# Комплексна анализа
## - белешке са предавања -

Милица Жигић

6. новембар 2023.

# Садржај


**1 Комплексна раван** **5**
1.1 Аритметичка и геометријска својства комплексних бројева . . . 5
1.2 Тополошке карактеристике комплексне равни . . . 13
1.3 Конвергенција у комплексној равни . . . 15
1.3.1 Комплексни бројни низови . . . 15
1.3.2 Комплексни бројни редови . . . 17
1.4 Риманова сфера и стереографска пројекција . . . 19

**2 Функције комплексне променљиве** **21**
2.1 Непрекидност комплексне функције . . . 23
2.2 Диференцијабилност и аналитичке функције . . . 26
2.3 Коши-Риманове парцијалне диференцијалне једначине и аналитичност . . . 28
2.4 Хармонијске функције и аналитичност . . . 32

**3 Елементарне комплексне функције** **35**
3.1 Полиноми и рационалне функције . . . 35
3.2 Експоненцијална функција (тригонометријске и хиперболичне тригонометријске функције) . . . 36
3.3 Вишезначне функције . . . 39
3.4 Логаритамска функција . . . 43
3.5 Комплексна степена функција . . . 45
3.6 Инверзне тригонометријске и хиперболичне тригонометријске функције . . . 46

**4 Комплексна интеграција** **49**
4.1 Контура у комплексној равни . . . 49
4.2 Интеграл по контури . . . 52
4.3 Независност интеграла од путање . . . 56
4.4 Кошијева интегрална теорема . . . 59
4.5 Кошијеве интегралне формуле . . . 64
4.6 Оцене аналитичке функције, Принцип максимума модула . . . 69

**5 Аналитичке функције представљене преко степених редова** **73**
5.1 Функционални низови и редови . . . 73
5.2 Тејлоров ред аналитичке функције . . . 75
5.3 Тејлорови и степени редови . . . 79
5.4 Лоранови редови . . . 81

5.5 Нуле и изоловани сингуларитети функције . . . 85
5.5.1 Нуле функције . . . 85
5.5.2 Изоловани сингуларитети функције . . . 86
5.5.3 Тачка $\infty$ . . . 91

**6 Теорија остатака** **93**
6.1 Остатак (резидуум) функције у изолованом сингуларитету . . . 93
6.1.1 Тачка $\infty$ . . . 96
6.2 Примена теорије остатака на решавање реалних интеграла и редова . . . 96
6.2.1 Тригонометријски интеграли . . . 96
6.2.2 Несвојствени интеграли . . . 97
6.2.3 Фуријеова трансформација . . . 99
6.2.4 Лапласова и Мелинова трансформација . . . 102
6.2.5 Бројни редови . . . 105
6.3 Принцип аргумента и Рушеова теорема . . . 107

**7 Аналитичко продужење** **113**
7.1 Шварцов принцип рефлексије . . . 113
7.2 Аналитичко продужење дуж криве . . . 115

**Литература** **120**

# Глава 1

# Комплексна раван

## 1.1 Аритметичка и геометријска својства комплексних бројева

Можемо рећи да је скуп природних бројева, $\mathbb{N}$, био људима познат, барем интуитивно, још од најранијих времена, иако нису познавали математику каква је данас. Разлог да се направи први искорак из скупа природних бројева је била потреба да се реше једначине облика $mx + n = 0,\ m, n \in \mathbb{N}$. Тако се стигло до скупа рационалних бројева $\mathbb{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Даље, решавање осталих полиномних једначина, а посебно облика $x^2 = 2$, где се претпоставља да квадрати морају бити позитивни бројеви, уз одговарајуће комплетирање, доводи до скупа реалних бројева $\mathbb{R}$.

Комплексни бројеви долазе као потреба да се реше једначине облика $x^2 = -5$, односно као скуп у ком све полиномне једначине имају решење. Због тога ће и дефиниције операција на скупу комплексних бројева бити директна проширења операција на скупу реалних бројева. Есенцијални елемент скупа комплексних бројева је број $i$, назван *имагинарна јединица*, уведен теоријски као решење једначине $z^2 = -1$. Важи:

$$i^2 = -1 \qquad \text{или} \qquad \sqrt{-1} = i.$$

Полазећи од ове идеје скуп комплексних бројева се може увести као што ћемо то урадити у овом поглављу. Најављени Основи став алгебре, односно чињеница да су све полиномне једначине са комплексним коефицијентима решиве у скупу комплексних бројева, ће бити доказан нешто касније, Теорема 4.40, када прикупимо довољно резултата потребних за његово доказивање.

**Дефиниција 1.1.** *Комплексан број је израз облика $a+bi$, где су $a, b \in \mathbb{R}$. Два комплексна броја $a+bi$ и $c+di$ су једнака ако и само ако је $a = c$ и $b = d$. Скуп свих комплексних бројева означавамо са $\mathbb{C}$, односно*

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

*Елемент скупа комплексних бројева најчешће обележавамо словом $z$, односно $z = a + bi$.*

Приметимо да степеновањем имагинарне јединице, $i$, добијамо само четири различите вредности и да се оне ређају циклично:

$$i = \sqrt{-1},\ i^2 = -1,\ i^3 = i^2 \cdot i = -i,\ i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1,\ i^5 = i^4 \cdot i = i,\ i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1, \ldots$$

Наиме, важи:

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k, \qquad k \in \mathbb{Z}; \\ i, & n = 4k+1, \qquad k \in \mathbb{Z}; \\ -1, & n = 4k+2, \qquad k \in \mathbb{Z}; \\ -i, & n = 4k+3, \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Операције на скупу комплексних бројева се дефинишу на следећи начин:

1. сабирање:

$$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i;$$

2. множење:

$$(a+bi) \cdot (c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i;$$

3. дељење:

$$\begin{aligned} \frac{a+bi}{c+di} &= \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - (di)^2} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\, i. \end{aligned}$$

Оно што се лако уочава је да су операције сабирања и множења добро дефинисане, комутативне и асоцијативне операције, односно за све $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ важи:

$$\begin{aligned} &z_1 + z_2 \in \mathbb{C}, \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \quad \text{и слично} \\ &z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}, \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \quad z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3. \end{aligned}$$

Неутрални елемент за сабирање је $0$, а за множење $1$. Инверзни елемент за сабирање комплексног броја $z = a + bi$ је $-z = -a - bi$. У односу на множење, за не-нула комплексан број $z = a + bi$, инверзни елемент је $\frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$, јер

$$(a+bi) \cdot \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{(a+bi)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{a^2 - (bi)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

Коначно, важи дистрибутивни закон

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3, \quad z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

Дакле, директно по дефиницији се показује да скуп комплексних бројева са овако дефинисаним операцијама $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ гради поље.

