Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematicki fakultet
Departman za matematiku i informatiku

**Nenad Teofanov**

# Harmonijska analiza - nastanak i nasledje

beleške sa predavanja

mart 2016, Novi Sad

**Sažetak**

U predavanjima se obradjuje tema nastanka harmonijske analize. Pri tome pod ovim pojmom podrazumevamo predstavljanje funkcije u obliku zbira jednostavnih komponenti koje čine sinusne i kosinusne funkcije. Protokom vremena menjao se pogled na predmet proučavanja i na suštinu harmonijske analize. Naše polazno stanovište je pomalo motivisano poreklom pojma, a to je analiza harmonika, tonova koji se čuju pri okidanju žice.

Nakon istorijskog osvrta na utemeljenje teorije, vodjeni hronologijom ilustrujemo nasledje harmonijske analize u vidu deskriptivne teorije skupova i teorije hiperfunkcija.

# Sadržaj

# 1 Harmonijska analiza - nastanak i nasledje

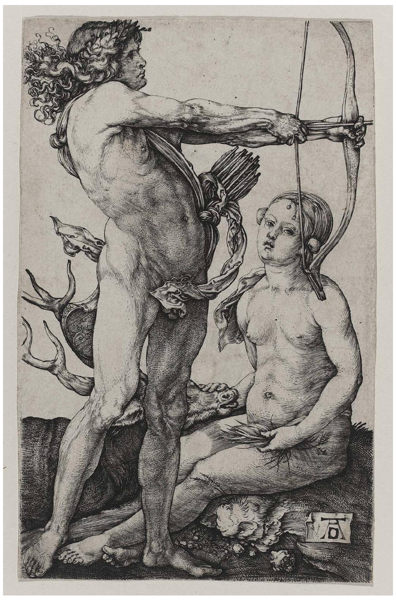
U 15. tomu Enciklopedije matematičkih nauka, V. P. Khavin navodi da značajna naučna dostignuća imaju dve osnovne odlike. Sa jedne strane, ona su dovoljno jednostavna, to jest razumljiva da bi mogla da postanu neka vrsta opšteg dobra, pri čemu je jednostavnost posledica razvoja i česte i široke upotrebe. Sa druge strane, ona su dovoljno neodredjena, to jest fleksibilna, kako bi mogla da budu interpretirana u različitim situacijama i kako bi se mogla doradjivati. Tako je, po Khavinu, zgodna formulacija harmonijske analize data rečenicom:

*Svaka funkcija je zbir harmonijskih oscilacija.*

Profinjenje ove rečenice je da za svaku funkciju $f(x)$ definisanu na $\mathbb{R}$, postoji funkcija $\hat{f}(\lambda)$ tako da je $f$ jednaka sumi svih "harmonika"$\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}$, po $\lambda \in \mathbb{R}$. Pri tome je preslikavanje $f \mapsto \hat{f}$ injektivno, pa $\hat{f}$ sadrži sve informacije o $f$. U raznim prilikama potrebne informacije o $f$ lakše je dobiti posmatranjem $\hat{f}$. Harmonijska analiza na ovaj način opisuje izvesni uopšteni talasno-čestični dualizam, jer funkcija $f$ poseduje, od sebe nerazdvojnu, a često nevidljivu "talasnu sliku"$\hat{f}$.

Ovaj opis je dovoljno neodredjen da dozvoljava različite interpretacije i dalekosežna uopštenja koja su odolela preispitivanjima od strane matematike, fizike, tehnike.... Kao što će se videti, od svojih početaka pa do današnjih dana, harmonijska analiza se razvijala u neposrednoj vezi sa matematičkom fizikom i problemima teorije vibracija, provodjenja toplote, elegtromagnetizma i kvantne mehanike.

U ovom predavanju polazna tačka je muzika, a njen susret sa matematikom i fizikom će sredinom XVIII veka roditi harmonijsku analizu.



Slika 1: Apolon i Artemida

# 2 Predistorija

Predistoriju harmonijske analize nalazimo u prvim žičanim i duvačkim instrumentima. Prvi tonovi verovatno su proizvedeni odapinjanjem strele, čime je počelo putovanje od oružja do instrumenta.[1]

Po grčkoj mitologiji bog Apolon je uočio vezu treperenja žice i muzike. Rekli bismo da se to desilo pri odapinjanju strele, slušajući oštar zvuk zategnute tetive luka. Za stare Grke muzika je, dakle, božanskog porekla. Na slici 1 Dürer-ova gravira iz 1502. godine prikazuje Apolona i njegovu sestru bliznakinju Artemidu/Dijanu. Apolon je Zevsov sin, bog svetlosti, muzike, medicine, poezije i još ponečega. Često se umetnički izobražava sa lirom, malenom harfom.

U Bibliji se navodi da je David, potonji kralj, prorok i psalmopojac, svirao harfu ne bi li odobrovoljio kralja Saula, kojeg je nasledio na prestolu Izrailja. Za našu priču je zanimljivo da je Galileo Galilej 1633. godine osudjen od inkvizicije na kućni pritvor i svakodnevno čitanje Davidovih pokajnih psalama. Osuda je posledica Galilejeve podrške Kopernikovom heliocentričnom sistemu. Galilej je, inače, utvrdio vezu izmedju dužine zategnute žice i visine tona, to jest, ako se dužina zategnute žice udvostruči, pri njenom okidanju se dobija za oktavu dublji ton. Na slici 2 je deo vitraža crkve Svetog Nikole iz Belfasta koji prikazuje Davidove šake pri sviranju harfe.

Slika 2: David svira harfu: detalj

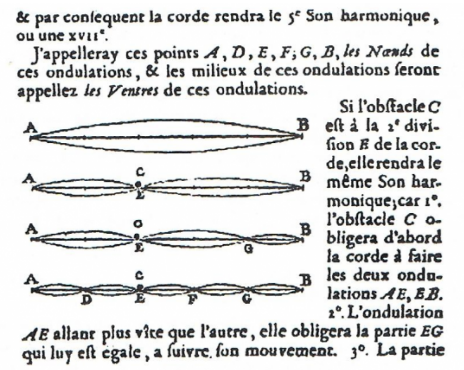
U naučnom smislu, razumevanje pojave treperenja žice je značajno obogaćeno u radovima Joseph-a Sauveur-a [2] od kojih je prvi objavljen 1701. godine. On je posmatrao sve moguće frekvencije stojećih talasa na zategnutoj žici. Stojeći talasi su superpozicije talasa koji nailaze na krajeve žice i onih koji se odbijaju od krajeva,

[1] Zvuk je vibracija koja se prenosi kroz vazduh u vidu zvučnih talasa, a ton je tačno odredjen i temperovan zvuk kojim se muzika služi. Zvuk karakteriše visina, jačina, dužina i boja. Boja je posebna odlika zvuka karakteristična za odredjeni glas ili instrument.

[2] Joseph Sauveur (1653 - 1716) francuski matematičar i fizičar. Član francuske Akademije nauka od 1696. godine.

to jest (progresivnih) talasa koja se kreću u suprotnim smerovima.[3] Ako je žica pričvršćena na krajevima, oni predstavljaju čvorove tih stojećih talasa.

Sauveur je otkrio da na žici može da se formira niz oscilacija, stojećih talasa, koje je nazvao normalni modovi, a koji se razlikuju po frekvencijama. Normalni modovi imaju tačno odredjene frekvencije koje su sve umnošci osnovne frekvencije. Sauveur ih je nazvao "harmonicima"i zaključio da su frekvencije svih harmonika celobrojni umnošci frekvencije takozvanog osnovnog harmonika, normalnog moda najniže frekvencije. Oscilovanje žice je, u stvari, superpozocija normalnih modova, a koji će od njih biti zastupljeni zavisi od načina na koji se žica okidanjem pobudjuje na oscilovanje.


& par consequent la corde rendra le 5ᵉ Son harmonique, ou une xvIIᵉ.

J'appelleray ces points *A*, *D*, *E*, *F*; *G*, *B*, *les Nœuds* de ces ondulations, & les milieux de ces ondulations seront appellez *les Ventres* de ces ondulations.

Si l'obstacle *C* est à la 2ᵉ division *E* de la corde, elle rendra le même Son harmonique; car 1°. l'obstacle *C* obligera d'abord la corde à faire les deux ondulations *AE*, *EB*. 2°. L'ondulation *AE* allant plus vîte que l'autre, elle obligera la partie *EG* qui luy est egale, a suivre son mouvement. 3°. La partie


Slika 3: Detalj Sauveur-ovog članka, 1701. godina

Frekvenciju osnovnog harmonika odredio je 1713. godine Brook Taylor.[4] Ako je kvadratni koren količnika zategnutosti žice i njene gustine označen sa $c$, a $l$ dužina žice, onda je frekvencija osnovnog harmonika jednaka sa $c/(2l)$, a harmonici višeg reda imaju frekvencije date formulom

$$\nu_n = n\frac{c}{2l} = n\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

gde je $T$ koeficijent tenzije (zategnutosti) a $\sigma$ masa žice po jediničnoj dužini (gustina).

