprekidno diferencijabilnih funkcija koje opadaju u beslonačnosti ($\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0$) označava se sa $C_0^m(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$, a $C_0(\mathbb{R})$ je oznaka za prostor čiji su elementi neprekidne funkcije koje opadaju u beslonačnosti.

Teorema 1.1. *Neka $f \in L^1(\mathbb{R})$ i $x^m f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ za neko $m \in \mathbb{N}$. Tada $\hat{f} \in C_0^m(\mathbb{R})$, to jest $\hat{f}$ je m puta neprekidno diferencijabilna i $\hat{f}^{(k)} \in C_0(\mathbb{R})$, $k = 0, \ldots, m$. Pri tome važi:*

$$\hat{f}^{(k)}(\xi) = \frac{d^k}{d\xi^k}\hat{f}(\xi) = ((-2\pi i x)^k f(x))\hat{\ }(\xi), \quad k = 0, \ldots, m.$$

Dokaz. Dokažimo za $k = 1$, a za $k = 2, \ldots, m$ dokaz je analogan.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) &= \frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d}{d\xi} e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-2\pi i x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= ((-2\pi i x) f(x))\hat{\ }(\xi). \end{aligned}$$

Razmena graničnih procesa je obezbeđena Lebegovom teoremom o dominantnoj konvergenciji. $\square$

Na sličan način Furijeovom transformacijom se svojstvo diferencijabilnosti funkcije f preslikava na odgovarajuće svojstvo opadanja funkcije $\hat{f}$. Tvrđenje se usvaja bez dokaza.

Teorema 1.2. *Neka su dati $f \in L^1(\mathbb{R})$ i $m \in \mathbb{N}$. Ako je funkcija f m puta diferencijabilna i $f^{(k)}(x) \in L^1(\mathbb{R})$, $k = 0, \ldots, m$ onda važi:*

$$(f^{(k)}(x))\hat{\ }(\xi) = ((-2\pi i \xi)^k)\hat{f}(\xi), \quad k = 0, \ldots, m.$$

Prema tome $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f^{(m)}\|_{L^1}/|2\pi\xi|^m$, $\xi \neq 0$.

Posledica ove teoreme je da glatkost funkcije f implicira integrabilnost funkcije $\hat{f}$.

Posledica 1.3. *Ake je* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *dva puta diferencijabilna i* $f''(x) \in L^1(\mathbb{R})$, *onda njena Furijeova transformacija* $\hat{f}$ *opada u beskonačnosti kao* $C/|\xi|^2$, *pa* $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. *Posebno*

$$f \in C_c^2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Sa $C_c^k(\mathbb{R})$ označavamo $k-$puta neprekidno diferencijabilne funkcije kompaktnog nosača.

Dokaz. S obzirom da je $\hat{f}$ neprekidna, sledi da je ograničena u okolini nule. Iz teoreme 1.2 sledi $|\hat{f}(\xi)| \leq C/|\xi|^m$, izvan proizvoljne okoline nule. Prema tome, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. $\square$

Primetimo da, ako je f glatka i ako pri tome opada u beskonačnosti, oba svojstva se prenose na $\hat{f}$. Ovim je motivisano uvođenje posebnog prostora funkcija.

Definicija 1.4. *(Švarcova klasa) Švarcov prostor funkcija* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *se sastoji od svih beskonačno puta diferencijabilnih funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *za koje važi*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| = \|x^m f^{(n)}(x)\|_\infty < \infty, \quad m, n \geq 0.$$

Dakle, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ako i samo ako za svaki izbor $m, n \in \mathbb{N}_0$ postoje konstante $C_{m,n} > 0$ tako da važi:

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{C_{m,n}}{|x|^m}, \quad x \neq 0.$$

Uobičajeno je da se elementi prostora $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nazivaju *brzo opadajuće funkcije*.

Na primer, gausovska funkcija $e^{-\pi x^2}$ je brzo opadajuća funkcija. Takođe, sve beskonačno puta diferencijabilne (glatke) fukcije kompaktnog nosača $C_c^\infty(\mathbb{R})$ su elementi prostora $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Može se dokazati da je Furijeova transformacija bijektivno preslikavanje skupa $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ na samog sebe.

Kako je $C_c^\infty(\mathbb{R})$ *gust* u $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ (u normi prostora L^p), sledi da je i $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gust u tim prostorima.

