

Izabrana poglavlja
primenjene analize
01. XI 2017.

1. FURIJEOVA TRANSFORMACIJA U $L^1(\mathbb{R})$

U ovom predavanju se proučavaju osnovna svojstva Furijeove transformacije. Pretpostavlja se da je čitalac upoznat sa Banahovim prostorima $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$. Posebno, koristiće se norme:

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx, \\ \|f\|_{L^2} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \\ \|f\|_{L^\infty} &= \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \inf\{M : f \leq M \text{ skoro svuda}\}.\end{aligned}$$

Pri tome, $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p = \{1, 2, \infty\}$ kao i samo ako su odgovarajuće norme konačne. Elemente prostora $L^p(\mathbb{R})$, $p = \{1, 2, \infty\}$ nazivamo integrabilnim, kvadrat integrabilnim i esencijalno ograničenim funkcijama.

1.1. Motivacija. U kursu Furijeove analize posmatra se Hilbertov prostor kvadrat integrabilnih funkcija $L^2(0, 1)$ i dokazuje se da je skup funkcija $\{e^{2\pi i n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ poptun sistem ortogonalnih funkcija, odakle sledi razvoj u Furijeov red proizvoljne funkcije $f \in L^2(0, 1)$:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}, \quad x \in [0, 1],$$

gde je $c_n = \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx$, $n \in \mathbb{Z}$. Pri tome je jednakost u normi prostora $L^2(0, 1)$.

Ovde uočavamo operatore *analize*:

$$C : L^2(0, 1) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}), \quad Cf = \{c_n\}$$

i *sinteze*

$$S : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, 1), \quad S(\{c_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}.$$

Sa $l^2(\mathbb{Z})$ je označen prostor kvadrat integrabilnih nizova (kompleksnih brojeva): $\{c_n\} \in l^2(\mathbb{Z})$ ako i samo ako je $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$.

Funkcije $e^{2\pi inx}$ nisu kvadrat integrabilne na \mathbb{R} , ali su ograničene: $|e^{2\pi inx}| = 1$, $n \in \mathbb{Z}$, pa je preslikavanje

$$\langle f, e^{2\pi inx} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi inx} dx,$$

dobro definisano za sve apsolutno integrabilne funkcije $f \in L^1(\mathbb{R})$.¹

1.2. Definicija i osnovna svojstva. S obzirom da preusmeravamo pažnju sa funkcija definisanih nad intervalom $[0, 1]$ (odnosno periodičnih funkcija) na apsolutno integrabilne funkcije, umesto celobrojnih vrednosti (frekvencija) $n \in \mathbb{Z}$ posmatraće se sve realne frekvencije $\xi \in \mathbb{R}$, odnosno umesto baznih funkcija $e^{2\pi inx}$ posmatraće se funkcije $e^{2\pi i\xi x}$. Po analogiji sa operatorom analize koji funkciji dodeljuje niz, uvodi se novi operator, Furijeova transformacija, koja funkciji f dodeljuje funkciju \hat{f} na sledeći način:

Definicija 1.1. *Furijeova transformacija funkcije $f \in L^1(\mathbb{R})$ je funkcija $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definisana sa*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Kao operator, Furijeova transformacija je preslikavanje $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$.

U literaturi se ponekad Furijeova transformacija definiše korišćenjem neke druge konstante umesto konstante -2π .

Funkcija $f \in L^1(\mathbb{R})$ ne mora da bude definisana za sve $x \in \mathbb{R}$, to jest moguće je da je f definisana za skoro sve $x \in \mathbb{R}$. Nasuprot tome, \hat{f} je definisana za sve $\xi \in \mathbb{R}$, jer je

$$(1) \quad |\hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-2\pi i\xi x}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1} < \infty.$$

Može se dokazati i jače tvrđenje:

Lema 1.2. *Ako $f \in L^1(\mathbb{R})$ onda je njena Furijeova transformacija \hat{f} ograničena i uniformno neprekidna funkcija na \mathbb{R} i $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$.*

¹Za vežbu dokazati: $(1+x^2)^{-1/2} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ i $|x|^{-1/2}(1+x^2)^{-1} \in L^1(\mathbb{R}) \setminus L^2(\mathbb{R})$.

Dokaz. Za proizvoljne $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ važi:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi + \eta) - \hat{f}(\xi)| &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} (e^{-2\pi i \eta x} - 1) dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |e^{-2\pi i \xi x}| |e^{-2\pi i \eta x} - 1| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |e^{-2\pi i \eta x} - 1| dx, \end{aligned}$$

pa je

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\xi + \eta) - \hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |e^{-2\pi i \eta x} - 1| dx.$$

Kako je $|f(x)| |e^{-2\pi i \eta x} - 1| \leq 2|f(x)|$, Na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji važi

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} (\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\xi + \eta) - \hat{f}(\xi)|) \leq \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |e^{-2\pi i \eta x} - 1| dx \right) = 0,$$

odakle sledi uniformna neprekidnost funkcije \hat{f} .