Za ovakvu vrstu pojave, koja je po svojoj prirodi neprekidna (kretanje talasa duž žice) a koja ispoljava neku vrstu diskretnog ponašanja (frekvencije harmonika), profesor E. C. Zeeman slikovito kaže da pripada Pandorinoj kutiji.[5]

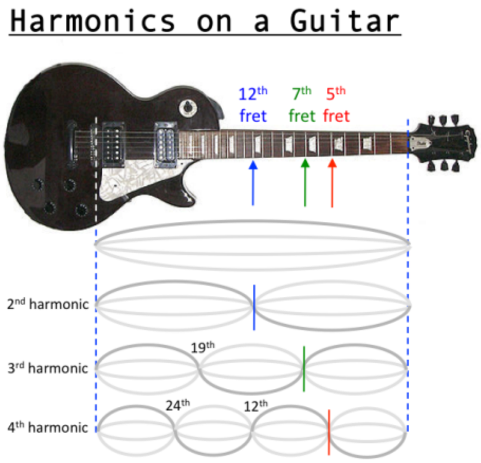
Matematičko opisivanje ovih oktrića pripisuje se Danijelu Bernuliju, koji je ton

[3] Progresivni talas je talasni puls koji se kreće kroz žicu, te se breg talasa pomera duž žice.

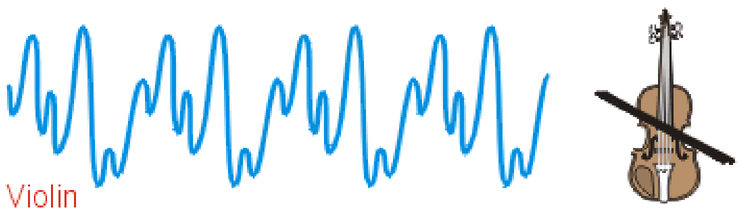
[4] Brook Taylor (1685 - 1731) engleski matematičar najpoznatiji po teoremi o razvoju funkcije u Tejlorov red.

[5] Preostale tri kutije su diskretna, neprekidna i vremenska kutija, u kojoj su diskretne pojave koje karakteriše neprekidno ponašanje, na primer kretanje planeta.

zategnute žice predstavio superpozicijom trigonometrijskih funkcija, čemu je posvećeno sledeće poglavlje. [6]




Slika 4: Harmonici gitarske žice




Slika 5: Vizualizacija tona u vidu zbira sinusnih funkcija

Za našu priču nije bez značaja da je to doba u kojem Bach komponuje muziku za dobro temperovani klavir (1722 -1744), a u veoma popularne instrumente spada čembalo, kod kojeg se zvuk dobija okidanjem žice uz pomoć guščijeg pera. Vivaldi komponuje "Četiri godišnja doba" 1725. godine.

S ozbirom da frekvencija harmonika zavisi od debljine žice, pri konstrukcijij žičanih instrumenata je praktičnije koristiti žice različitih debljina, a iste dužine nego jednake žice različitih dužina.

[6] Vibracije osnovnog tona i harmonika na žicama harfe mogu se videti na https://www.youtube.com/watch?v=xSUZdV39xIQ

# 3 Rasprava medju matematičarima

U radu objavljenom 1747. godine, D'Alembert[7] izvodi jednačinu treperenja žice:

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u, \tag{1}$$

gde je $c^2 = T/\sigma$, a $u = u(t, x)$ rešenje koje opisuje prostiranje stojećih talasa kao funkcija vremena $t$ i položaja tačke $x$ na žici dužine $l$, $x \in [0, l]$. Radi jednostavnijeg izlaganja, u nastavku pretpostavljamo da je $c = 1$ i $l = \pi$.

Na ovom mestu izostavljamo izvodjenje jednačine i navodimo intuitivno objašnjenje. Izraz $\partial_t^2 u$ je ubrzanje tačke $x$ na horizontalno položenoj žici koja je izvedena iz ravnotežnog položaja. U skladu sa Njutnovom mehanikom ono je proporcionalno sili koja deluje na tu tačku sa ciljem da se žica ispravi. Ta sila je odredjena zategnutošću žice. Izraz $\partial_x^2 u$ meri konkavnost oblika žice i usmerava ubrzanje u pravcu ispravljanja žice.

D'Alembert navodi da su rešenja ove jednačine oblika

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[f(t + x) + g(t - x)], \tag{2}$$

gde su $f$ i $g$ proizvoljne funkcije jedne promenljive na $[0, \pi]$. Lako se proverava da funkcija $u$ data sa (2) zadovoljava jednačinu (1). (Kada je $c \neq 1$, rešenje je oblika $[f(ct + x) + g(ct - x)]/2$.)

Ako su početni uslovi koji opisuju početni položaj i brzinu žice dati sa

$$u(0, x) = \phi(x), \tag{3}$$
$$\partial_t u(0, x) = \psi(x), \tag{4}$$

onda moraju biti ispunjeni uslovi:

$$\frac{1}{2}[f(x) + g(-x)] = \phi(x), \tag{5}$$

i

$$\frac{1}{2}[f'(x) + g'(-x)] = \psi(x). \tag{6}$$

Diferenciranjem (5) i sabiranjem sa (6) dobija se

$$f'(x) = \phi'(x) + \psi(x) \quad \Rightarrow f(x) = \phi(x) + \int_0^x \psi(s)ds + C_1.$$

Slično,

$$g'(-x) = -\phi'(x) + \psi(x) \quad \Rightarrow g(-x) = \phi(x) - \int_0^x \psi(s)ds + C_2.$$

Dakle,

$$\frac{1}{2}[f(x) + g(-x)] = \phi(x) + C_1 + C_2 \quad \Rightarrow C_1 + C_2 = 0.$$

Konačno, iz

$$\begin{aligned} f(t + x) &= \phi(t + x) + \int_0^{t+x} \psi(s)ds + C_1, \\ g(t - x) &= \psi(t - x) - \int_0^{t-x} \psi(s)ds + C_2, \end{aligned}$$

[7] Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717 – 1783), francuski matematičar, fizičar, filozof...

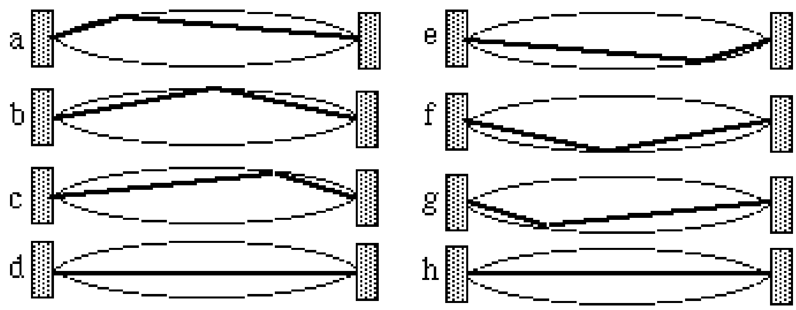
i (2) sledi

$$u(t,x) = \frac{1}{2}[\phi(t+x) + \phi(t-x)] + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} \psi(s)ds. \tag{7}$$

Ako je $\phi$ dva puta neprekidno diferencijabilna i $\psi$ jednom neprekidno diferencijabilna, onda je $u$ rešenje u klasičnom smislu, to jest dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija za koju važi (1). Po E. C. Zeeman-u, D'Alembert je na spektakularan način otvorio neprekidnu kutiju. [8]

Navedeno rešenje je podstaklo oštru višegodišnju raspravu izmedju Euler-a[9] i D'Alembert-a u koju se nešto kasnije uključio Daniel Bernoulli.[10] U toj raspravi brkali su se argumenti matematike, fizike, muzike kao i medjusobno nerazumevanje u pojmovnom smislu. Naime, pod funkcijom se obično podrazumevao analitički izraz, pa je D'Alembert smatrao, pojednostavljeno govoreći, da je početni položaj uvek zadat analitičkom funkcijom.

Pročitavši D'Alembert-ov rad, Euler je 1748. godine objavio rad u kojem se posmatra početni položaj ispirisan okidanjem žice kod čembala. Naime, funkcija $\phi$ u (3) je neprekidna i definisana sa dve linearne funkcije. Drugim rečima, Euler posmatra uslove koji ne moraju biti zadati jednim analitičkim izrazom. Njega, rekli bismo, prvenstveno insteresuje fizički smisao posmatrane pojave. Rešenje koje Euler navodi koristeći D'Alembertov pristup ne mora da bude diferencijabilna funkcija, pa je Euler bio uveren da njegovo objašnjenje prevazilazi nedostatke koje je video u radu D'Alemberta. D'Alembert je bio ogorčen i usledio je niz radova u kojima su obojica branili svoje pristupe i isticali prvenstvo u razumevanju i rešavanju problematike.




