1 Uvodni pojmovi kombinatorike, II deo

U nastavku prethodnog predavanja navode se osnovni principe kombinatorike.

Za $n \in \mathbb{N}$, koristiće se notacija $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$ ("en faktorijel", proizvod prirodnih brojeva manjih od ili jednakih sa n, $0! = 1$).

1.1 Princip bijekcije i Dirihleov princip, II

Podsetimo se principa bijekcije: *Dva neprazna skupa su iste kardinalnosti ako i samo ako postoji bijekcija izmedju njih.*

Prvi primer ilustruje primenu principa bijekcije na ispitivanje jednakosti $|A| = |B|$ bez odredjivanja kardinalnosti skupova A i B.

Primer 1. Posmatra se skup nenegativnih celih brojeva manjih od milion. Kojih brojeva u tom skupu ima više: onih kod kojih je zbir cifara 22 ili onih kod kojih je zbir cifara 32?

Umesto da odredimo kardinalnost oba skupa i da ih tako uporedimo, koristićemo princip bijekcije. Pri tome, ako broj ima manje od šest cifara dopisaćemo mu sa leve strane poreban broj nula tako da dobijemo šestocifren broj: $3204 = 003204$. Neka je $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ broj takav da je $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 22$. Posmatrajmo broj $b_1b_2b_3b_4b_5b_6$ definisan sa $b_k = 9 - a_k$, $k = 1, 2, \ldots, 6$. Lako se dokazuje da je ovim uspostavljena bijekcija izmedju skupa brojeva manjih od milion kod kojih je zbir svih cifara jednak 22 i onih kod kojih je taj zbir jednak 32, pa su ti skupovi iste kardinalnosti.

Sledeći primeri ilustruju Dirihleov princip.

Primer 2. Da li je moguće izmedju bilo kojih 100 celih brojeva izabrati 15 tako da razlika bilo koja dva izabrana broja bude deljiva sa 7?

Odgovor: "Kavez"je ovde svojstvo "ostatak pri deljenju sa 7". Tako da se 100 brojeva rasporedjuje u 7 kaveza. Znači da postoji kavez sa 15 ili više brojeva. U njemu su brojevi koji daju isti ostatak pri deljenju sa 7 pa je razlika bilo koja dva od njih deljiva sa 7.

Primer 3. Na jednom ostrvu živi 510 foka i svaka od njih ima barem 10 brkova, ali ne više od 30. Dokazati da postoji barem 25 foka sa istim brojem brkova.

Odgovor: "Kavez"je, naravno, broj brkova, pa foke rasporedjujemo u 21 kavez. Ako u svaki kavez smestimo najviše 24 foke, izvan kaveza će ih ostati najmanje 6

foka ($21 \cdot 24 = 504$). Dakle, bar u jednoj grupi postoji barem 25 foka.

Zadaci za vežbu

a) U kantini se nalazi 95 stolova oko kojih je rasporedjeno ukupno 465 stolica. Da li u svakoj raspodeli stolica oko stola postoji barem jedan sto sa 6 stolica?

b) Proizvodjač tri sorte jabuka ih pakuje u gajbe tako da se u svakoj gajbi nalazi samo jedna sorta. Prodavnici je jutros isporučeno 25 gajbi. Dokazati da postoji barem 9 gajbi sa istom sotrom jabuka.

c) Izabrano je 27 različitih neparnih brojeva manjih od 100. Dokazati da postoje dva broja koja u zbiru daju 102.

d) Na zabavi je bilo 15 ljudi. Neki od njih su se rukovali sa nekima. Dokazati da su se barem dve osobe rukovale sa istim brojem ljudi.

U poslednjem zadatku "kavez"je broj ljudi sa kojima se pojedini učesnik rukovao. Takvih kaveza ima 15. Razlikujemo dva slučaja. Ako kavez broj 14 nije prazan, znači da se barem jedan učesnik rukovao sa svima, pa je u tom slučaju kavez 0 prazan. Drugi slučaj je da je kavez 14 prazan. Prema tome, 15 učesnika treba smestiti u 14 kaveza, što znači da su se barem dve osobe rukovale sa istim brojem učesnika.

Ova podela na moguće slučajeve koristi se i u sledećem zadatku.

Dokazati da u grupi od 6 ljudi postoje tri osobe koje se medjusobno poznaju (svako poznaje preostale dve osobe) ili postoje tri osobe od kojih nijedna ne poznaje druge dve.

1.2 Princip proizvoda i pravilo zbira

Neka su dati skupovi A i B, $|A| = n$, $|B| = m$.

Princip ili pravilo proizvoda glasi: broj različitih načina da se formira uredjeni par (a, b) tako da je $a \in A$, $b \in B$, jednak je $n \cdot m$, odnosno $|A \times B| = n \cdot m$.

Primer 4. Koliko različitih automobilskih registracija je moguće formirati od 3 cifre i dva slova azbuke? Kako glasi odgovor u slučaju da nije dozvoljeno ponavljanje slova ni cifara kod jedne registracije?