Oganičenost sledi iz (1), a supremum po ξ daje $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$. \square

Primer 1.3. Neka je $\chi_{[-T, T]}$ karakteristična funkcija intervala $[-T, T]$, $T > 0$:

$$\chi_{[-T, T]}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-T, T], \\ 0, & t \notin [-T, T]. \end{cases}$$

Ova funkcija pripada prostoru $L^1(\mathbb{R})$, a njena Furijeova transformacija je data sa:

$$\hat{\chi}_{[-T, T]}(\xi) = \int_{-T}^T e^{-2\pi i \xi x} dx = \begin{cases} \frac{\sin 2\pi T \xi}{\pi \xi}, & \xi \neq 0, \\ 2T, & \xi = 0. \end{cases}$$

Primetimo da je $\|\hat{\chi}_{[-T, T]}\|_{L^\infty} < \infty$.²

Kada je $T = 1/2$, funkcija $\frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}$ se zove *sinc* funkcija (preciznije, njeno neprekidno produženje u nuli). Ona je uniformno neprekidna na \mathbb{R} , ali nije apsolutno integrabilna. Dokažimo to.

²Određiti $\|\chi_{[-T, T]}\|_{L^1}$ i $\|\hat{\chi}_{[-T, T]}\|_{L^\infty}$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \right| d\xi &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \\
&\geq \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \\
&\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.
\end{aligned}$$

Nasuprot tome, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$, odakle sledi $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mt}{\pi t} dt = 1$.

Primer 1.4. Niz funkcija $\left\{ \frac{\sin mt}{\pi t} \right\}_{m \in \mathbb{N}}$ je delta konvergentan niz, to jest

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mt}{\pi t} f(t) dt = f(0).$$

Ovu činjenicu usvajamo bez dokaza. Intuitivno, kada $m \rightarrow \infty$ funkcije $\frac{\sin mt}{\pi t}$ teže ka Furijeovoj transformaciji konstantne funkcije $\chi_{(-\infty, \infty)}(\xi) = 1$, a kako je $\hat{\delta} = 1$ (ovo sledi iz formule za Furijeovu transformaciju konvolucije), naslućujemo da $\frac{\sin mt}{\pi t}$ konvergira ka delta impulsu kada $m \rightarrow \infty$.

Sledeći rezultat daje dodatno svojstvo Furijeove transformacije apsolutno integrabilne funkcije.

Teorema 1.5. (Riman-Lebegova lema) Ako $f \in L^1(\mathbb{R})$ onda njena Furijeova transformacija \hat{f} pripada prostoru $C_0(\mathbb{R})$ neprekidnih funkcija koje u beskonačnosti opadaju ka nuli, to jest $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$.

Dokaz. Već znamo da je \hat{f} neprekidna funkcija. Smenom $x \rightarrow s - 1/(2\xi)$ dobija se

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(s - \frac{1}{2\xi}\right) e^{-2\pi i \xi \left(s - \frac{1}{2\xi}\right)} ds \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} f\left(s - \frac{1}{2\xi}\right) e^{-2\pi i \xi s} ds,
\end{aligned}$$

jer je $e^{-\pi i} = -1$. Dakle,

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| &= \left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \right) e^{-2\pi i \xi x} dx \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \right| dx.
\end{aligned}$$

Iz $f \in L^1(\mathbb{R})$ sledi $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \left| f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \right| dx = 0$.³ \square

Po analogiji sa operatorom sinteze koji nizu Furijeovih koeficijenta dodeljuje funkciju uvodimo inverznu Furijeovu transformaciju na sledeći način:

Definicija 1.6. *Inverzna Furijeova transformacija funkcije $f \in L^1(\mathbb{R})$ je funkcija $\check{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definisana sa*

$$\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \check{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Primetimo da je $\check{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Odavde sledi da $\mathcal{F}^{-1} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$.

Međutim, $f \in L^1(\mathbb{R})$ ne implicira $\check{f} \in L^1(\mathbb{R})$ pa, u opštem slučaju ne možemo primeniti kompoziciju preslikavanja analize i sinteze. Iz ovog razloga naziv inverzna Furijeova transformacija je malo zbunjujući. Ipak, uz dodatna ograničenja, operator \mathcal{F}^{-1} je inverzni operator operatora \mathcal{F} . Posebno, ako $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ onda važi:

Teorema 1.7. *(Formula inverzije) Ako $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ onda su f i \hat{f} neprekidne funkcije i*

$$f(x) = (\hat{f})^\sim(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i \xi x} d\xi,$$

pri čemu je jednakost tačkasta za svako $x \in \mathbb{R}$. Slično,

$$f(x) = (\check{f})^\sim(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\xi)e^{-2\pi i \xi x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Teorema se, za sada, usvaja bez dokaza. Jedan od načina je da se dokaže da formula inverzije ekvivalentna Planšerelovoj teoremi, a drugi je korišćenje Poasonove sumacione formule.