Slika 6: Euler-ovo rešenje

Neobična situacija u kojoj jednačina sadrži izvode drugog reda, a rešenje nije čak ni diferencijablina funkcija objašnjena je u okviru teorije distribucija sa pojmom slabog rešenja. U slučaju Euler-ovog primera, rešenje $u$ ima po delovima konstantnu brzinu, to jest $\partial_t u$ je po delovima konstantna funkcija sa prekidima prve vrste, a $\partial_t^2 u$ je suma dve Dirakove delta distribucije. Primetimo da se u distributivnom smislu integral $\int_{t-x}^{t+x} \psi(s)ds$ u (7) može interpretirati kao konvolucija $\psi * \chi_x(t)$, gde je $\chi_x$ karakteristična funkcija intervala $[-x, x]$.

[8] U dodatku navodimo rešenje dobijeno smenom promenljivih.
[9] Leonhard Paul Euler (1707 – 1783), švajcarski matematičar i fizičar
[10] Daniel Bernoulli (1700 –1782), švajcarski matematičar, fizičar, botaničar....

Konačno, u ovoj svadji bilo ih je troje. Treći učesnik, Daniel Bernoulli, stupa na scenu 1753. godine objavljivanjem rada u kojem navodi da je godinama pre D'Alembert-a i Euler-a imao jedino u fizičkom smislu ispravno rešenje i da se njihova rešenja mogu dobiti kao kombinacije jednostavnih harmonijskih rešenja otkrivenih od strane Bernoulli-ja.

Imajući u vidu rezultate Brook-a Taylora i izvesne uslove periodičnosti koji su se pojavili pri konstrukciji Euler-ovog i D'Alembert-ovog rešenja, Daniel Bernoulli navodi da je najopštije rešenje problema treperenja žice dato konačnom ili beskonačnom sumum "jednostavnih modova", a koju bismo danas označili sa

$$u(t,x) = \sum a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi c^2 t}{l}\right).$$

Usledila je reakcija D'Alembert-a i Euler-a, naravno pojedinačna. D'Alembert se okomio na Bernoullija u članku koji je napisao za sedmi tom Diderot-ove *Enciklopedije*, a Euler je poricao mogućnost da periodične i analitičke funkcije u zbiru mogu da predstave najopštije rešenje koje, kao što smo napomenuli, ne mora da bude diferencijabilna funkcija.

Nastanak harmonijske analize je tako obeležen višegodišnjom svadjom. Da parafraziramo F. Nietzsche-a, "treba imati haos da bi se izrodila zvezda".

U nastavku analiziramo neke segmente kontroverze po pitanju treperenja žice.

# 4 Fourier

Euler je otkrio razne formule u kojima se pojavljuju trigonometrijski redovi, godinama pre nego što ih je Bernoulli iskoristio za opisivanje rešenja talasne jednačine. Na primer, u pismu Goldbach-u iz 1744., godine, Euler navodi formule:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cdots = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Zanimljivo je da ove formule na izvestan način ilustruju protivrečnost u vezi sa svojstvima parnosti i periodičnosti zbog kojih je Euler kritikovao Bernoulli-ja.

Podsetimo se, formula (7) uključuje početne uslove, a Euler je posmatrao "trougaonu"funkciju $\phi$ u (3), po delovima linearnu, neprekidnu funkciju koja nije diferencijabilna u nekoj tački $x_0 \in (0,\pi)$. Bernoulli je pak (u pismu Euler-u, 1754. godine) tvrdio da se proizvoljni početni uslov $\phi$ može izraziti u obliku

$$\alpha \sin\frac{\pi x}{l} + \beta \sin\frac{2\pi x}{l} + \gamma \sin\frac{3\pi x}{l} + \ldots$$

i kao osnovni argument naveo činjenicu da koeficijenata $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ima beskonačno mnogo, te se oni mogu odrediti tako da beskonačna suma bude jednaka sa $\phi(x)$.

Osim zabune oko periodičnosi i parnosti, koja je u vezi sa domenima posmatranih funkcija, ozbiljan prigovor se odnosi na analitičnost beksonačne sume trigonometirjskih funkcija koja, po svojoj prirodi, ne može da opiše proizvoljne funkcije koje se mogu "nacrtati slobodnom rukom". Dakako, ovde se misli na narušavanje diferencijabilnosti.

Konačno, Bernoulli-ju je nedostajao ključni argument, nije umeo da pronadje način za izračunavanje koeficijenata $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Tek pedesetak godina kasnije otkrivena je odgovarajuća formula, i to pri rešavanju problema provodjenja toplote. Do tada se činilo da će D'Alembertov postupak koji dovodi do (7) gurnuti Bernulli-jeve argumente u zaborav.

Početkom XIX veka, tačnije 1807. godine Fourier[11] je pokušao da objavi rad o provodjenju toplote u kojem je dao rešenje jednačine provodjenja toplote $\partial_t u = \eta^2 \partial_x^2 u$, gde je $\eta^2$ pozitivna konstanta. U radu je navedena formula

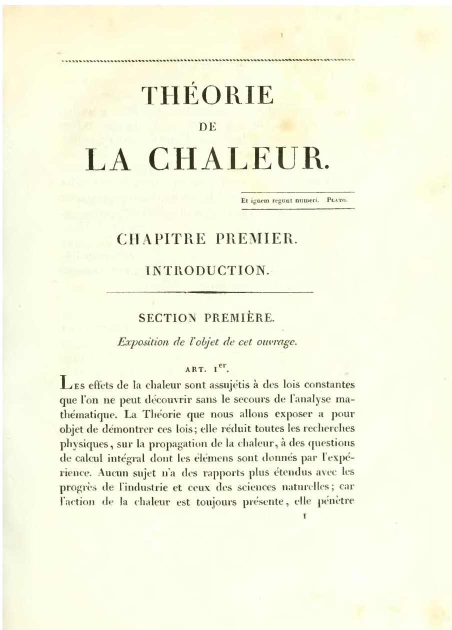
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned}$$

i odredjeni su koeficijenti ovog razvoja:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Fourier je lakonski tvrdio da njegova formula važi za *svaku* funkciju!



THÉORIE

DE

LA CHALEUR.

Et ignem regunt numeri. PLATO.

CHAPITRE PREMIER.

INTRODUCTION.

SECTION PREMIÈRE.

*Exposition de l'objet de cet ouvrage.*

ART. 1er.

Les effets de la chaleur sont assujétis à des lois constantes que l'on ne peut découvrir sans le secours de l'analyse mathématique. La Théorie que nous allons exposer a pour objet de démontrer ces lois; elle réduit toutes les recherches physiques, sur la propagation de la chaleur, à des questions de calcul intégral dont les élémens sont donnés par l'expérience. Aucun sujet n'a des rapports plus étendus avec les progrès de l'industrie et ceux des sciences naturelles; car l'action de la chaleur est toujours présente, elle pénètre

1

Slika 7: Prva strana Fourier-ove knjige

[11] Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830), francuski matematičar, fizičar, naučni savetnik Napoleonove misije u Egiptu...

Mišljenje o radu su trebali da daju Lagrange, Laplace, Lacroix i Monge. Medjutim, oni nikada nisu napisali svoje komentare. Smatralo se da su Fourier-ove metode u matematičkom smislu neprecizne. 1811. godine Fourier je konkurisao, sa doradjenom verzijom ovog nikad objavljenog rada, za nagradu Institute de France. S obzirom da je taj rad bio jedini priložen na konkursu, komisija mu je, nevoljno, dodelila nagradu, ali u objašnjenju se navelo da je način izvodjenja formula sumnjiv i da rad valja popraviti. Razočaran, Fourier je tek 1822. godine, kada je izabran za sekretara Akademije matematičkih nauka, imao priliku da objavi taj rad, ali i knjigu "Analitička teorija toplote". Originalno izdanje ove knjige može se kupiti za 28000 Evra.

Fourier navodi mnoge primere koji potvrdjuju tačnost njegove metode, čak i u slučaju neprekidne po delovima linearne funkcije. Ipak, nigde nije dat dokaz da trigonomerijski red konvergira ka “svojoj” funkciji. Štaviše, opšte verovanje toga doba je bilo da jednakost analitičkih funkcija na intervalu implicira njihovu jednakost na čitavom domenu, to jest svuda. Iz ovog razloga je jasno da sledeći primer ilustruje zbrku nastalu Fourier-ovim pristupom (i Bernoulli-jevim takodje).