**Дефиниција 1.2.** *За комплексан број $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, кажемо да је $a$ његов реални део и пишемо $a = \operatorname{Re} z$, док се $b$ назива имагинарни део и пишемо $b = \operatorname{Im} z$. Ако је $a = 0$, кажемо да је $z = bi$ чисто имагинаран број.*

Дакле, и реални и имагинарни део комплексног броја $z$ су реални бројеви. Можемо да користимо запис:

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z, \qquad \operatorname{Re} z,\ \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}.$$

**Напомена 1.3.** Напоменимо да поље комплексних бројева $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ није уређено.

Имајући у виду да је $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, покажимо да не постоји природно проширење уређења са скупа реалних бројева $\mathbb{R}$ на скуп комплексних бројева $\mathbb{C}$. Број $i$ није реалан, те је $i \neq 0$. Покажимо да не важи ни $0 < i$ ни $0 > i$, односно да комплексан број $i$ не може да се упореди са $0$.

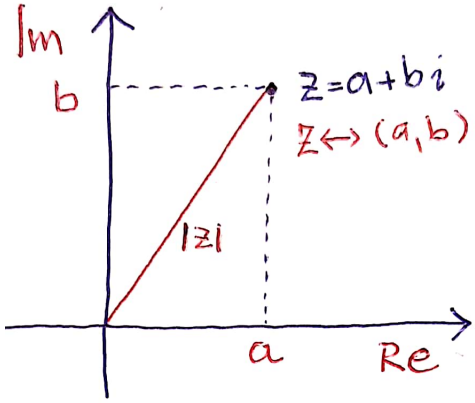
Ако би важило $0 < i$, онда би када обе стране неједнакости помножимо позитивним бројем $i$ неједнакост остала очувана, односно важило би $0 < i^2 = -1$. Међутим, ово није тачно.

С друге стране, ако би $0 > i$, онда би се, када обе стране неједнакости помножимо негативним бројем, неједнакост променила, те би важило $0 < i^2 = -1$. Дакле, опет добијамо контрадикцију. $\square$

Као што смо видели, комплексан број $z \in \mathbb{C}$ је јединствено одређен својим реалним делом $a \in \mathbb{R}$ и својим имагинарним делом $b \in \mathbb{R}$, тако да је $z = a + bi$. Дакле, сваком уређеном пару $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ одговара тачно један комплексан број $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Наведена бијекција нам омогућава да успоставимо бијекцију између еуклидске[1] равни $\mathbb{R}^2$ и скупа комплексних бројева $\mathbb{C}$. Због тога се комплексни бројеви најчешће представљају у равни. Хоризонтална $x-$оса се интерпретира као реална оса и на њој се очитава вредност реалног дела $a$ комплексног броја $z = a + bi$, а вертикална $y-$оса се назива и имагинарна оса и на њој се очитава вредност $b$ имагинарног дела комплексног броја $z = a + bi$.

**Дефиниција 1.4.** *Модуо комплексног броја $z = a + bi \in \mathbb{C}$, у ознаци $|z|$, је његова еуклидска удаљеност од координатног почетка, односно*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$




**Пример 1.5.** Модуо комплексног броја:

- $|i| = |0 + 1 \cdot i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$;
- $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. $\square$

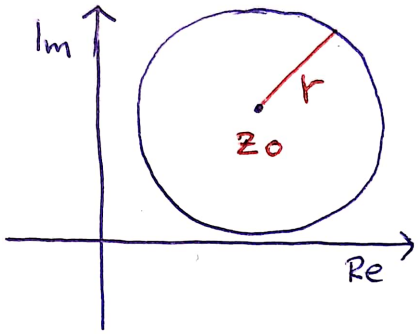
Модуо комплексног броја је увек ненегативан реалан број, односно $|z| \geq 0$ за све $z \in \mathbb{C}$. Важи: $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ и $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$. Ако посматрамо два комплексна броја $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$, видимо да је са $|z_1 - z_2|$ дато еуклидско растојање између тачака $(a, b)$ и $(c, d)$ у равни $\mathbb{R}^2$. Заиста, важи:

$$|z_1 - z_2| = |a + bi - (c + di)| = |(a - c) + (b - d)i| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

На основу тога, ако желимо симболички да опишемо све комплексне бројеве који се од комплексног броја $z_0$ налазе на растојању $r > 0$, рећи ћемо да су то такви комплексни бројеви $z$ за које важи $|z - z_0| = r$. Користићемо следеће ознаке:

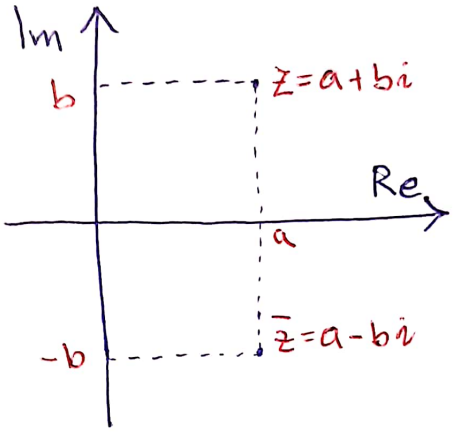
[1] Еуклид из Александрије (3. век пре нове ере) - антички математичар, зачетник геометрије

$S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$
je сфера (кружница) у комплексној равни $\mathbb{C}$;
$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$
је *отворена* лопта (круг, диск) у комплексној равни $\mathbb{C}$.




**Дефиниција 1.6.** *Број симетричан у односу на реалну осу комплексном броју $z = a + bi \in \mathbb{C}$ се назива коњугован комплексан број, и означава са $\bar{z}$. Важи:*

$$z = a + bi \qquad \Leftrightarrow \qquad \bar{z} = a - bi.$$




- операција коњугације се добро слаже и са сабирањем и са множењем, односно за све $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ важи:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

- $\overline{(\bar{z})} = z, \quad z \in \mathbb{C};$
- $|\bar{z}| = |z|, \quad z \in \mathbb{C};$
- $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ и $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$

Један од врло корисних идентитета је:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

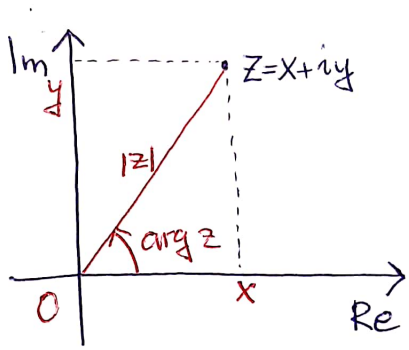
Заиста, нека је $z = a + bi \in \mathbb{C}$, тада важи:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Директно се добија, употребом особина еуклидске метрике, да за модуо важе неједнакости троугла:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad \text{и} \qquad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

Тригонометријски запис комплексног броја $z = a + bi \in \mathbb{C}$ добијамо употребом поларних координата тачке $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Нека је сад комплексан број $z$ дат са $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Већ смо видели да је његова удаљеност од координатног почетка дата са $|z|$. Аргумент броја $z$, што означавамо са $\arg z$, је угао који полуправа $Oz$ гради са позитивним делом реалне осе. Важи:



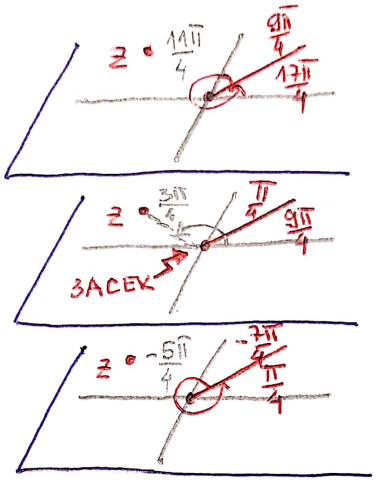

- $x = |z|\cos(\arg z)$ и $y = |z|\sin(\arg z)$;
- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ и "$\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$" (ако је $\arg z \in (-\pi/2, \pi/2)$, иначе треба додати $\pi$);
- $z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)),\ z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Приметимо да је алгебарски запис комплексног броја $z = x + iy \in \mathbb{C}$, где је $x, y \in \mathbb{R}$, погодан за све комплексне бројеве и да постоји бијекција између $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{C}$. С друге стране, тригонометријски облик $z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))$, где је $|z| \geq 0$ и $\arg z \in \mathbb{R}$, није погодан за представљање комплексног броја 0, јер није јасно који угао полуправа $O0$ гради са позитивним делом реалне осе. Додатно, тригонометријски запис није јединствен, јер је

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)) = |z|(\cos(\arg z + 2k\pi) + i\sin(\arg z + 2k\pi)), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Ако бисмо желели да имамо јединствено представљање комплексног броја у тригонометријском облику морали бисмо да ограничимо скуп ком припада аргумент на интервал дужине $2\pi$, на пример $\arg z \in [0, 2\pi)$ или $\arg z \in (-\pi, \pi]$ и слично. Међутим, ово ограничење би имплицирало губљење неких важних особина функције аргумента, посебно издвајамо: $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ (видети (1.1)). Сем тога, овакво вишезначно представљање комплексног броја је понекад веома корисно јер детектује сва решења одређене једначине, као што су оне које укључују корен. Ову чињеницу ћемо ускоро и прецизирати.

Када је неопходно да прецизирамо који угао, односно аргумент, ћемо придружити комплексном броју $z$, или ако желимо да му придружимо све могуће презентације истовремено, користимо (систем) *Риманове*[2] *површи*.




Риманове површи су заправо систем од бесконачно много еуклидских равни, при чему се са једне на другу прелази кроз засеке (као на слици). *Засек* је полуправа која креће из координатног почетка и иде у било ком правцу. Засек се у свим равнима налази на истом месту. Тачка из које засек креће, у овом случају нула, се назива *тачка гранања*. Свака раван обухвата опсег аргумента у дужини од $2\pi$. На пример, ако је засек под углом од $\pi/4$ у односу на позитивни део реалне осе, онда је једна раван од $\pi/4$ до $9\pi/4$, друга од $9\pi/4$ до $17\pi/4$, нека опет друга од $-7\pi/4$ до $\pi/4$, итд.

[2]Георг Фридрих Бернхард Риман (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866) - немачки математичар

Да бисмо направили разлику, у будуће ћемо *вишезначну функцију аргумента,* ону која тачки $z$ додељује скуп вредности $\{\varphi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, свих могућих начина да се каже који угао она гради са позитивним делом реалне осе, обележавати великим почетним словом "$\mathrm{Arg}$". Ознаку "$\mathrm{arg}$", са малим почетним словом, ћемо користити за *главну грану*, односно једнозначну (класичну) функцију која комплексном броју $z$ придружује угао из једног унапред одређеног опсега дужине $2\pi$. Најчешће је то интервал $(-\pi, \pi]$ или $[0, 2\pi)$, али може бити и било који други $(\tau, \tau + 2\pi],\ \tau \in \mathbb{R}$. Ако и то желимо да нагласимо, одакле креће главни интервал, ставићемо $\tau$ у индекс, $\mathrm{arg}_\tau$ и $\mathrm{Arg}_\tau$ . Такође, приметите да смо користили интервале затворене како са леве, тако и са десне стране, због уобичајених конвенција. Међутим, то неће бити препрека за наставак рада, као што ћемо ускоро видети. Дакле, важи:

$$\mathrm{Arg}_\tau\, z = \mathrm{arg}_\tau\, z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad \text{где је} \quad \mathrm{arg}_\tau\, z \in (\tau, \tau + 2\pi].$$

**Пример 1.7.** Погледајмо како бисмо одредили аргумент броја $-i$ у неким од могућих случајева:

- ако бисмо за основни интервал бирали $[0, 2\pi)$, онда би важило:

$$\mathrm{arg}_0(-i) = \frac{3\pi}{2} \in [0, 2\pi), \qquad \mathrm{Arg}_0(-i) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$$

- док, ако за основни интервал бирамо $(-\pi, \pi]$, онда важи:

$$\mathrm{arg}_{-\pi}(-i) = -\frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi], \qquad \mathrm{Arg}_{-\pi}(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Приметимо да је у оба случаја скуп вредности $\mathrm{Arg}(-i)$ исти, а да се разликује само вредност главне гране. Зато се врло ретко истиче вредност $\tau$, сем ако то није посебно важно. У комплексној анализи је уобичајено да се за главну грану користи интервал $(-\pi, \pi]$. $\square$

Веома практичан начин за представљање комплексног броја је његов експоненцијални запис, односно

$$z = |z|e^{i\,\mathrm{arg}\,z} = |z|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Да бисмо ово показали, потребно је да докажемо да важи Ојлерова[3] формула:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Наведена једначина се први пут појавила у књизи "Introductio" Леонарда Ојлера, по коме је и добила име, објављеној у Лозани, Швајцарска. У наставку ћемо представити један од могућих начина да се Ојлерова формула изведе.

Полазећи од реалне експоненцијалне функције $e^x,\ x \in \mathbb{R}$, дефинишимо комплексну експоненцијалну функцију $f(z) = e^z,\ z \in \mathbb{C}$. Прво, функција $f$ када се примени на реалан број $z = x + 0i$ треба да буде једнака реалној експоненцијалној функцији, односно $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$. Затим, комплексна експоненцијална функција треба да задовољава правило сабирања степена, односно $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2},\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ово имплицира

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

[3] Леонард Ојлер (Leonhard Euler, 1707–1783) - швајцарски математичар и физичар

С обзиром да је први део $e^x,\ x \in \mathbb{R}$ познат, остаје још да откријемо шта је $e^{iy},\ y \in \mathbb{R}$. Трећа ствар која је карактеристична за експоненцијалну функцију је да јој је извод опет експоненцијална фунција, односно $(d/dz)e^z = e^z,\ z \in \mathbb{C}$. Међутим, ми још увек не знамо како се врши диференцирање комплексних функција, али овде је довољно да одредимо $(d/d(iy))e^{iy} = e^{iy},\ y \in \mathbb{R}$. Важи:

$$\frac{de^{iy}}{d(iy)} = e^{iy} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{de^{iy}}{dy}}{\frac{d(iy)}{dy}} = e^{iy} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{de^{iy}}{dy} = ie^{iy}.$$