Posledica 1.8. *(jedinstvenost) Ako $f \in L^1(\mathbb{R})$ onda važi $f = 0$ skoro svuda ako i samo ako $\hat{f} = 0$ skoro svuda.*

Drugim rečima, Furijeova transformacija $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ je injektivno preslikavanje.

³Iako f nije neprekidna, koristeći činjenicu da su neprekidne funkcije kompaktnog nosača guste u $L^1(\mathbb{R})$ može se dokazati da $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-h)| dx \rightarrow 0$ kada $h \rightarrow 0$.

1.3. Konvolucija i Parsevalova jednakost. Neka $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Primetimo najpre da je

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Ako su, pri tome, f i g neprekidne, onda je i $f * g$ neprekidna funkcija. Uz dodatne uslove diferencijabilnosti funkcije g i integrabilnosti i ograničenosti funkcije g' , koristeći Lebegovu teorem o dominantnoj konvergenciji nije teško dokazati da je $f * g$ diferencijabilna i $(f * g)' = (f * g')$. Ako je, uz to f diferencijabilna, a f' integrabilna i ograničena, onda je $(f * g)' = (f * g') = (f' * g)$.

U nastavku ispitujemo svojstva konvolucije da bismo dokazali Parsevalovu jednakost.

Lema 1.9. *Neka $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Ako f i g imaju kompaktni nosač, onda $f * g$ ima kompaktni nosač.*

Dokaz. Podsetimo se, nosač funkcije f , u oznaci $\text{supp } f$ je najmanji zatvoren skup za koji važi $f(x) = 0$ za skoro sve x u komplementu tog skupa. Bez smanjenja opštosti (birajući odgovarajućeg predstavnika klase ekvivalencije) pretpostavljamo da je $f(x) = 0$ za sve $x \notin \text{supp } f$. Slično i za funkciju g .

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ tačka za koju važi $(f * g)(x_0) \neq 0$. Tada postoji $y \in \mathbb{R}$ koja pripada nosaču funkcije f i za koju je $x_0 - y \in \text{supp } g$. Dakle, $x_0 = y + (x_0 - y) \in \text{supp } f + \text{supp } g$. Odavde sledi:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f * g(x) \neq 0\} \subseteq \text{supp } f + \text{supp } g.$$

Prema tome, ako $x \notin \text{supp } f + \text{supp } g$ onda je $f * g(x) = 0$. U odgovarajućim klasama ekvivalencije ovo implicira da je $f * g(x) = 0$ za skoro sve $x \notin \text{supp } f + \text{supp } g$, to jest (s obzirom da posmatramo zatvorene skupove) $\text{supp}(f * g) \subseteq \text{supp } f + \text{supp } g$. \square

Dokažimo da za $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ važi $(f * g)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$. Koristeći teoremu Fubinija dobija se

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy \right) e^{-2\pi i y \xi} e^{-2\pi i (x - y) \xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i y \xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x - y) e^{-2\pi i (x - y) \xi} dx \right) dy \\ &= \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

Teorema 1.10. *Neka je $f \in L^1(\mathbb{R})$ neprekidna funkcija kompaktnog nosača. Tada $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ i važi Parsevalova jednakost: $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$.*

Dokaz. Primetimo da $f \in L^2(\mathbb{R})$. Involucija funkcije f je $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$. Posmatrajmo sada funkciju $(f * \tilde{f})(x)$. Ako je f neprekidna funkcija kompaktnog nosača, onda je i $(f * \tilde{f})$ neprekidna funkcija kompaktnog nosača. Važi:

$$(f * \tilde{f})(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\tilde{f}(-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\overline{f(y)}dy = \|f\|_{L^2}^2.$$

Koristeći upravo dokazano svojstvo prebacivanja konvolucije u proizvod pod dejstvom Furijeove transformacije dobija se

$$(f * \tilde{f})^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)(\tilde{f})^\wedge(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2,$$

jer je $(\tilde{f})^\wedge(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Kako je $(f * \tilde{f})^\wedge \in L^1(\mathbb{R})$, na osnovu teoreme 1.7 sledi

$$(f * \tilde{f})(0) = \widehat{(f * \tilde{f})^\wedge}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * \tilde{f})^\wedge(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{f}\|_{L^2}^2.$$

Dakle, $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$. □

1.4. Rezime.

- (1) Definisati Furijeovu transformaciju. Formulirati i dokazati lemu 1.2 i teoremu 1.5.
- (2) Odrediti Furijeovu transformaciju karakteristične funkcije i dokazati da *sinc* funkcija nije apsolutno integrabilna.
- (3) Definisati inverznu Furijeovu transformaciju. Formulirati teoremu 1.7 i njenu posledicu. Dokazati da je $(f * g)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$, $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.
- (4) Dokazati da je Furijeova transformacija involucije data sa $(\tilde{f})^\wedge(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Zatim dokazati lemu 1.9 i teoremu 1.10.