**Primer 4.1.** *Neka je početni uslov dat sa* $\phi(x) = 1,\ -1 < x < 1$. *Fourier je izračunao koeficijente ove funkcije:*

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{4}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - \cdots\right] \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right). \end{aligned}$$

*Ako se umesto* $x$ *u* $n-$*tom sabirku stavi* $x+2$ *dobija se*

$$\cos\left(\frac{(2n-1)\pi(x+2)}{2}\right) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2} + (2n-1)\pi\right) = -\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right),$$

*pa, za* $1 < x < 3$ *važi*

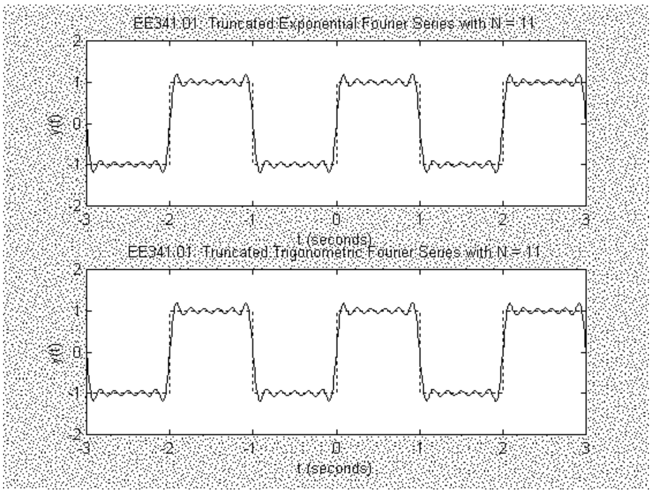
$$-1 = \frac{4}{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - \cdots\right].$$

Ovaj primer se suprotstavlja predstavi o funkcijama sa početka XIX veka. Za matematičare tog doba $f(x) = 1$ za $-1 < x < 1$, a $f(x) = -1$ za $1 < x < 3$, nije bila funkcija, nego dve funkcije. Uz periodično produženje dobija se beskonačno mnogo funkcija. Nasuprot tome, odgovarajući trigonometrijski red je jedna periodična funkcija. Štaviše, taj red je analitička funkcija, pa ako je jednaka jedinici na intervalu $(-1, 1)$ morala bi biti jednaka jedinici za sve vrednosti $x$. Nešto očigledno nije bilo u redu.

Dodatnu zbrku unosi sledeća primedba. Po delovima konstantna funkcija $f(x) = 1$ za $-1 < x < 1$ i $f(x) = -1$ za $1 < x < 3$ kao i njeno periodično produženje su diferencijabilne svuda osim u tačkama oblika $2k-1$, $k \in \mathbb{Z}$. Odgovarajući izvod za $x \neq 2k-1$, $k \in \mathbb{Z}$, jednak je nuli. Diferenciranjem trigonometrijskog reda ove funkcija član po član dobija se

$$f'(x) = -2\left[\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - \cdots\right],$$

red koji konvergira samo kada je $x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.




Slika 8: Primer

Lagrange,[12] koji je dao značajan doprinos teoriji vibriranja žice u radovima objavljenim od 1759. godine i tokom sedme decenije XVIII veka, je bio protivnik Fourier-ovih ideja i tvrdio je, na primer, da red kosinusa iz primera 4.1 divergira jer divergira red apsolutnih vrednosti koeficijenata

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$$

Nasupilo je doba preispitivanja tokom kojeg je izvesna ležernost i smelost ispoljena u pristupu velikana matematičke analize u vezi sa trigonometrijskim razvojima zamenjeno preciznim formulacijama i kritičkom analizom problema konvergencije. Na scenu stupaju Dirichlet, Riemann, Cantor, Weierstrass[13] koji su utemeljili nasledje harmonijske analize i pripremili njeno granjanje u toku XX veka.

# 5 Nasledje - XIX vek

Dirichlet-ov rad *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent a représenter une fonction arbitraire entre des limites données* objavljen 1829. godine u Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik,[14] smatra se prekretnicom u istoriji harmonijske analize, ali i šire, on je prekretnica po načinu pristupa matematičkoj analizi kao i po stilu pisanja naučnog rada u toj oblasti. Cilj rada je da se izloži korektno tvrdjenje i korektan dokaz konvergencije Fourier-ovog reda. Ovaj rad je postao uzor za formulisanje i dokazivanje teorema matematičke analize.

[12] Joseph-Louis Lagrange/Giuseppe Luigi Lagrange (1736 – 1813), italijanski matematičar

[13] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 – 1918), Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897), nemački matematičari

[14] Radi se o najstarijem časopisu koji još uvek izlazi. Prvi broj je objavljen 1826. godine.

Dirichlet je dokazao da, ako funkcija $\varphi$ ima konačan broj tačaka prekida i konačan broj tačaka minimuma i maksimuma na $[-\pi, \pi]$, onda parcijalne sume njenog Fourier-ovog reda konvergiraju ka vrednosti

$$\frac{1}{2}[\varphi(x+\epsilon) + \varphi(x-\epsilon)],$$

gde je $\epsilon$ beskonačno mala veličina. Na kraju rada, Dirichlet navodi moguća uopštenja ovog rezultata.

U istom radu je data moderna definicija funkcije, oslobodjena svih predstava iz XVIII veka i primer funkcije koji je matematičarima prethodnih epoha bio nezamisliv. Dirichlet-ova funkcija jednaka je nekoj konstanti za racionalne vrednosti nezavisne promenljive, a nekoj drugoj konstanti za iracionalne vrednosti nezavisne promenljive. Takva funkcija nije integrabilna u tadašnjem smislu pojma integrabilnosti, a razumevanje ovog svojstva kao i samog pojma integrala je neophodno za izračunavanje koeficijenata razvoja u Fourier-ov red. Dirichlet-ova funkcija je i prvi primer nigde diferencijabilne funkcije.

Potraga za potrebnim uslovima konvergencije Fourier-ovih redova otkrila je neophodnost preispitivanja pojmova integrala, konvergencije i prirode tačaka domena koje narušavaju konvergenciju.

Preispitivanje dovoljnih uslova za konvergenciju Fourier-ovih redova inspirisalo je Riemann-a da definiše novu vrstu integrala, danas poznatog kao Rimanov integral. Osim toga, proučavajući trigonometrijske redove Riemann je uočio i ispitao razliku izmedju apsolutne i obične konvergenije funkcionalnih redova. Konačno, Riemann je dokazao da, kada važi razvoj u red, Fourier-ovi koeficijenti teže ka nuli.

Riemann-ov rad o trigonometrijskim redovima objavljen je nakon njegove smrti, 1867. godine. Usledio je gotovo stogodišnji period objavljivanja raznih kontraprimera koji su ilustrovali bogatstvo teorije. Na primer, 1873. godine du Bois -Reymond[15] daje primer neprekidne funkcije čiji Fourier-ov red divergira u nuli.[16] Jednostavnije takve primere su nakon du Bois -Reymond-a dali Fejér[17] i Lebesgue.[18]

Još jedno "čudovišt" je otkriveno 1872. godine. To je čuvena Weierstrass-ova neprekidna nigde diferencijabilna funkcija definisana redom

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

gde je $a$ neparan ceo broj, $b \in (0,1)$ i važi $ab > 1 + 3\pi/2$. Weierstrass navodi da je Riemann (najkasnije 1861. godine) navodio primer "neprekidne nigde diferencijabilne funkcije"

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2},$$

za koju se naknadno ispostavilo da je diferencijabilna u nekim tačkama.

Za našu priču o nasledju harmonijske analize značajan je i Weierstrass-ov rezultat iz 1885. godine o uniformnoj aproksimaciji neprekidne funkcije trigonometrijskim polinomom. U dokazu se naziru tehnike koje će se koristiti u XX veku, upotreba konvolucije i teorije funkcija kompleksne promenljive.

[15]Paul du Bois-Reymond (1831 – 1889) nemački matematičar

[16]1966. godine Kahane i Katznelson su dokazali da Forier-ov red neprekidne funkcije može da divergira na proizvoljnom skupu Lebegove mere nula.

[17]Leopold Fejér, (1880 – 1959), madjarski matematičar, rodjen kao Leopold Weiss

[18]Henri Léon Lebesgue (1875 –1941), francuski matematičar

# 6 Nasledje - Cantor

Kao što je rečeno, Riemann je proučavao vezu izmedju svojstva integrabilnosti neke funkcije i konvergencije njenog Fourier-ovog reda i u vezi sa tim naveo primere koji ilustruju težinu problema karakterizacije konvergentnih Fourier-ovih redova. Sa jedne strane, funkcija

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^\nu \cos\frac{1}{x}\right), \quad 0 < \nu < 1/2,\ x \in [0, 2\pi),$$

je integrabilna ali njen Fourier-ov red je divergentan. Dokaz integrabilnosti se oslanja na tehniku *stacionarne faze* pri posmatranju jednog oscilatornog integrala.[19] Sa druge strane, Fatou[20] navodi primer konvergentnog trigonometrijskog reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n},$$

čija suma nije integrabilna (ni u Riemann-ovom ni u Lebesgue-vom smislu). Poslednji primer u Riemann-ovom posthumno objavljenom radu je red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n!\pi x)$$

koji konvergira u svim racionalnim i u nekim iracionalnim tačkama, ali njegovi koeficijenti ne teže ka nuli. Ovo je u oštroj suprotnosti sa oblastima konvergencije pri razvoju analitičkih funkcija u stepeni red.