Даље, други извод по променљивој $y$ је

$$\frac{d^2e^{iy}}{dy^2} = \frac{d}{dy}(ie^{iy}) = i^2e^{iy} = -e^{iy}.$$

Ако обележимо са $g(y) = e^{iy},\ y \in \mathbb{R}$, знамо да је функција $g$ таква да

$$\begin{aligned} &g''(y) = -g(y) \\ &g(0) = 1,\ g'(0) = ig(0) = i. \end{aligned}$$

Познато је да је решење ове диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентима облика $g(y) = e^{iy} = A\cos y + B\sin y,\ y \in \mathbb{R}$. Користећи и дате почетне услове добијамо да је $A = 1$ и $B = i$, односно добијамо $g(y) = \cos y + i\sin y$, а то је баш Ојлерова формула:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

За $y = \pi$ Ојлерова формула постаје познати Ојлеров идентитет: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Полазећи од тригонометријског записа, сада директно добијамо експоненцијални облик комплексног броја:

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)) = |z|e^{i\arg z} = |z|e^{i\operatorname{Arg} z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Видимо да експоненцијални запис, као и тригонометријски, није јединствен. На пример, $i = 1 \cdot e^{(\pi/2)i} = 1 \cdot e^{(5\pi/2)i},\ 1 = 1 \cdot e^{0i} = 1 \cdot e^{2\pi i},\ -1 = 1 \cdot e^{\pi i} = 1 \cdot e^{-\pi i}$, и слично.

**Напомена 1.8.** Пре него што наставимо да поновимо, сваки комплексан број $z \in \mathbb{C}$ може да се представи на јединствен начин у *алгебарском облику*:

$$z = x + iy, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

и постоји бијекција између $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$. Са друге стране, понекад је врло корисно користити *тригонометријски и експоненцијални запис* комплексног броја, али он није јединствен и не укључује тачку $z = 0$. Тада за сваки комплексан број $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ постоји (јединствено) $r > 0$ и (бесконачно много) $\varphi \in \mathbb{R}$ тако да је

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)) = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi+2k\pi)}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

где је $r = |z|$ и $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. Дакле, комплексан број $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ је онај број који се налази у пресеку кружнице полупречника $r$ са центром у координатном почетку и полуправе која исходи из координатног почетка и гради угао $\varphi$ са позитивним делом реалне осе. Пресликавање из $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ такво да $(r, \varphi)$ слика у $z = re^{i\varphi}$ јесте сирјекција, али није инјекција; тачније, слика ће прекрити целу комплексну раван (без нуле), али ће свака слика имати бесконачно много оригинала.

Даље, комплексни бројеви $e^{iy},\ y \in \mathbb{R}$ су унимодуларни, односно тачке на јединичној кружници у комплексној равни, јер је

$$|e^{iy}| = |\cos y + i \sin y| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1.$$

Приметимо да важи:

$$|z_1 z_2| e^{i \operatorname{Arg}(z_1 z_2)} = z_1 \cdot z_2 = |z_1| e^{i \operatorname{Arg} z_1} |z_2| e^{i \operatorname{Arg} z_2} = |z_1||z_2| e^{i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2)}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Одавде, сем већ познатог идентитета $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, добијамо и

$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

Нагласимо да овај идентитет не би важио за главне гране $\arg$, јер може да се деси, на пример, да је $\arg z_1, \arg z_2 = \frac{3\pi}{4} \in (-\pi, \pi]$, па би онда требало $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 = \frac{6\pi}{4}$, али он није из интервала $(-\pi, \pi]$. Такође, сада се лакше уочавају и неке изометријске трансформације:

$$iz = e^{i\pi/2}|z|e^{i \arg z} = |z|e^{i(\pi/2 + \arg z)} \qquad \text{ротација за угао } \frac{\pi}{2},$$
$$\bar{z} = |z|e^{-i \arg z} \qquad \text{симетрија у односу на } x-\text{осу}.$$

Коначно, одмах добијамо познату Моаврову[4] формулу:

$$(\cos x + i \sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

Напоменимо одмах да Моаврова формула важи само за степене $n \in \mathbb{N}$, јер су у комплексној анализи рационални степени, односно корени, па и сви остали степени, вишезначне функције. У наставку ћемо то и показати.

Степена функција $z^n,\ n \in \mathbb{N}_0$ је класична (једнозначна функција). Важи:

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \quad r \geq 0,\ \varphi \in \mathbb{R},$$

али и свака друга експоненцијална презентација комплексног броја $z$ би дала исту вредност, јер важи:

$$z^n = \left(re^{i(\varphi + 2k\pi)}\right)^n = r^n e^{i(n\varphi + 2nk\pi)} = r^n e^{in\varphi}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad r \geq 0,\ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Међутим, корена функција $z^{1/m},\ m \in \mathbb{N}$ је вишезначна функција. Наиме, важи:

$$z^{1/m} = \left(re^{i(\varphi + 2k\pi)}\right)^{1/m} = r^{\frac{1}{m}} e^{i\,\frac{\varphi + 2k\pi}{m}} = r^{\frac{1}{m}} e^{i\,\frac{\varphi}{m}} e^{i\,\frac{2k\pi}{m}}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad r \geq 0,\ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Одавде видимо да ћемо, на пример, за $k = 0, 1, \ldots, m-1$ добити различите вредности функције $z^{1/m}$, а за остале $k$ ће се вредности понављати. Дакле, функција $m-$тог корена у комплексној анализи за свако $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ даје $m$ различитих вредности.

[4] Абрам де Моавр (Abraham de Moivre, 1667–1754) - француски математичар

**Пример 1.9.** • За разлику од реалне анализе, где је договорено да је корен позитивног броја увек позитиван број, у комплексној анализи квадратни корен је скуп од две вредности, и то свих оних комплексних бројева који када се квадрирају дају дати број. Важи:

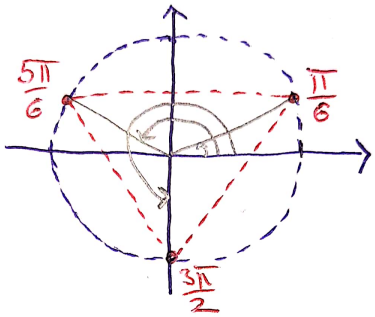
$$\sqrt{1} = \left(e^{2k\pi i}\right)^{1/2} = e^{k\pi i},\ k = 0, 1,$$

односно $\sqrt{1} = \{e^{0i}, e^{\pi i}\} = \{1, -1\}$.

• $m-$ти корени комплексног броја $z = re^{i\varphi}$ су тачке које се налазе на кружници полупречника $r^{1/m}$ и граде правилан $m-$тоугао. На пример, вредности $\sqrt[3]{i}$ ће бити:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{i} &= \left\{\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right)^{1/3} \,\middle|\, k = 0, 1, 2\right\} \\ &= \left\{e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \,\middle|\, k = 0, 1, 2\right\} = \left\{e^{i\,\frac{\pi}{6}}, e^{i\,\frac{5\pi}{6}}, e^{i\,\frac{3\pi}{2}}\right\},\end{aligned}$$

које када се нацртају граде правилан троугао уписан у јединичну кружницу.