Iz navedenih razmatranja zaključujemo da, ako je $f \in L^1(\mathbb{R})$ i $\hat{f} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, onda važi $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

1.2. **Furijeova transformacija gausovske funkcije.** Neka je $\varphi_a(x) = e^{-\pi x^2/a}$, $x \in \mathbb{R}$, gausovska funkcija, $a > 0$. Tada je

$$\widehat{\varphi_a}(\xi) = \sqrt{a}\varphi_{1/a}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Posebno, ako je $a = 1$, onda je $\mathcal{F} : e^{-\pi x^2} \mapsto e^{-\pi \xi^2}$.

Dokaz. S obzirom da je φ brzo opadajuća funkcija, važe formule za diferenciranje, pa iz

$$\varphi_a'(x) = -2\pi x a^{-1}\varphi_a(x)$$

sledi

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}\widehat{\varphi_a}(\xi) &= (-2\pi i\xi x\varphi_a(x))\hat{}(\xi) \\ &= (ia\frac{d}{dx}\varphi_a(x))\hat{}(\xi) \\ &= ia(2\pi i\xi)\widehat{\varphi_a}(\xi). \end{aligned}$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{\varphi_a}(\xi) = ia(2\pi i\xi)\widehat{\varphi_a}(\xi)$$

je $\widehat{\varphi_a}(\xi) = Ce^{-\pi a\xi^2}$. Konstanta C je data sa $C = \widehat{\varphi_a}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2/a}dx$ $= \sqrt{a}$, pa je

$$\mathcal{F}(e^{-\pi x^2/a})(\xi) = \sqrt{a}e^{-\pi a\xi^2}$$

čime je tvrđenje dokazano. $\square$

Sada smo u mogućnosti da dokažemo formulu inverzije. Podsetimo se najpre formulacije teoreme o inverziji.

Teorema 1.5. *Ako $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ onda su f i $\hat{f}$ neprekidne funkcije i*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Neka je $\varphi_a(x) = e^{-\pi x^2/a}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, gausovska funkcija. Tada je $\{\varphi_\varepsilon(x)/\sqrt{\varepsilon}\}$ jedan delta niz kada $\varepsilon \to 0^+$. Takođe,

$$\varphi_{1/\varepsilon}(x) = e^{-\pi\varepsilon x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Za pogodno izabranu funkciju $\hat{\phi}$ važi

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx, \\
\hat{\phi}(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi t} &= \hat{\phi}(\xi)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx\right)e^{2\pi i\xi t}, \\
(2)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\phi}(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi t}d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\phi}(\xi)e^{-2\pi i\xi(x-t)}d\xi\right)dx.
\end{aligned}$$

Ako se umesto $\hat{\phi}$ izabere familija funkcija $\hat{\phi}_\varepsilon$ tako da je

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\phi}_\varepsilon(\xi)e^{-2\pi i\xi(x-t)}d\xi = \delta(x-t),$$

onda desna strana jednakosti (2) postaje $(f * \delta)(t) = f(t)$.

Dakle, ako je $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\phi}_\varepsilon(\xi)e^{-2\pi i\xi(x-t)}d\xi$ delta niz oblika $e^{-\pi/\varepsilon(x-t)^2}/\sqrt{\varepsilon}$, onda iz (1) (sa $a = 1/\varepsilon$ i sa $\xi = x - t$) sledi

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}e^{-\frac{\pi(x-t)^2}{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\varepsilon}\mathcal{F}(e^{-\pi\varepsilon\xi^2})(x-t) = \mathcal{F}(\hat{\phi}_\varepsilon(\xi))(x-t),$$

ako je $\hat{\phi}_\varepsilon(\xi) = e^{-\pi\varepsilon\xi^2}$. Jednakost (2) postaje

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\varepsilon\xi^2}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi t}d\xi \\
&\qquad = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}e^{-\frac{\pi x^2}{\varepsilon}}e^{-2\pi i\xi(x-t)}d\xi\right)dx \\
&\qquad\qquad = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}e^{-\pi/\varepsilon(x-t)^2}dx,
\end{aligned}$$

to jest

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi t}d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-t)dx,$$

pa je $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi t}d\xi$, čime je teorema dokazana. □

1.3. **Osnovne operacije vremensko-frekvencijske analize.** U osnovne operacije vremensko-frekvencijske analize spadaju: translacija, modulacija i dilatacija. Posebno nas interesuje međuodnos ovih operacija i Furijeove transformacije, što je osnovna tema ovog poglavlja.