Riemann je prvi ispitivao opšte trigonometrijske redove, odnosno izraze oblika

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

nezavisno od toga da li je takav red Fourier-ov red neke funkcije $f$, odnosno da li su koeficijenti odredjeni formulama $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Tako je otvorio vrata mnogim pitanjima, a za odgovore je bilo neophodno uvodjenje novih pojmova i pristupa. Na primer, odgovor na pitanje jedinstvenosti doveo je do radjanja teorije skupova na osnovu posmatranja posebnih podskupova realne prave.

Izložimo ukratko i nepotpuno razmatranja koja su prethodila nastanku takozvane deskriptivne teorije skupova.

1869. godine Heine[21] je predložio Cantoru da prouči problem jedinstvenosti trigonometrijskog reda, odnosno pod kojim uslovima važi tvrdjenje:

Ako je $\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$ za sve $x$ onda je $a_n = b_n = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

[19]Savremena teorija Fourier-ovih integralnih operatora se zasniva na svojstvima oscilatornih integrala.

[20]Pierre Fatou (1878 – 1929) francuski matematičar

[21]Heinrich Eduard Heine (1821 – 1881) nemački matematičar

U kompleksnom obliku, i uz notaciju $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$, problem jedinstvenosti glasi: da li iz $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|n|\leq N} c_n e^{inx} = 0$ za sve $x \in \mathbb{T}$ sledi $c_n = 0$, za sve $n \in \mathbb{Z}$?

U radovima iz 1870-1872, Cantor je dao neke odgovore na ovo pitanje, a njegova istraživanja su dovela do formiranja posebnih skupova tačaka (takozvanih skupova jedinstvenosti i skupova višetrukosti) i preusmerila pažnju sa terena integrabilnosti i diferencijabilnosti ka novim, nepoznatim teritorijama. To je vreme nastanka teorije skupova, teorije mere i topologije.

U slučaju uniformne konvergencije trigonometrijskog reda rešenje problema jedinstvenosti je trivijalno. Za dokazivanje teoreme u odsustvu uniformne konvergencije Cantor je koristio Riemann-ovu teoremu o težnji ka nuli koeficijenata trigonometrijskog reda. Taj rezultat je objavljen 1870. godine.

Cantor je potom, 1871. godine, dokazao da jedinstvenost važi i u slučaju kada trigonometrijski red konvergira ka nuli svuda izuzev u konačno mnogo tačaka. Konačno, 1872. godine, Cantor proširuje tvrdjenje na izvesne prebrojive skupove, odnosno, dokazuje da jedinstvenost važi ako red konvergira na komplementu nekih prebrojivih skupova.

Cantor-a je interesovalo u kojoj meri je moguće oslabiti uslove teoreme jedinstvenosti, a ova istraživanja su, izmedju ostalog, dovela do dokaza prebrojivosti skupa algebarskih brojeva i neprebrojivosti skupa realnih brojeva, 1874. godine.

Za proširenje Cantor-ovog rezultata o jedinstvenosti neophodno je uvesti nov pojam. On je definisan od strane Luzin-a[22] i Bari[23] nakon što je Menshov[24] 1916. godine objavio neočekivan rezultat o pitanju jedinstvenosti o čemu će biti reči kasnije.

**Definicija 6.1.** *Neka je $E \subseteq \mathbb{T}$. Skup $E$ je skup jedinstvenosti, $U-$skup, ako za svaki trigonometrijski red iz $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{|n|\leq N} c_n e^{inx} = 0$ za sve $x \notin E$ sledi $c_n = 0$, za sve $n \in \mathbb{Z}$. U suprotnom, $E$ je skup višestrukosti, $M-$skup.*

Dakle, do sada navedeni Cantor-ovi rezultati kažu da je $\emptyset$ jedan $U-$skup kao i da je svaki konačan skup $U-$skup.

Cantor je 1872. godine tvrdio da je proizvoljan prebrojiv i zatvoren skup takodje $U-$skup. U dokazu je koristio nov metod, kasnije nazvan transfinitna indukcija[25] koji, medjutim, nije sproveden do kraja. Problem prelaska "transfinitnih nivoa" je usmerio Cantor-ovu pažnju na preispitivanje strukture skupa realnih brojeva kao i na proučavanje veličine skupova u apstraktnom smislu. Značajan korak u razvoju Cantor-ove teorije je zasnivanje ordinalnih brojeva 1883. godine.

Čitav univerzum problema nove teorije inspirisao je Hilberta[26] da kaže čuvenu rečenicu po kojoj matematičare niko neće moći da izbaci iz raja kojeg je Cantor stvorio.

Paralelno sa problemom jedinstvenosti, preispitivao se pojam (Riemann-ovog) integrala i svojstvo integrabilnosti, odnosno struktura tačaka domena koje obezbedjuju ili narušavaju integrabilnost posmatrane funkcije. To je dovelo do postepenog uopštenja pojma dužine na veličinu proizvoljnog skupa tačaka, odnosno do pojma

[22]Nikolai Nikolaevich Luzin (1883 – 1950), ruski matematičar
[23]Nina Bari (1901 – 1961), ruska matematičarka
[24]Dmitrii Evgenevich Menshov (1892 – 1988), ruski matematičar
[25]Transfinitna indukcija je uopštenje matematičke indukcije na dobro uredjene skupove, kao što su ordinali i kardinali.
[26]David Hilbert (1862 –1943), nemački matematičar

mere datog skupa i svojstva merljivosti. Odgovarajuću definiciju dao je Borel[27] 1898. godine, nakon čega je Lebesgue[28] 1902. godine definisao integral.

1903. godine Lebesgue objavljuje konačan dokaz činjenice da je svaki prebrojiv i zatvoren skup $U-$skup. Ovo tvrdjenje su na proizvoljne prebrojive skupove proširili Bernstein[29] 1908. godine i Young[30] 1909. godine, nezavisno jedan od drugog.

Na red su došli merljivi skupovi.[31] S obzirom da su prebrojivi skupovi mere nula, prirodno pitanje je da li je mera merljivog $U-$skupa jednaka nuli. Odgovor je pozitivan, to jest, važi:

$$\text{prebrojivi skupovi} \quad \subseteq \quad \text{merljivi } U-\text{skupovi} \quad \subseteq \text{skupovi mere } 0,$$

jer na osnovu Lebesgue-ovih rezultata iz 1906. godine sledi da su svi skupovi pozitivne Lebesgue-ove mere $M-$skupovi.

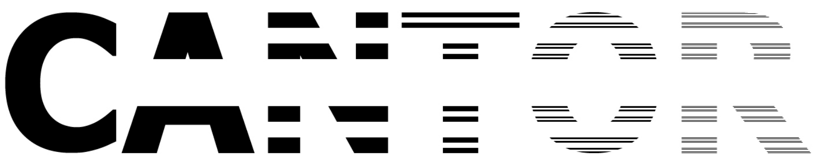
Teorema koju je dokazao Fejér 1900. godine navodila je na pomisao da su svi skupovi mere nula $U-$skupovi. Podsetimo se, iskaz $P(x)$ važi za skoro sve $x \in X$ ako važi za sve $X$ izuzev za elemente nekog skupa mere nula.

**Teorema 6.2.** *Neka je $f$ integrabilna funkcija na $\mathbb{T}$ i neka je*

$$\sigma_N(f,x) = \frac{1}{N+1}(S_0(f,x) + S_1(f,x) + \cdots + S_N(f,x))$$

*aritmetička sredina parcijalnih suma $S_n(f,x)$ Fourier-ovog reda funkcije $f$. Tada je $\lim_{n\to\infty} \sigma_N(f,x) = f(x)$ za skoro sve $x \in \mathbb{T}$.*

Veliko iznenadjenje bio je dokaz egzistencije $M-$skupa Lebesgue-ove mere nula, odnosno postojanje trigonometrijskih redova koji skoro svuda konvergiraju ka nuli, ali nisu identički jednaki nuli. Ovo je dokazao Menshov 1916. godine, pronašavši previd u jednom Lebesgue-ovom radu. Menshov je modifikovao konstrukciju čuvenog Cantor-ovog skupa da bi dobio primer zatvorenog $M-$skupa mere nula.



Podsetimo se, Cantor-ov skup na $\mathbb{T}$ se dobija uklanjanjem njegove srednje trećine i uzastopnim uklanjanjem srednjih trećina preostalih skupova tačaka. Tako dobijen

[27]Émile Borel (1871 – 1956), francuski matematičar

[28]Henri Lebesgue (1875 – 1941), francuski matematičar

[29]Felix Bernstein (1878 – 1956), nemački matematičar

[30]William Henry Young (1863 – 1942), engleski matematičar

[31]Za zadati skup $X$, $\sigma$-algebra $\Sigma$ je neprazna kolekcija podskupova od $X$, koja sadrži $X$ i koja je zatvorena s obzirom na operacije komplementiranja i prebrojive unije pri čemu postoji funkcija $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$, *mera* na $X$ tako da važi: $\mu(E) \geq 0$, $\forall E \subset \Sigma$; $\mu(\emptyset) = 0$ i da za svaku prebrojivu kolekciju $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ medjusobno disjunktnih elemenata iz $\Sigma$ važi: $\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_i\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_i)$. Skup $E \subset \Sigma$ je merljiv skup mere $\mu(E)$.

skup, presek skupova koji preostaju nakon pomenutih uklanjanja, je neprebrojiv i perfektan (zatvoren i bez izolovanih tačaka) skup mere nula. Umesto $1/3$, Menshov je uklonio sredju polovinu intervala, zatim srednju trećinu preostalog skupa tačaka, i u svakom $n-$ tom koraku uklonio je srednje intervale dužine $1/(n+1)$. Ovi rezultati su uticali na detaljnije proučavanje skupova mere nula.