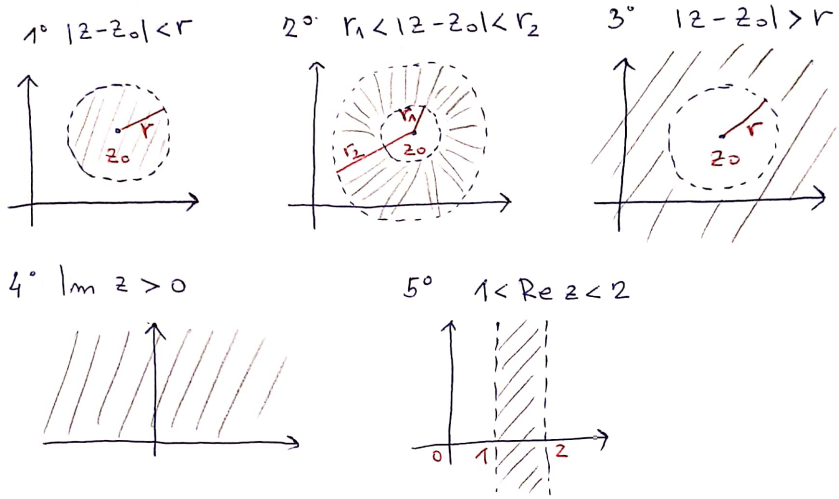

□

## 1.2 Тополошке карактеристике комплексне равни

Као што смо већ истакли, један од модела за представљање простора комплексних бројева је еуклидска раван, где се метрика у скупу комплексних бројева подудара са еуклидском метриком у равни. Дакле, сви тополошки појмови које ћемо овде навести, ради комплетности излагања, су већ познати тополошки појмови еуклидске равни.

*Околина тачке* $z_0$ је свака отворена лопта $B(z_0, r),\ r > 0$. Кажемо да је $z_0$ *унутрашња тачка скупа* $A \subseteq \mathbb{C}$ ако постоји $r > 0$ тако да је $B(z_0, r) \subseteq A$. *Скуп* $A \subseteq \mathbb{C}$ је *отворен* ако и само ако је свако $z \in A$ унутрашња тачка скупа $A$.

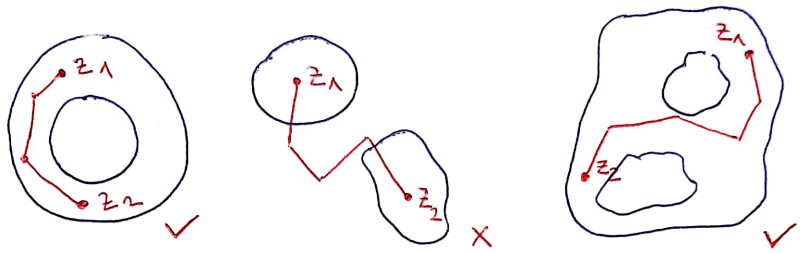
**Пример 1.10.** На цртежу су дати примери отворених скупова.



□

Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{C}$ дате тачке и $l_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$ дужи које спајају тачке $a_k$ и $a_{k+1}$. Унија дужи $l_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$ се назива *полигонална линија*. Скуп $A \subseteq \mathbb{C}$ је *повезан*[5] ако за свако $z_1, z_2 \in A$ постоји полигонална линија која их спаја и цела лежи у $A$.

**Пример 1.11.** Први и трећи пример скупа на цртежу је повезан док други није.



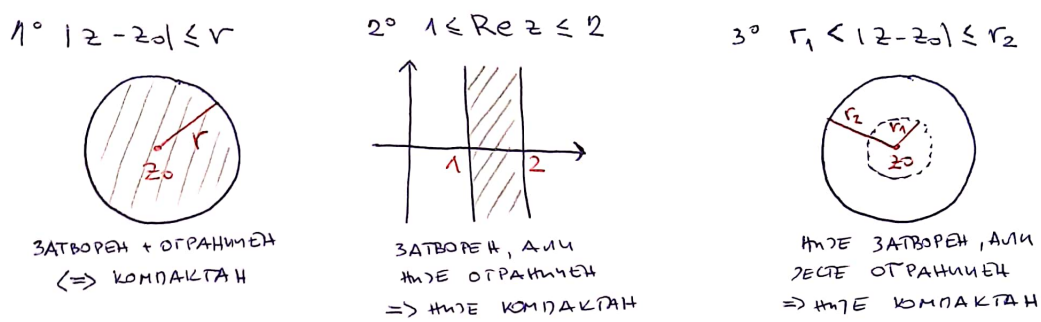

□

**Дефиниција 1.12.** *Област је отворен и повезан скуп.*

Тачка $z_0 \in \mathbb{C}$ је *рубна тачка* скупа $A \subseteq \mathbb{C}$ ако свака околина тачке $z_0$ сече и $A$ и $\mathbb{C} \setminus A$. Тачка $z_0 \in \mathbb{C}$ је *тачка нагомилавања* скупа $A \subseteq \mathbb{C}$ ако постоји низ $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ тако да је $z_n \neq z_0,\ n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. *Скуп* $A$ је *затворен* ако и само ако је комплемент отвореног скупа; или ако и само ако садржи све своје рубне тачке; или ако и само ако садржи све своје тачке нагомилавања.

*Скуп* $A$ је *ограничен* ако постоји $R > 0$ тако да је $A \subseteq B(0, R)$. Као и у реалној анализи може се показати да је скуп $A \subseteq \mathbb{C}$ *компактан* ако и само ако је затворен и ограничен; или ако и само ако сваки низ у $A$ има конвергентан подниз у $A$; или ако и само ако сваки отворени покривач $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ од $A$, односно $A \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$, има коначан потпокривач, односно $A \subseteq \bigcup_{i\in\{1,\ldots,k\}} O_{\lambda_i}$.

**Пример 1.13.** Примери компактних скупова и оних који то нису.




□

На крају, навешћемо и теорему о низу уметнутих компактних скупова, Канторов[6] принцип, која ће бити коришћена у наставку излагања. За ограничен скуп $A \subseteq \mathbb{C}$, *дијаметар скупа* $A$ се дефинише на следећи начин: $\operatorname{diam}(A) = \sup_{z,w\in A} |z - w|$.

[5]Општа топологија разликује појмове повезаности, лучне повезаности и полигоналне повезаности, али код отворених скупова су ови појмови еквивалентни.

[6]Георг Кантор (Georg Cantor, 1845–1918) - немачки математичар и утемељивач теорије скупова

**Теорема 1.14** (Канторов принцип)**.** *Нека је* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \ldots$ *опадајући низ непразних компактних скупова, таквих да* $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$ *када* $n \to \infty$. *Тада постоји јединствена тачка* $w \in \mathbb{C}$ *таква да је* $w \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

## 1.3 Конвергенција у комплексној равни

У овом поглављу испитујемо конвергенцију и граничне вредности комплексних бројних низова и редова. Скуп комплесних бројева $\mathbb{C}$ ћемо посматрати као метрички простор са метриком $|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2},\ z \in \mathbb{C}$, која се, као што смо већ навели, поклапа са еуклидском метриком у равни.

