Apsolutno ali ne i obično konvergentan red u $\mathbb{Q}$

Totalno uređeno polje racionalnih brojeva nije kompletno, ako ga posmatramo kao metrički prostor sa metrikom $d(x,y) = |x-y|$. Na primer, niz brojeva definisan rekurentnom vezom:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

je Košijev niz u $\mathbb{Q}$ ali on ne konvergira u $\mathbb{Q}$ ($\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$).

U skupu racionalnih brojeva se definiše norma $\|\cdot\|$ sa $\|x\| = |x|$, $x \in \mathbb{Q}$. Ona indukuje uobičajenu metriku: $d(x,y) = \|x-y\| = |x-y|$, $x, y \in \mathbb{Q}$.

Normiran prostor $(\mathbb{Q}, \|\cdot\|)$ nije Banahov prostor. Ovo sledi direktno iz veze norme i metrike, odnosno, ako je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor u kojem norma indukuje metriku d i ako (X, d) nije kompletan metrički prostor, onda $(X, \|\cdot\|)$ nije Banahov prostor. Za vežbu ostavljamo čitaocu da ovo sebi razjasni.

U nastavku pokazujemo da $(\mathbb{Q}, \|\cdot\|)$ nije Banahov prostor koristeći potreban i dovoljan uslov iskazan kroz odnos apsolutne i obične konvergencije.[1]

Najpre diskutujemo situaciju kod koje se nizu $\{x_n\}$ elemenata normiranog prostora pridružuje red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tako da za niz parcijalnih suma $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, važi $s_n = x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Jasno, tada je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = x.$$

Neka je $\{x_n\}$ proizvoljan niz (u vektorskom/normiranom prostoru). Definišemo *teleskopsku sumu* sa:

$$s_n = x_1 + \sum_{k=2}^{n} (x_k - x_{k-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Očigledno,

$$s_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \Longleftrightarrow x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (x_n - x_{n-1}) = x.$$

Ako je niz $\{x_n\}$ definisan sa (1), onda je njemu pridružena teleskopska suma data sa

$$s_n = x_1 + \sum_{k=2}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{x_{k-1}} - \frac{x_{k-1}}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

a odgovarajući red konvergira ka $\sqrt{2}$.

[1]Videti Teoremu 2.6.1 udžbenika N. Teofanov, Predavanja iz primenjene analize.

Sada modifikujemo ovu konstrukciju. Neka su dati redovi sa nenegativnim opštim članovima x_n i y_n tako da važi

$$\begin{array}{rlll} \sum_{n=1}^{\infty} x_n & = \sqrt{2}, & \text{pri čemu je} & x_{2n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \\ -\sum_{n=1}^{\infty} y_n & = -(2-\sqrt{2}), & \text{pri čemu je} & y_{2n-1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Posmatrajmo red

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n) = x_1 - y_2 + x_3 - y_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

$$a_n = \begin{cases} x_n & n \text{ paran broj}, \\ -y_n & n \text{ neparan broj}. \end{cases}$$

Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2\sqrt{2} - 2 \notin \mathbb{Q}$.

(Na primer, $y_{2n} = z_n - x_{2n-1}$, pri čemu je $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = 2$. Tada je

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{2m}(x_k - y_k) &= (x_1 - z_1 + x_1) + \cdots + (x_{2m-1} - z_m + x_{2m-1}) \\ &= 2\textstyle\sum_{k=1}^{2m} x_k - \sum_{k=1}^{m} z_k \to_{m\to\infty} \sqrt{2} - 2, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{2m+1}(x_k - y_k) &= (x_1 - z_1 + x_1) + \cdots + (x_{2m-1} - z_m + x_{2m-1}) + x_{2m+1} \\ &= 2\textstyle\sum_{k=1}^{2m-1} x_k - \sum_{k=1}^{2m-1} z_{k+1} + x_{2m+1} \to_{m\to\infty} \sqrt{2} - 2, \end{aligned}$$

jer opšti član x_n konvergentnog reda teži ka nuli.)

Kako je

$$|a_n| = \begin{cases} x_k & k \text{ paran broj}, \\ y_k & k \text{ neparan broj}, \end{cases}$$

dobijamo

$$\sum_{k=1}^{2m} |a_k| = \sum_{k=1}^{2m}(x_k + y_k) = (x_1 + z_1 - x_1) + \cdots + (x_{2m-1} + z_m - x_{2m-1}) = \sum_{k=1}^{m} z_k,$$

odnosno

$$\sum_{k=1}^{2m+1} |a_k| = (x_1 + z_1 - x_1) + \cdots + (x_{2m-1} + z_m - x_{2m-1}) + x_{2m+1} = \sum_{k=1}^{m} z_k + x_{2m+1},$$

pa je $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} z_k = 2 \in \mathbb{Q}$.

Dakle, u normiranom prostoru $(\mathbb{Q}, \|\cdot\|)$ postoji red koji je apsolutno konvergentan ali nije konvergentan.