Da je posmatrao Cantor-ov skup, Menshov ne bi uspeo. Naime, 1921. godine Bari i Rajchman[32] su dokazali da postoje perfektni $U-$skupovi, kao i da je Cantor-ov skup $U-$skup.

Na jediničnom intervalu Cantor-ov skup $\mathcal{C}$ se može opisati formulama

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \cap_{n=1}^{\infty} \cap_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left( \left[0, \frac{3k+1}{3^n}\right] \cup \left[\frac{3k+2}{3^n}, 1\right] \right) \\ &= [0,1] \setminus \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right). \end{aligned}$$

Mera svih uklonjenih intervala, njihova ukupna dužina je suma geometrijskog reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{8}{81} + \cdots = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1,$$

pa je Cantor-ov skup mere nula.

1923. godine Bari je dokazala da je unija prebrojivo mnogo zatvorenih $U-$skupova $U-$skup, a nije poznato da li je konačna unija proizvoljnih $U-$skupova $U-$skup, videti [2].

Menshov je dokazao i da svaka merljiva funkcija na $\mathbb{T}$ ima razvoj u trigonometrijski red, to jest, postoje koeficijenti $c_n$, $n \in \mathbb{Z}$, tako da je $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ za skoro sve $x \in \mathbb{T}$.

Da zaključimo,

$$\text{prebrojivi skupovi} \subsetneq \text{merljivi } U-\text{skupovi} \subsetneq \text{skupovi mere } 0.$$

Istraživanje $U-$skupova i $M-$skupova označava početak deskriptivne teorije skupova u okviru koje se proučava struktura takozvanih definabilnih skupova realnih brojeva.

# 7 Od Fourier-ovog reda do hiperfunkcije

U ovom poglavlju vraćamo se Fourier-ovim redovima. Pre nego što predjemo na glavnu temu navodimo nekoliko zanimljivih činjenica.

Luzin je 1915. godine pretpostavio da je Fourieor-ov red proizvoljne funkcije $f \in L^2(\mathbb{T})$, to jest $\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx < \infty$, skoro svuda konvergentan.

1926. godine Kolmogorov[33] je konstruisao apsolutno integrabilnu funkciju $f \notin L^2(\mathbb{T})$ čiji Fourier-ov red divergira svuda.

1965. godine Kahane[34] i Katznelson[35] su dokazali da za proizvoljan skup mere nula postoji neprekidna funkcija na $\mathbb{T}$ čiji Fourier-ov red divergira na tom skupu.

[32] Aleksander Rajchman (1890 – 1940), poljski matematičar
[33] Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903 – 1987), ruski matematičar
[34] Jean-Pierre Kahane (rodjen 1926. godine) francuski matematičar
[35] Yitzak Katznelson (rodjen 1934. godine) izraelski matematičar

1966. godine Carleson[36] je dokazao Lusinovu pretpostavku. U stvari, Carleson je pokušao da konstruiše kontraprimer.

Nasuprot ovim rezultatima stoji jednostavan kriterijum konvergencije Fourier-ovog reda periodične distribucije. Za formulaciju tog kriterijuma potreban nam je pojam sporo rastućeg niza. Niz $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je sporo rastući ako postoje $C>0$ i $k\in\mathbb{Z}$ tako da važi

$$|c_n| \leq C|n|^k, \quad \forall n \in \mathbb{Z}\setminus 0.$$

Odgovarajuća teorema za $2\pi-$periodične distribucije glasi: Distribucija $f$ je $2\pi-$periodična distribucija ako i samo ako je (u distributivnom smislu)

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

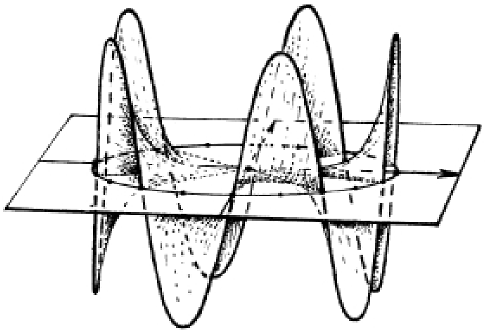
pri čemu je niz njenih Fourier-ovih koeficijenata $c_n = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$ jedan sporo rastući niz. Odavde direktno sledi i jedinstvenost razvoja.

Na primer, Dirakova delta distribucija, posmatrana kao periodična distribucija ima sledeći razvoj:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}. \tag{8}$$

U nastavku ukratko izlažemo kako se upotrebom kompleksne analize dobija nov ugao gledanja na posmatranu problematiku. Za ovaj deo izlaganja motivisani smo devetim poglavljem knjige [12], za koju je Poppy, junakinja filma "Happy-Go-Luck" iz 2008. godine, primetivši je u lokalnoj knjižari u tom momentu izjavila: *The Road to Reality... Don't wanna be going there!*

Najpre primetimo da periodične funkcije nad intervalom $[0,2\pi)$ možemo da identifikujemo sa periodičnim funkcijama na jediničnoj kružnici u $\mathbb{C}$. Realni i imaginarni deo funkcije $z^n = e^{inx}$ su $n-$ti harmonici $\cos nx$ i $\sin nx$ redom. Na sledećoj slici je ilustracija ovog pridruživanja.



Slika 9: Realni deo funkcije $z^5$

Neka je $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, $x\in[0,2\pi)$. Važi $|e^{inx}|=1$ pa se dati red može napisati u obliku $F(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$, gde je $z=e^{ix}$, gde $z$ pripada jediničnoj

[36] Lennart Carleson (rodjen 1928. godine), švedski matematičar

kružnici u kompleksnoj ravni $\mathbb{C}$. Funkcija $F(z)$ može biti definisana i za neke vrednosti $|z| \neq 1$, pa se tako dobija Laurent-ov[37] red. Ovaj zapis Fourier-ovog reda u obliku Laurent-ovog reda omogućava dublji uvid u prirodu Fourieor-ovih redova i funkcija koje oni predstavljaju. Penrose[38] ističe značaj ovog pristupa za kvantnu mehaniku i samim tim za naše razumevanje prirode.

Poenta narednih razmatranje je da prikazivanje funkcije u vidu Laurent-ovog reda govori nešto o njenom Fourier-ovom redu, odnosno o njenom ponašanju na jediničnoj kružnici, na osnovu ponašanja funkcije kompleksne promenljive izvan jedinične kružnice. U tu svrhu razdvajamo pozitivne i negativne stepene i uvodimo sledeći zapis

$$F(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_{-n} z^{-n} + c_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n = F^+(z) + c_0 + F^-(z).$$

Neka je $A > 0$ poluprečnik konvergencije stepenog reda $F^-(z)$, a $1/B > 0$ poluprečnik konvergencije stepenog reda

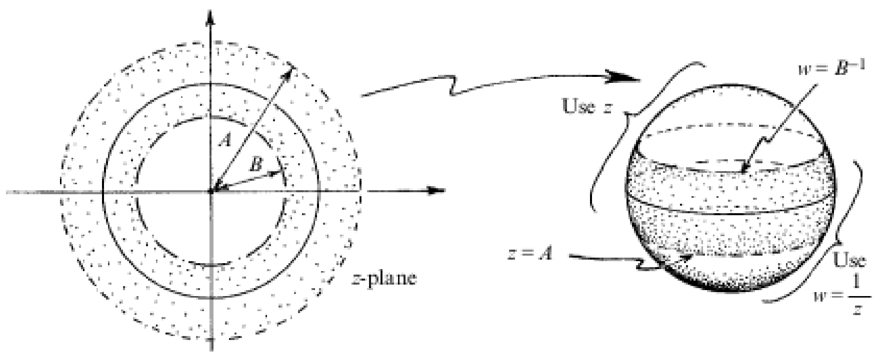
$$F^+(w) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n w^n,$$

gde je $w = 1/z$. Dakle, $F^-(z)$ konvergira za $|z| < A$, a $F^+(z)$ konvergira izvan kruga poluprečnika $B$, to jest za $|z| > B$.

Ako je $B < A$ ove oblasti se preklapaju pa čitav Laurent-ov red funkcije $F(z)$ konvergira u prstenu $B < |z| < A$.

Pri tome nas zanima slučaj $B < 1 < A$, kada je jedinična kružnica unutar prstena u kojem red konvergira.