### 1.3.1 Комплексни бројни низови

**Дефиниција 1.15.** *За низ комплексних бројева* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *кажемо да конвергира ка* $z_0 \in \mathbb{C}$, *и пишемо*

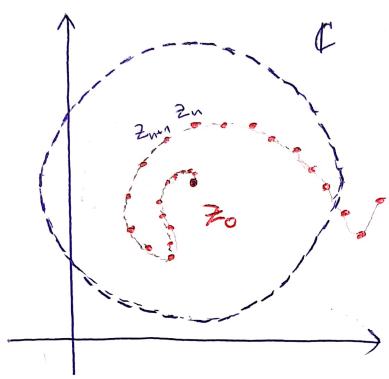
$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0,$$

*ако и само ако важи:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) \quad |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

*Специјално, пишемо*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) \quad |z_n| > M.$$




Комплексну раван смо, између осталог, моделовали и еуклидском равни $\mathbb{R}^2$. Имајући то у виду, као и у реалној анализи, морамо увек имати на уму да конвергентан низ комплексних бројева $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ може да прилази својој граници $z_0$ из разних праваца.

**Пример 1.16.** Аналогно као у реалној анализи може се показати да важи:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \text{не постоји}, & |q| = 1,\ q \neq 1 \\ \infty, & |q| > 1. \end{cases}$$

На пример, могу се показати следеће граничне вредности.

1. Важи $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{i}{3}\right)^n = 0$. Треба показати

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) \quad \left|\left(\frac{i}{3}\right)^n - 0\right| = \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

Заиста, ако за дато $\varepsilon > 0$, изаберемо да је $n_0 = [\log_{1/3}\varepsilon] + 1$, добијамо да за $n > n_0$ важи $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^{n_0}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{1/3}\varepsilon} = \varepsilon$.

2. Граница низа $\{i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не постоји. Посматрани низ је периодичан и то тако да се секвенца од четири различита броја $i, -1-i, 1$ непрестано понавља:

$$\underbrace{i,-1,-i,1}, \underbrace{i,-1,-i,1}, \underbrace{i,-1,-i,1}, \underbrace{i,-1,-i,1}, \ldots$$

Јасно, ни један комплексан број нема особину да се у његовој околини налазе сви (сем евентуално коначно много) чланови овог низа.

3. Важи $\lim_{n\to\infty}(1+6i)^n = \infty$. Треба показати

$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) \quad |(1+6i)^n| = \left(\sqrt{37}\right)^n > M.$$

Нека је дато $M > 0$. Ако је $n_0 = [\log_{\sqrt{37}} M] + 1$, тада за $n > n_0$ важи $\left(\sqrt{37}\right)^n > \left(\sqrt{37}\right)^{n_0} > \left(\sqrt{37}\right)^{\log_{\sqrt{37}} M} = M$. □

**Напомена 1.17.** Нека је дат низ комплексних бројева $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n + iy_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Испитивање граничне вредности *низа комплексних бројева* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ може да се сведе на испитивање граничних вредности *низова реалних бројева* који настају од реалних $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и имагинарних делова $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ чланова овог низа. Наиме, важи:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = w_0 = u_0 + iv_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = u_0 \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} y_n = v_0.$$

($\Rightarrow$) Нека је дато $\varepsilon > 0$. Тада из $\lim_{n\to\infty} z_n = w_0$ следи да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за све $n > n_0$ важи $|z_n - w_0| < \varepsilon$. Одавде одмах добијамо да за $n > n_0$ важи:

$$|x_n - u_0| \le |x_n - u_0 + i(y_n - v_0)| = |z_n - w_0| < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = u_0;$$
$$|y_n - v_0| \le |x_n - u_0 + i(y_n - v_0)| = |z_n - w_0| < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = v_0.$$

($\Leftarrow$) Нека је дато $\varepsilon > 0$. Тада из $\lim_{n\to\infty} x_n = u_0$ постоји $n_1 \in \mathbb{N}$ тако да за $n > n_1$ важи $|x_n - u_0| < \varepsilon/2$ и из $\lim_{n\to\infty} y_n = v_0$ постоји $n_2 \in \mathbb{N}$ тако да за $n > n_2$ важи $|y_n - v_0| < \varepsilon/2$. Сада за $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ и $n > n_0$ важи:

$$\begin{aligned}|z_n - w_0| &= |x_n + iy_n - (u_0 + iv_0)| = |x_n - u_0 + i(y_n - v_0)| \\ &\le |x_n - u_0| + |y_n - v_0| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$ □

Како понекад није лако идентификовати граничну вредност низа и тако испитати конвергенцију низа, корисно је имати и други критеријум за потврђивање конвергенције низа, који користи само елементе самог низа.

**Дефиниција 1.18.** *Низ комплексних бројева* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *називамо Кошијев*[7] *низ ако и само ако важи:*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n > n_0) \quad |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Имајући у виду Напомену 1.17, као и истоветност Кошијевог и конвергентног низа на реалној правој, закључујемо да су комплексни Кошијеви низови истовремено и конвергентни. Тачније, важи наредно тврђење.

**Теорема 1.19** (Кошијев критеријум конвергенције низова)**.** *Низ комплексних бројева је конвергентан ако и само ако је Кошијев.*

Одавде директно добијамо следећу теорему.

**Теорема 1.20.** *Скуп комплесних бројева* $\mathbb{C}$ *је комплетан.*

### 1.3.2 Комплексни бројни редови

**Дефиниција 1.21.** *Ред је формални запис облика* $c_0 + c_1 + \cdots + c_n + \ldots$, *или еквивалентно* $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$, *где су* $c_j$ *комплексни бројеви. Ознака* $s_n,\ n \in \mathbb{N}$ *се користи за суму првих* $n+1$ *чланова посматраног реда,* $s_n = \sum_{j=0}^{n} c_j$, *и назива* $n-$*та парцијална сума датог реда. Ако низ парцијалних сума* $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *има граничну вредност* $s$, *онда за дати ред кажемо да је конвергентан, и пишемо* $s = \sum_{j=0}^{\infty} c_j$; *иначе, за дати ред кажемо да је дивергентан.*

**Лема 1.22.** *Нека је* $c \in \mathbb{C}$ *произвољан комплексан број. Геометријски ред* $\sum_{j=0}^{\infty} c^j$ *је конвергентан за* $|c| < 1$, *односно важи:*

$$1 + c + c^2 + \cdots + c^j + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} c^j = \frac{1}{1-c} \quad \textit{за} \quad |c| < 1.$$

*За* $|c| \geq 1$ *геометријски ред дивергира.*

***Доказ.*** Приметимо прво да је:

$$(1-c)\left(1 + c + c^2 + \cdots + c^n\right) = 1 + c + c^2 + \cdots + c^n - c - c^2 - c^3 - \cdots - c^{n+1} = 1 - c^{n+1}.$$