Odgovori su $30 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 900000$ i $30 \cdot 29 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 626400$ respektivno.

Primer 5. Šifra na sefu je odredjena petocifrenim brojem, pri čemu i prva cifra može biti 0. Koliko ima šifri koje čine rastući niz?

Da bi cifre činile rastući niz, moraju biti različite. Izračunajmo koliko ima šifara sa različitim ciframa. Iz principa proizvoda sledi da ih ima $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$. Sada treba odrediti koliko šifara ima cifre poredjane u rastući niz. Primetimo sledeće: za svaki izbor 5 različitih cifrara, od svih mogućih rasporeda samo jedan je rastući. Takvih rasporeda ima 120, pa zaključujemo da je odgovor $30240/120 = 252$.

Zadaci Neka su dati skupovi A i B, $|A| = n$, $|B| = m$.

a) Koliko ima različitih funkcija $f : A \to B$?

b) Koliko ima različitih injektivnih funkcija $f : A \to B$?

c) Dokazati da je kardinalnost partitivnog skupa $\mathcal{P}(A)$ skupa A (skupa kojeg čine svi podskupovi skupa A) jednaka sa 2^n.

Označimo elemente skupa A sa a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, a elemente skupa B sa b_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Kako se, za utvrdjeno k, svakom elementu a_k može pridružiti element b_j na m načina, iz pravila proizvoda sledi da postoji m^n različitih funkcija $f : A \to B$. Na sličan način, vodeći računa o uslovu injektivnosti zaključujemo da postoji $m(m-1)\cdots(m-n+1)$ različitih injektivnih funkcija $f : A \to B$.

Za rešenje zadatka c) kombinuje se princip bijekcije i pravilo proizvoda. Posmatra se skup X uredjenih $n-$torki sastavljenih od cifara 0 i 1. S obzirom da svaka komponenta može da bude nula ili jedinica iz pravila proizvoda sledi $|X| = 2^n$. U nastavku se definiše bijekcija izmedju skupa X i $\mathcal{P}(A)$.

Neka je $B \subset A$ i neka je $f : \mathcal{P}(A) \to X$ definisana na sledeći način: $f(B) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ gde je $\alpha_k = 1$ ako $a_k \in B$, a $\alpha_k = 0$ ako $a_k \notin B$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Jasno, f je bijekcija čime je tvrdjenje dokazano.

Pretpostavimo sada da su A i B disjunktni. *Princip ili pravilo zbira* glasi: broj različitih načina da se iz unije disjunktnih skupova izabere jedan element jednak je $n + m$, odnosno

$$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow |A \cup B| = n + m.$$

Zadaci

a) Koliko ima celih brojeva izmedju 0 i 1000 koji sadrže tačno jednu cifru 6?

b) Koliko ima celih brojeva izmedju 0 i 1000 koji sadrže barem jednu cifru 6?

c) Koliko ima neparnih celih brojeva izmedju 100 i 1000?

d) Koliko ima petocifrenih telefonskih brojeva koji počinju na 21, ako poslednje tri cifre moraju biti medjusobno različite i medju njima ne smeju da budu cifre $0, 2$ i 5 i osim toga, poslednja cifra ne sme da bude 1?

e) Na polici se nalazi 15 knjiga iz matematike, 12 knjiga iz ekonomije i 10 knjiga iz umetnosti. Na koliko načina je moguće izabrati dve knjige iz različitih oblasti?

Odgovor a) Neka je S_k ukupran broj $k-$tocifrenih brojeva koji koji sadrže tačno jednu cifru 6, $k = 1, 2, 3$. Tako je $S_1 = 1$, $S_2 = 8{+}9 = 72$ i $S_3 = 81{+}72{+}72 = 225$, pa je odgovor 243.

b) Ovde se koristi činjenica da je odgovor jednak razlici kardinalnog broja skupa P, svih brojeva i izmedju 0 i 1000 (isključujući 0 i 1000) i kardinalnog broja skupa S onih brojeva izmedju 0 i 1000 koji ne sadrže cifru 6.

Jasno, $|P| = 999$. Skup S delimo na disjunktnu uniju jednocifrenih, dvocifrenih i trocifrenih brojeva koji ne sadrže cifru 6. Tako je $|S| = 8 + 72 + 648 = 728$. Odgovor je: $|P| - |S| = 271$.

c) Zadatak ćemo uraditi na dva načina, koristeći princip zbira i princip proizvoda. Sa jedne strane, ako je S_k trocifren broj koji se završava cifrom $k \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, onda je rešenje

$$|S_1| + |S_3| + |S_5| + |S_7| + |S_9| = 5 \cdot 90 = 450.$$

Sa druge strane, princip proizvoda daje isti odgovor $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$.

d) I ovaj zadatak je moguće rešiti na (barem) dva načina. Principom proizvoda, polazeći od pete cifre, dobija se odgovor $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$. Princip zbira koristimo oduzimajući od ukupnog broja telefonskih brojeva koji mogu da se formiraju izborom tri različite cifre iz skupa $\{1, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ one kod kojih je poslednja cifra jednaka 1. Rešenje je $7 \cdot 6 \cdot 5 - 6 \cdot 5 = 180$.