Ključno pitanje je da li je ovo neophodan uslov da bi se mogla dobiti odredjena informacija o Fourier-ovom redu funkcije $f(x)$?




U slučaju kada je $f(x)$ analitička funkcija za $x \in [0, 2\pi)$ odgovor je lak, jer tada postoji njeno analitičko produženje izvan jedinične kružnice i ono je dato odgovarajućim Laurent-ovim redom $F(z) = F^+(z) + c_0 + F^-(z)$. Pri tome je $F^-(z)$ analitičko

[37] Pierre Laurent (1813 – 1854), francuski matematičar
[38] Roger Penrose(rodjen 1931. godine) engleski matematiǎr

produženje funkcije $f$ na oblast $|z| < A$, a $F^{+}(z)$ njeno analitičko produženje na oblast $|z| > B$.

Ako funkcija $f$ nije analitička onda je $A = 1$ ili je $B = 1$ ili se prsten "sabija" do jedinične kružnice.

Sledeći primer ilustruje ova razmatranja. Neka je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Ovo je mala modifikacija Fourier-ovog primera (4.1). Funkcija $f$ na $[0, 2\pi)$ ima vrednost $\pi/4$ za $x \in [0, \pi)$, a $-\pi/4$ za $x \in (\pi, 2\pi)$. Lako se uočava da je odgovarajuća funkcija $F(z)$ data sa

$$F(z) = \frac{1}{2i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2n-1} z^{2n-1}.$$

U ovom slučaju, prsten se "sabija" do jedinične kružnice, a odgovarajuće Laurent-ov red se može predstaviti kao zbir dve holomorfne funkcije. Štaviše, zbir se može predstaviti u "zatvorenom" obliku:

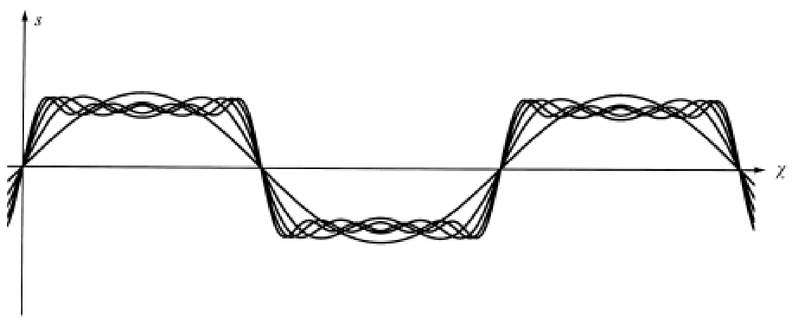
$$F^{-}(z) = \frac{1}{2i}(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \dots) = \frac{1}{4i} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

$$F^{+}(z) = \frac{1}{2i}(z^{-1} + \frac{z^{-3}}{3} + \frac{z^{-5}}{5} + \frac{z^{-7}}{7} + \dots) = \frac{1}{4i} \log\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right).$$

Primetimo da su singulariteti ovih funkcija tačke grananja $1 = e^{0\pi i}$ i $-1 = e^{\pi i}$ koje odredjuju "skok" u sumi Fourier-ovog reda.

Kako je $\log(-w) = \pm\pi i + \log w$, dobija se da je $f(x) = \pm\pi/4$.

Na osnovu Dirichlet-ove teoreme sledi da se po delovima konstantna funkcija jednaka $\pi/4$ za $x \in [0, \pi)$, a $-\pi/4$ za $x \in (\pi, 2\pi)$, može razviti u Fourier-ov red koji tačkasto konvergira ka toj funkciji za $x \in [0, 2\pi) \setminus \pi$.



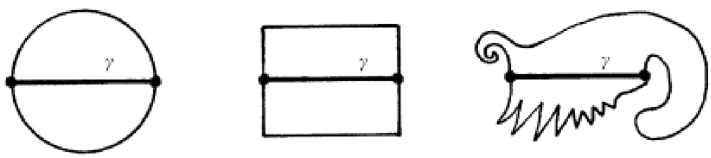
Poenta ovog primera je da se jedna funkcija može posmatrati kao funkcija definisana na jediničnoj kružnici u kompleksnoj ravni, ali i kao zbir dva reda koji odredjuju holomorfne funkcije, čak i kada je jedna definisana unutar jedinične kružnice, a druga izvan nje.

Inspirisani ovim primerom možemo se postaviti pitanje karakterizacije "funkcija" definisanih na jediničnoj kružnici koje se mogu predstaviti u vidu "zbira" neke funkcije $F^-$ koja je holomorfna unutar jedinične kružnice i $F^+$, holomorfne funkcije izvan jedinične kružnice. U opštem slučaju, nijedna od njih se ne može analitički proširiti na $|z| = 1$, pa se njihova razlika može interpretirati kao "skok" na jediničnoj kružnici.

Ova ideja "skoka" izmedju holomorfne funkcije sa jedne strane krive $\gamma$ u kompleksnoj ravni i holomorfne funkcije sa druge strane te krive pri čemu se nijedna od njih ne mora holomorfno proširiti na $\gamma$ je, u suštini definicija *hiperfunkcije* na $\gamma$ i predstavlja nov pojam "funkcije" na krivoj u $\mathbb{C}$.

Prostor hiperfunkcija $\mathcal{B}(\Omega)$ nad proizvoljnim nepraznim skupom $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je uveo Sato[39] 1958. godine.

U jednoj dimenziji se za krivu $\gamma$ obično bira interval na realnoj osi sa krajevima u tačakama $a$ i $b$, $a < b$. Hiperfunkcija je "skok" izmedju holomorfne funkcije $F^-$ nad $\Omega^-$, otvorenim skupom u kompleksnoj ravni čija je gornja granica $\gamma$, i holomorfne funkcije $F^+$ nad $\Omega^+$, otvorenim skupom u kompleksnoj ravni čija je donja granica $\gamma$. Da definicija hiperfunkcije ne zavisi od izbora oblasti $\Omega^-$ i $\Omega^+$ dokazuje se pomoću teoreme o isecanju.[40]




Slika 10: Kriva $\gamma$ i oblasti $\Omega^-$ i $\Omega^+$

Da bi se definisale operacije nad hiperfunkcijama, one se posmatraju kao uredjeni parovi $(F^-, F^+)$ navedenih holomorfnih funkcija. Preciznije, hiperfunkcija je klasa ekvivalencije koju predstavlja $(F^-, F^+)$, a parovi $(F^-, F^+)$ i $(G^-, G^+)$ su u istoj klasi ekvivalencije ako je

$$F^- - G^- = F^+ - G^+ = H$$

za neku holomorfnu funkciju $H$ nad $\Omega^- \cup \Omega^+ \cup \gamma$. Operacije nad hiperfunkcijama se definišu na uobičajen način, primenom na uredjeni par. Na primer, izvod hiperfunkcije je dat sa

$$\frac{d}{dz}(F^-, F^+) = (\frac{d}{dz}F^-, \frac{d}{dz}F^+).$$

[39]Mikio Sato (rodjen 1928. godine), japanski matematičar
[40]*engl. excision theorem*

Hiperfunkcije se mogu množiti sa analitičkim funkcijama, kao i sa realnim analitičkim funkcijama koje se mogu holomorfno produžiti na neku okolinu od $\gamma$. Proizvod dve hiperfunkcije, medjutim, nije definisan u opštem slučaju. Ovo nije neočekivan rezultat, jer množenje dve distribucije nije definisano u opštem slučaju, a prostori distribucija se mogu potopiti u odgovarajuće prostore hiperfunkcija.

U nastavku dajemo interpretaciju Dirakove delta distribucije kao hiperfunkcije.

Posmatra se kontura $\gamma = -\gamma_+ + \gamma_-$ sa slike.

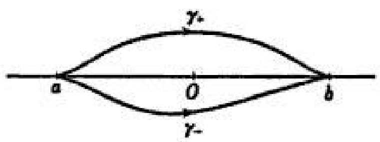



Fig. 0.1

Neka je $\varphi$ proizvoljna analitička funkcija. Na osnovu Cauchy-jeve[41] formule za integrale važi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(z)}{z}dz = \varphi(0).$$

Leva strana jednakosti se može zapisati kao

$$\int_{a+i0}^{b+i0}\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(z)}{z}\right)dz - \int_{a-i0}^{b-i0}\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{\varphi(z)}{z}\right)dz$$
$$= \int_a^b \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right)\varphi(x)dx.$$

Kako je $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ sledi da se $\delta$ može interpretirati kao zbir (ili kao zaslika)

$$\delta(x) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right),$$

to jest kao uredjeni par

$$\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x+i0}, -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x-i0}\right) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}, -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\right).$$

Dirakova delta je jedna hiperfunkcija, zapravo distribucija definisana pomoću holomorfnih funkcija ima razvoj u konvergentan Fourier-ov red (8). Penrose bi rekao: Ala bi se Euler obradovao.

[41] Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), francuski matematičar

# 8 Dodatak A

Izložimo ukratko rešavanje jednačine treperenja žice metodom smene promeljivih (promene koordinata).