Даље, имајући претходну једнакост у виду, важи:

$$\frac{1}{1-c} - \left(1 + c + c^2 + \cdots + c^n\right) = \frac{c^{n+1}}{1-c}.$$

Треба да покажемо да је низ парцијалних сума конвергентан, или прецизније, да је

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + c + c^2 + \cdots + c^n\right) = \frac{1}{1-c} \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-c} - \left(1 + c + c^2 + \cdots + c^n\right)\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{c^{n+1}}{1-c} = \frac{1}{1-c}\lim_{n\to\infty} c^{n+1} = 0.\end{aligned}$$

Сада тврђење теореме директно следи на основу чињенице да геометријски низ конвергира ка нули једино за $|c| < 1$, Пример 1.16. □

[7] Огистен-Луј Коши (Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857) - француски математичар, инжењер и физичар

У наставку ћемо навести неколико корисних метода за испитивање конвергенције комплексних бројних редова користећи већ познате резултате, углавном из реалне анализе. Теореме углавном нећемо доказивати, јер су докази аналогни онима у реалној анализи.

Применом Кошијевог критеријума за конвергенцију низова, Теорема 1.19, на низ парцијалних сума датог бројног реда, добијамо следећу теорему.

**Теорема 1.23.** *Потребан и довољан услов да ред комплексних бројева $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ конвергира је да*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m > n > n_0) \quad \left| \sum_{j=n+1}^{m} c_j \right| < \varepsilon.$$

**Теорема 1.24** (Упоредни тест)**.** *Нека је $j_0 \in \mathbb{N}_0$ и нека за чланове комплексног бројног реда $c_j,\ j \in \mathbb{N}_0$ важи:*

$$|c_j| \leq M_j, \quad j \geq j_0.$$

*Ако је (позитивни реални бројни) ред $\sum_{j=j_0}^{\infty} M_j$ конвергентан, онда је конвергентан и (комплексни бројни) ред $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$.*

За ред $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ кажемо да је апсолутно конвергентан ако је конвергентан ред $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|$. Употребом упоредног критеријума за конвергенцију, директно добијамо да је сваки апсолутно конвергентан ред и сам конвергентан.

**Теорема 1.25** (Количнички или Даламберов[8] тест)**.** *Нека за чланове реда $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ важи:*

$$\limsup_{j\to\infty} \left| \frac{c_{j+1}}{c_j} \right| = L.$$

*Дати ред $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ за $L < 1$ конвергира, за $L > 1$ дивергира. За случај када је $L = 1$ тест је неодлучан, односно постоје примери и конвергентних и дивергентних редова.*

У случају када је $L = 1$, може се применити Раабеов[9] тест.

**Теорема 1.26** (Раабеов тест)**.** *Нека за чланове реда $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ важи:*

$$\limsup_{j\to\infty} \left[ j \left( \left| \frac{c_j}{c_{j+1}} \right| - 1 \right) \right] = L.$$

*Дати ред $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ за $L > 1$ конвергира, за $L < 1$ дивергира. За случај када је $L = 1$ тест је неодлучан.*

**Теорема 1.27** (Корени или Кошијев тест)**.** *Нека за чланове реда $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ важи:*

$$\limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|} = L.$$

*Дати ред $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ за $L < 1$ конвергира, за $L > 1$ дивергира. За случај када је $L = 1$ тест је неодлучан, односно постоје примери и конвергентних и дивергентних редова.*

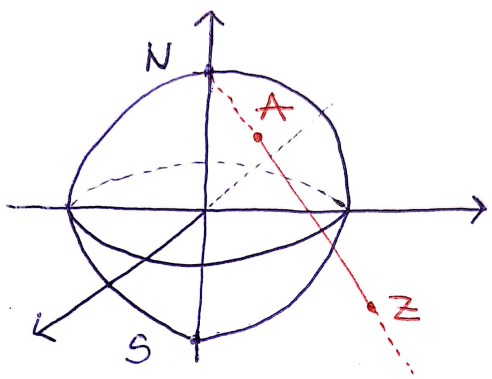
[8] Жан Батист ле Ронд д'Аламбер (Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, 1717–1783) - француски математичар, бавио се и механиком, физиком, филозофијом и теоријом музике

[9] Јосеф Лудвиг Рабе (Joseph Ludwig Raabe, 1801 – 1859) - швајцарски математичар

## 1.4 Риманова сфера и стереографска пројекција

Сем еуклидском равни $\mathbb{R}^2$, поље комплексних бројева $\mathbb{C}$ се моделује и Римановом сфером $\mathcal{S}$. Бијективно пресликавање између Риманове сфере и еуклидске равни се назива *стереографска пројекција*.

Риманова сфера је сфера у простору без једне тачке, а овде ћемо бирати да је то јединична сфера у простору без северног пола $N(0,0,1)$. За еуклидски модел комплексних бројева ћемо узети координатну $xy-$раван. Стереографска пројекција је пресликавање које тачки $A \in \mathcal{S}$ додељује тачку $z \in \mathbb{R}^2$ тако да је $z$ пресек $xy-$равни и полуправе $pp(N, A)$, и обрнуто.




Прво што уочавамо је да се тачке са екватора сликају саме на себе. Затим, тачке са северне полулопте се сликају у спољашњост кружнице $|z| = 1$, односно екватора, а тачке са јужне полулопте у унутрашњост кружнице $|z| = 1$.
Нека тачка $A \in \mathcal{S}$ има просторне координате $A(u, v, w)$. Тада важи $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. Нека се тачка $A \in \mathcal{S}$ слика у тачку $z(a, b) \in \mathbb{R}^2$, и обрнуто. Напоменимо да тачка $z$ када се посматра у простору има координате $z(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Претпоставимо прво да је дата тачка $z$ и да треба да одредимо тачку $A$. Тачке са полуправе $pp(N, z)$, где је $N(0,0,1)$ и $z(a, b, 0)$, су облика

$$pp(N, z) = \{(at, bt, 1 - t) \mid t \geq 0\}.$$

Коначно тачка $A$ је пресек сфере $\mathcal{S}$ и полуправе $pp(N, z)$, те важи:

$$\begin{aligned} (at)^2 + (bt)^2 + (1-t)^2 &= 1 \\ t^2(a^2 + b^2 + 1) + 1 - 2t &= 1 \\ t^2(a^2 + b^2 + 1) &= 2t \\ t = 0 \quad \vee \quad t = \frac{2}{a^2 + b^2 + 1} &= \frac{2}{|z|^2 + 1} \end{aligned}$$

За $t = 0$ добијамо тачку $N(0,0,1)$, а она није тражено решење, тако да се тачка $A$ добија за $t = 2/(|z|^2 + 1)$. Важи:

$$A\left(a\,\frac{2}{|z|^2+1}, b\,\frac{2}{|z|^2+1}, 1 - \frac{2}{|z|^2+1}\right),$$

