Kolekcija svih vektora $x \in X$ takvih da je x linearna kombinacija vektora $x_1, x_2, \cdots, x_n$ označava se sa $span\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Taj skup vektora je potprostor vektorskog prostora X.

U vektorskom prostoru X nad $\mathbb{F}$ skup vektora $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je *linearno nezavisan skup* ako jednakost $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ važi samo kada je $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Skup vektora koji sadrži nulu je linearno zavisan skup.

Neka je $(X, (\cdot, \cdot))$ pred-Hilbertov prostor i $x, y \in X$. Elementi $x \in X$ i $y \in X$ su ortogonalni ako važi $(x, y) = 0$. U tom slučaju pišemo $x \perp y$. Vektor čija je norma jednaka jedinici je normiran vektor.

Ortogonalan sistem (ili ortogonalan skup) je skup nenula vektora u kojem su svaka dva vektora ortogonalna. Skup od jednog nenula vektora je ortogonalan po definiciji. Ortogonalan skup vektora u kome je svaki vektor normiran je ortonormiran sistem.

Očigledno, nula vektor je ortogonalan na bilo koji vektor i ne pripada nijednoj bazi.

Ako je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ortogonalan skup vektora pred-Hilbertovog prostora X, onda je on linearno nezavisan skup vektora. Obratno tvrđenje ne važi u opštem slučaju.

Definicija 0.0.1. *Skup vektora* $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *je* Hamelova baza *(ili, kraće rečeno,* baza*) vektorskog prostora* X *ako je on linearno nezavisan i ako je* $span\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = X$. *Broj* n *se zove dimenzija prostora* X.

Svaki konačan skup linearno nezavisnih vektora se može „prevesti” u ortonormiran skup. Na taj način se dokazuje da svaki konačno dimenzioni pred-Hilbertov prostor ima ortonormiranu bazu.

Vektorski prostor X je beskonačno dimenzioni prostor ako nijedna njegova baza nije konačna. Sledi uopštenje definicije 0.0.1.

Definicija 0.0.2. *Skup vektora* $\mathcal{B}$ *je* Hamelova baza *(ili, kraće rečeno,* baza*) vektorskog prostora* X *ako je* $\mathcal{B}$ *linearno nezavisan i ako je* $span\mathcal{B} = X$.

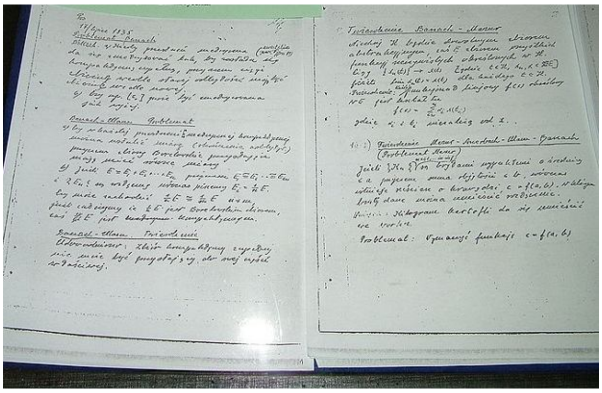
Pri tome, proizvoljan skup vektora $\mathcal{B}$ je linearno nezavisan ako proizvoljnan izbor konačno mnogo vektora $x_1, x_2, \ldots, x_N \in \mathcal{B}$ formira linearno nezavisan skup. Takođe, $span\mathcal{B}$ je skup svih mogućih konačnih linearnih kombinacija elemenata skupa $\mathcal{B}$.

Tvrđenje da svaki vektorski prostor ima Hamelovu bazu je ekvivalentno Aksiomi izbora.

Može se dokazati da je svaka Hamelova baza beskonačno dimenzionog Banahovog prostora neprebrojiva. (U dokazu se koristi Berova teorema o kategorijama.) Iz ovog razloga je za proučavanje beskonačno-dimenzionih prostora korisniji pojam *Šauderove baze.*

Definicija 0.0.3. *Neka je* $(X, \|\cdot\|)$ *Banahov prostor. Prebrojiv niz vektora* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je* Šauderova baza *za* X *ako za svaki vektor* $x \in X$ *postoji jedinstveno određen niz skalara* $c_n = c_n(x)$ *tako da je* $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$.

Podrazumeva se da je konvergencija u normi prostora X.



Slika 0.1: Škotska sveska

Problem baze se može formulisati na sledeći način: Da li svaki separabilan Banahov prostor ima Šauderovu bazu?

Jedna formulacija ovog problema je ispisana u čuvenoj *Škotskoj knjizi* nazvanoj po „Škotskoj kafani" u Lvovu, Poljska, u kojoj su se tridesetih i četrdesetih godina XX veka sastajali poznati matematičari, među kojima su Banah, Kuratovski, Šauder, Štajnhaus, Ulam, Mazur. Oni su zapisivali probleme u svesci koja se danas naziva „Škotska knjiga". Stanislav Mazur je 1936. godine formulisao problem ekvivalentan problemu baze. Nakon četrdesetak godina, švedski matematičar i pijanista, Per Enflo je rešio taj problem. Rešenje je objavljeno 1973. godine u časopisu Acta Mathematica.

Mazur je obećao gusku kao nagradu za rešenje svog problema i on je 1972. godine, u svojoj 67. godini života, predao nagradu Per Enflo-u. Ceremonija je održana u Banahovom Centru u Varšavi.

Per Enflo (rođen 20. maja 1944. godine) u svojoj autobiografiji objašnjava atmosferu u kojoj je smislio dokaz, kao i ponude za posao koje je dobio nakon objavljivanja naučnog članka. Uz aktivno bavljenje matematikom i muzikom, u poslednjih dvadesetak godina Enflo objavljuje članke iz genetike, matematičke biologije i ekologije. Na internetu (Youtube) se mogu čuti i videti delovi koncerata na kojima je svirao.

Komentar 0.0.1. *Dakle, ako je A podskup vektorskog prostora X, onda je*

$$span(A) = \{\sum_{k=1}^{n} c_k x_k : n \in \mathbb{N}, \ \ x_n \in A, \ \ c_n \in \mathbb{F}\}.$$

Ako je X normiran prostor, u njemu je moguće posmatrati i zatvaranje skupa $span(A)$, koje se naziva zatvoreni lineal skupa A i označava sa $\overline{span}(A)$.

Posebno,

$$\{\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k : \ \ x_n \in A, \ \ c_n \in \mathbb{F}, \ \ \textit{red kovergira}\} \subset \overline{span}(A),$$

pri čemu jednakost ne mora uvek da važi. (Na primer, u prostoru neprekidnih funkcija nad $[a, b]$, za $x_k = x^k$, a korišćenjem Vajerštrasove teoreme o aproksimaciji, dobija se stroga inkluzija.)

Ako je $\overline{span}(A) = X$, onda je A potpun skup u normiranom prostoru X.

Može se dokazati i da je svaki konačno-dimenzioni potprostor normiranog prostora X zatvoren.