Posmatrajmo najpre jednačinu prvog reda da konstantnim koeficijentima

$$a\partial_t u + b\partial_x u = 0 \tag{9}$$

pri čemu je $a^2 + b^2 \neq 0$. Leva strana jednačine je izvod funkcije $u$ u pravcu vektora $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, odakle sledi da je rešenje konstantna funkcija na pravoj $bt - ax = 0$, kao i na svakoj pravoj liniji koja je paralelna sa njom, $bt - ax = const$. Dakle, $u(t, x) = f(bt - ax)$, za prozvoljnu (diferencijabilnu) funkciju $f$.

Uvedimo sada smenu promenljivih u (9):

$$\xi = at + bx, \quad \eta = bt - ax.$$

Po pravilu za izvod složene funkcije dobija se

$$\partial_t u = \partial_\xi u \partial_t \xi + \partial_\eta u \partial_t \eta = a\partial_\xi u + b\partial_\eta u,$$

$$\partial_x u = \partial_\xi u \partial_x \xi + \partial_\eta u \partial_x \eta = b\partial_\xi u - a\partial_\eta u,$$

odakle jednačina (9) u novim koordinatama postaje

$$a\partial_t u + b\partial_x u = a(a\partial_\xi u + b\partial_\eta u) + b(b\partial_\xi u - a\partial_\eta u) = (a^2 + b^2)\partial_\xi u = 0.$$

Prema tome, $u = f(\eta) = f(bt - ax)$, kao i u prethodnom razmatranju.

Vratimo se jednačini treperenja žice:

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x) u = 0. \tag{10}$$

Poučeni primerom rešavanja jednačine (9) uvodimo smenu

$$\xi = ct + x, \quad \eta = ct - x.$$

Konačno, uvrstivši $\partial_t = c(\partial_\xi + \partial_\eta)$ i $\partial_x = \partial_\xi - \partial_\eta$ u (10) dobija se

$$4c^2 \partial_\eta \partial_\xi u = 0,$$

pa je $\partial_\xi u$ funkcija po $\eta$, pa se integracijom po $\eta$ dobija da rešenje oblika

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \Rightarrow u(t, x) = f(ct + x) + g(ct - x).$$

# 9 Dodatak B

Pojasnimo izvodjenje kompleksnog oblika Fourier-ovog reda.

Pretpostavimo da funkcija $f(x)$ može da se razvije u Furijeov red

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}), \qquad x \in [-l, l],$$

gde je:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\, dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \qquad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx, k\in\mathbb{N}.$$

Ako se iskoristi Euler-ova formula $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ dobija se

$$\cos\frac{k\pi x}{l} = \frac{e^{\frac{k\pi x}{l}i} + e^{\frac{-k\pi x}{l}i}}{2}, \qquad \sin\frac{k\pi x}{l} = \frac{e^{\frac{k\pi x}{l}i} - e^{\frac{-k\pi x}{l}i}}{2i}.$$

Prema tome

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k - b_k i}{2}e^{\frac{k\pi x}{l}i} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k + b_k i}{2}e^{\frac{-k\pi x}{l}i} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{a_k + b_k i}{2}e^{\frac{k\pi x}{l}i} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_k - b_k i}{2}e^{\frac{k\pi x}{l}i} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{k\pi x}{l}i}, \end{aligned}$$

gde je

$$c_k = \begin{cases} \frac{a_k - b_k i}{2}, & k > 0 \\ a_0/2, & k = 0 \\ \frac{a_k + b_k i}{2}, & k < 0, \end{cases}$$

odnosno

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{\frac{-k\pi x}{l}i}\,dx.$$

# 10 Dodatak C

Neka je $H_\pm$ oznaka za gornju, odnosno donju poluravan u $\mathbb{C}$ i neka je $\mathcal{A}(H_\pm)$ algebra holomorfnih funkcija $H_\pm$.

Tada

$$(F_\varepsilon, \varphi) = \int F(x + i\varepsilon)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

definiše familiju $F_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ regularnih distribucija.

Kažemo da funkcija $F \in \mathcal{A}(H_+)$ ima graničnu vrednost[42] $F_+ \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ kao i samo kao postoji

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}(F_\varepsilon, \varphi) \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

a $F_- \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se definiše na analogni način.

Holomorfna funkcija $F_\pm \in \mathcal{A}(H_\pm)$ ima graničnu vrednost u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ako za svaki kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}$ postoje $C > 0$ i $m \in \mathbb{N}$ tako da za sve $x \in K$ i sve $|y| \in (0, 1]$ važi

$$|F_\pm(x + iy)| \le C\frac{1}{|y|^m}. \tag{11}$$

[42] *engl. boundary value*

**Teorema 10.1.** *Za svaku distribuciju $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ postoji analitička funkcija $F$ na $\mathbb{C} \setminus \mathrm{supp} f$ za koju važi* (11) *na $H_\pm$ tako da je*

$$(f, \varphi) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \in [F(x + i\varepsilon) - F(x - i\varepsilon)]\varphi(x)dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Slična tvrdjenja postoje za prostore temperiranih distribucija i ultradistribucija.

Kada se u navedenoj reprezentaciji distribucije kao sume graničnih vrednosti holomorfnih funkcija ukloni uslov rasta dobija se definicija *hiperfunkcije*. Prostor hiperfunkcija $\mathcal{B}(\Omega)$ (gde je $\Omega$ neprazan otvoren skup u $\mathbb{R}^d$) je uveo M. Sato koristeći takozvane kohomološke metode. Taj prostor u najopštijem slučaju nije topološki dual nekog prostora test funkcija.

Svaka distribucija se može interpretirati kao hiperfunkcija, pa je $\mathcal{D}'(\Omega) \subset \mathcal{B}(\Omega)$.

U jednodimenzionom slučaju $\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \Omega) \big/ \mathcal{A}(\mathbb{C})$.

Za kraj navodimo Holmgren-ovu[43] teoremu o jedinstvenosti koju je moguće dokazati kao posledicu mikrolokalne analize hiperfunkcija. Po tom rezultatu sledi da je prostor hiperfunkcija zgodan pri proučavanju linearnih parcijalnih diferencijalnih operatora sa realnim analitičkim koeficijentima.

**Teorema 10.2.** *Posmatra se problem*

$$\begin{aligned} \partial_t^k u &= G(x, t, (\partial_x^\alpha \partial_t^j u)_{|\alpha|+j \le k, j<k}), \\ \partial_t^j u &= \phi_j(x) \quad (0 \le j < k), \end{aligned}$$

$(x, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. *Ako su funkcije $G, \phi_0, \ldots, \phi_{k-1}$ analitičke u nekoj okolini nule, onda postoji okolina nule u kojoj dati proeblem ima jedinstveno analitičko rešenje.*

Po ovoj teoremi, na primer, ako je funkcija $G$ linearna, onda problem iz teoreme 10.2 ne može da ima rešenje koje nije analitička funkcija. Primetimo da čuvena teorema Cauchy-Kowalevski[44] u tom slučaju ne govori ništa o egzistenciji rešenja koja nisu analitička.

# Literatura


[1] J. J. Benedetto, *Harmonic Analysis and Applications*, CRC Press, 1997.

[2] J. J. Benedetto, W. Czaja, *Integration and Modern Analysis*, Birkhäuser, 2009.

[3] D. Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis*, The Mathematical Association of America, 2007.

[4] O. Darrigol, *The acoustic origins of harmonic analysis*, Arch. Hist. Exact Sci. 61 (4) (2007), 343–424.

[5] J.-P. Kahane, P.-G. Lemarié-Rieusset *Fourier Series and Wavelets*, Gordon and Breach, 1995.

[6] A. S. Kechris, *Set theory and uniqueness for trigonometric series*, preprint, 1997.


[43] Erik Albert Holmgren (1872 – 1943) švedski matematičar

[44] Sofia Vasilyevna Kovalevskaya (1850 –1891) ruska matematičarka

[7] A. S. Kechris, *Trigonometric series and set theory*, Wiadomosci Matematyczne, 48(2) (2012), 109–118.

[8] V. P. Khavin, *Methods and structure of commutative harmonic analysis*, 1–111, Encyclopaedia Math. Sci., 15, Springer, 1991.

[9] I. Kleiner, *Excursions in the History of Mathematics*, Birkhäuser, 2012.

[10] S. G. Krantz *Explorations in Harmonic Analysis*, Birkhäuser, 2009.

[11] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton Univ. Press, 1995.

[12] R. Penrose, *The Road to Reality*, Vintage, 2007.

[13] W. A. Strauss, *Partial Differential Equations, an Introduction*, John Wiley & Sons, 2008.

[14] R. S. Strichartz, *The Way of Analysis*, Jones and Bartlett, 2000.

[15] E. C. Zeeman, *Controversy in Science: On the Ideas of Daniel Bernoulli and René Thom*, Nieuw Archief voor Wiskunde, 11 (3) (1993), 257–282.