Definicija 1.6. *Neka je data funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

- *operator translacije* T_y *je dat sa:* $(T_y f)(x) = f(x-y)$, $y \in \mathbb{R}$.
- *operator dilatacije* D_y *je dat sa:* $(D_y f)(x) = \sqrt{y}f(y \cdot x)$, $y > 0$.

- *operator modulacije M_y je dat sa:* $(M_y f)(x) = e^{2\pi iyx} f(x)$, $y \in \mathbb{R}$.

Operatori T_y i M_y su izometrije na $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, a operator D_y je izometrija na $L^2(\mathbb{R})$.

Dokažimo da važi sledeće svojstvo komutacije: $T_x M_\xi = e^{-2\pi ix\xi} M_\xi T_x$.

$$\begin{aligned} T_x M_\xi f(\cdot) = T_x(M_\xi f)(\cdot) &= (M_\xi f)(\cdot - x) \\ &= e^{2\pi i\xi(\cdot - x)} f(\cdot - x) \\ &= e^{-2\pi i\xi x} e^{2\pi i\xi\cdot} f(\cdot - x) \\ &= e^{-2\pi i\xi x} M_\xi (T_x f)(\cdot) = e^{-2\pi i\xi x} M_\xi T_x f(\cdot). \end{aligned}$$

Teorema 1.7. *Neka $f \in L^1(\mathbb{R})$. Furijeova transformacija razmenjuje operator translacije operatorom modulacije i obratno:*

$$(T_y f)\hat{}(\xi) = M_{-y}\hat{f}(\xi) = e^{-2\pi i\xi y}\hat{f}(\xi),$$

$$(M_y f)\hat{}(\xi) = T_y\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi - y), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Nasuprot tome, Furijeova transformacija dilataciju prevodi u recipročnu dilataciju:

$$(D_y f)\hat{}(\xi) = D_{1/y}\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{y}}\hat{f}(\frac{\xi}{y}), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Navedene jednakosti su tačkaste svuda.

Dokaz. Dokaz sledi jednostavnom smenom promenjive:

$$\begin{aligned} (T_y f)\hat{}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) e^{-2\pi i\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i\xi(x+y)} dx \\ &= e^{-2\pi i\xi y} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i\xi x} dx \\ &= e^{-2\pi i\xi y}\hat{f}(\xi) = M_{-y}\hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Slično, za modulaciju važi:

$$\begin{aligned} (M_y f)\hat{}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (M_y f)(x) e^{-2\pi i\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i(\xi - y)x} dx \\ &= \hat{f}(\xi - y) = T_y\hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Čitaocu se ostavlja za vežbu da dokaže da je $(D_y f)\hat{}(\xi) = D_{1/y}\hat{f}(\xi)$. $\square$

Kompozicijom translacije i modulacije dobija se jedna od najznačajnijih formula vremensko-frekvencijske analize:

$$(T_x M_\xi f)\hat{} = M_{-x} T_\xi \hat{f} = e^{-2\pi i \xi x} T_\xi M_{-x} \hat{f}.$$

1.4. **Rezime.**

(1) Formulisati i dokazati teoremu 1.1. Formulisati teoremu 1.2 i njenu posledicu. Definisati Švarcovu klasu.
(2) Odrediti Furijeovu transformaciju funkcije $e^{-\pi x^2/a}$, $x \in \mathbb{R}$, za zadato $a > 0$.
(3) Formulisati i dokazati formulu inverzije.
(4) Definisati operatore translacije, modulacije i dilatacije. Pokazati sa je $T_x M_\xi = e^{-2\pi i x \xi} M_\xi T_x$. Formulisati i dokazati teoremu 1.7.
(5) Zadatak za vežbu: Neka je $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$. Dokazati da je
$$M_{-\xi} T_{y-x} M_\eta = e^{-2\pi i \eta (y-x)} M_{\eta-\xi} T_{y-x},$$
kao i da proizvoljno $a > 0$ i sve $x, y, \xi, \eta \in \mathbb{R}$ važi:
$$\langle \varphi_a, M_\xi T_x \varphi_a\rangle = \sqrt{\frac{a}{2}} e^{-\pi i x \xi} \varphi_{2a}(x) \varphi_{2/a}(\xi).$$
Koristeći ove rezultate dokazati da je
$$\langle T_x M_\xi \varphi_a, T_y M_\eta \varphi_a\rangle = \sqrt{\frac{a}{2}} e^{\pi i (y-x)(\xi+\eta)} \varphi_{2a}(y-x) \varphi_{2/a}(\eta - \xi).$$