U slučaju kada A i B nisu disjunktni, važi *princip ili pravilo uključenja-isključenja*:

$$(A \cap B = C, \quad |C| = p \geq 0) \Longrightarrow |A \cup B| = n + m - p.$$

Neka je $B \setminus C$ razlika skupova B i C. Jasno, $|B \setminus C| = m - p$, jer su $B \setminus C$ i C disjunktni. Važi $A \cup B = A \cup B \setminus C$. Skupovi A i $B \setminus C$ su disjunktni pa je

$$|A \cup B| = |A \cup B \setminus C| = |A| + |B \setminus C| = n + m - p.$$

Primer 6. U grupi od 100 studenata, 60 sluša matematiku, 75 istoriju, a 45 oba predmeta. Koliko studenata sluša matematiku ili istoriju (barem jedan od ovih predmeta)?

Odgovor Označimo sa M skup studenata koji slušaju matematiku, a sa H skup studenata koji slušaju istoriju. Važi:

$$|M \cup H| = |M| + |H| - |M \cap H| = 60 + 75 - 45 = 90.$$

Primer 7. Koliko ima načina da se sve cifre poredjaju tako da na prvoj poziciji bude cifra veća od 1, a na poslednjoj (desetoj) poziciji bude cifra manja od 7?

Odgovor Uvodimo oznaku X za skup svih mogućih rasporeda cifara i S za skup rasporeda cifara koje ispunjavaju uslov zadatka. Jasno, $|X| = 10! = 3628800$, a $|S|$ se traži. Iz pravila zbira sledi $|S| = |X| - |S^c|$, pa ćemo odrediti $|S^c|$, kardinalni broj skupa svih rasporeda kod kojih je prva cifra 0 ili 1 ili je poslednja cifra $7, 8$ ili 9. Sada se koristi pravilo uključivanja-isključivanja. Neka je A skup rasporeda kod kojih je prva cifra 0 ili 1. Važi $|A| = 2 \cdot 9! = 725760$. Neka je B skup rasporeda kod kojih je poslednja cifra $7, 8$ ili 9. Važi $|B| = 3 \cdot 9! = 1088640$. Takodje, $|S^c| = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Kako je $|A \cap B| = 2 \cdot 8! \cdot 3 = 241920$, dobija se

$$|S| = 3628800 - (725760 + 1088640 - 241920) = 2056320.$$

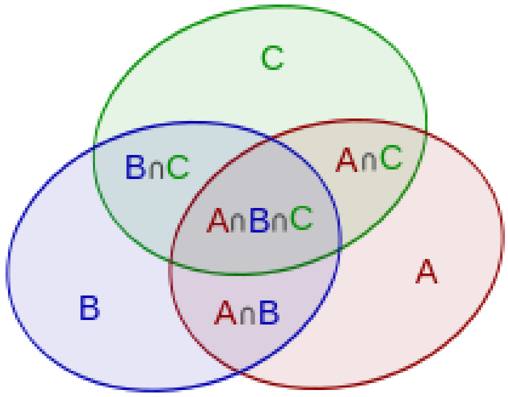
Pravilo uključenja-isključenja se lako proširuje na tri i više skupova. Za tri proizvoljna konačna skupa A, B i C važi:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

U slučaju tri skupa, zadaci uključenja-isključenja se grafički mogu prikazati Venovim dijagramima i rešavati upisivanjem odgovarajućih kardinalnih brojeva na odredjeno mesto.

Zadaci

a) Izmedju 200 anketiranih osoba, 110 prati sport, 120 komedije, a 85 drame. Dalje, 50 gleda drame i sport, 70 komedije i sport, 55 komedije i drame, a 30 osoba prati sve tri vrste programa. Koliko anketiranih osoba ne gleda ni jedan od navedenih programa?



b) Izmedju 100 studenata, 50 sluša hemiju, 53 matematiku, a 42 fiziku. Dalje, 15 sluša hemiju i fiziku, 20 fiziku i matematiku, 25 matematiku i hemiju, a 5 studenata slušaju sva tri predmeta. Koliko studenata sluša barem jedan, a koliko njih ne slušaju nijedan od ovih predmeta? Koliko studenata sluša samo matematiku (a ne hemiju niti fiziku)? Koliko studenata sluša fiziku ili hemiju ali ne i matematiku?

Literatura

[1] J. A. Anderson, Diskretna matematika sa kombinatorikom, Računarski fakultet, Beograd, 2005.

[2] B. Kisačanin, Mala matematika, Univerzitet u Novom Sadu, Stylos, Novi Sad, 1995.

[3] R. Tošić, Kombinatorika, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1999.