односно

$$A\left(\frac{2\,\mathrm{Re}\,z}{|z|^2+1}, \frac{2\,\mathrm{Im}\,z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right). \tag{1.2}$$

Обрнуто, ако је дата тачка $A(u, v, w) \in \mathcal{S}$, с обзиром да и $A \in pp(N, z)$, тачку $z(a, b, 0)$ добијамо из система:

$$at = u \qquad \wedge \qquad bt = v \qquad \wedge \qquad 1 - t = w,$$

одакле је

$$z\left(\frac{u}{1-w}, \frac{v}{1-w}, 0\right).$$

Видели смо да се тачке са екватора стереографском пројекцијом сликају саме на себе. Јужни пол $S(0,0,-1)$ се слика у координатни почетак, а северни $N(0,0,1)$ нема слику. Међутим, тачке $A$ које теже ка $N$ се сликају у тачке $z$ такве да $|z| \to \infty$. Због тога се каже да је $N$ слика $\infty$ из проширене комплексне равни $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. На овај начин би се могла успоставити бијекција између целе сфере $\mathcal{S} \cup \{N\}$ и проширене комплексне равни $\hat{\mathbb{C}}$. Околина тачке $N$ на сфери је калота око тачке $N$, а њена стереографска пројекција је спољашњост кружнице $|z| = R$ за неко велико $R$. Користећи ово као мотивацију, у комплексној анализи бесконачно далеке тачке се третирају као један елемент, који се означава са $\infty$, а околине елемента $\infty$ су отворени скупови: $|z| > R,\ R > 0$.

# Глава 2

# Функције комплексне променљиве

Централни појам комплексне анализе је *функција комплексне променљиве са вредностима у комплексној равни*, наиме

$$\begin{aligned} f:\ D_f \subseteq \mathbb{C} &\to D'_f \subseteq \mathbb{C} \\ w = f(z), &\quad z \in D_f. \end{aligned}$$

**Пример 2.1.** $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z^2+1},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}.$ □

Како су и оригинал $z$ и слика $w$ комплексни бројеви, можемо их видети као $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ и $w = u + iv,\ u, v \in \mathbb{R}$. Функција $f$ се сада може написати у облику

$$f(z) = f(x+iy) = w = u(x,y) + iv(x,y), \quad z \in D_f \subset \mathbb{C},$$

где су $u, v : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ реалне функције.

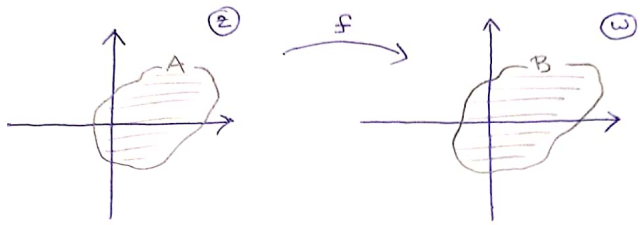
**Пример 2.2.** Нека је $w = f(z) = z^2 + 2z,\ z \in \mathbb{C}$. Тада је

$$\begin{aligned} w = f(z) = f(x+iy) &= (x+iy)^2 + 2(x+iy) = x^2 + 2ixy - y^2 + 2x + 2iy \\ &= (x^2 - y^2 + 2x) + i(2xy + 2y), \end{aligned}$$

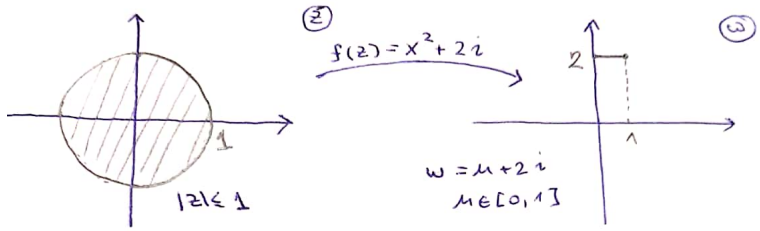
одакле добијамо

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x \quad \wedge \quad v(x,y) = 2xy + 2y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$ □

С обзиром да за представљање комплексног броја $z$ користимо раван $\mathbb{R}^2$, за цртање графика комплексне функције $w = f(z),\ z \in D_f \subset \mathbb{C}$ би нам требао 4-димензионални простор $\mathbb{R}^4$. Овај проблем се понекад превазилази тако што се четврта димензија представља бојом, али ми ћемо овде одвојено цртати домен и кодомен, сваки у својој комплексној равни.

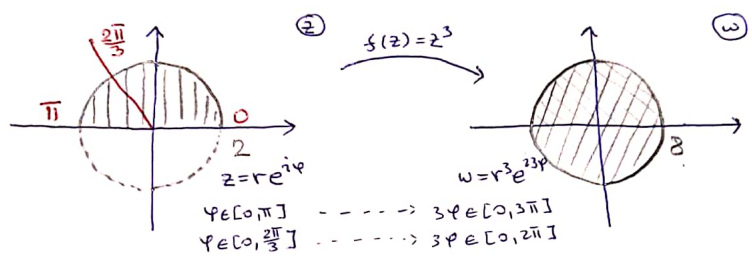


**Пример 2.3.** Графички представити функцију $f(z) = f(x+iy) = x^2 + 2i,\ |z| \leq 1$. Уочимо најпре, да је $u(x,y) = x^2$ и $v(x,y) = 2$; затим, када је $|z| \leq 1$ онда је $x \in [-1,1]$, те је $u(x,y) = x^2 \in [0,1]$.



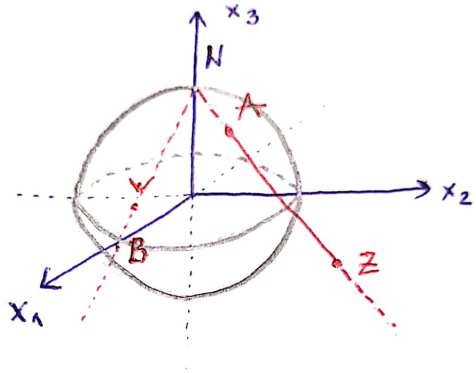

□

**Пример 2.4.** Графички представити функцију $f(z) = z^3,\ |z| \leq 2,\ \operatorname{Im} z \geq 0$. У овом случају, корисно је $z$ писати у експоненцијалном облику, па су тачке домена облика $z = re^{i\varphi},\ r \in [0,2],\ \varphi \in [0,\pi]$. Слике $w$ су тада облика $w = \rho e^{i\phi} = (re^{i\varphi})^3 = r^3 e^{i3\varphi},\ r \in [0,2],\ \varphi \in [0,\pi]$. Дакле, важи $\rho \in [0,8]$ и $\phi \in [0,3\pi]$.




Приметимо да овако дефинисана функција није бијекција, јер тачке изнад реалне осе у кодомену имају по два оригинала. Да би функција $f$ била бијекција неопходно је рестриковати домен на скуп $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2,\ \arg z \in [0, \frac{2\pi}{3})\}$. □

**Пример 2.5.** Инверзија је пресликавање из $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ дато са $w = \dfrac{1}{z},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Показати да инверзији одговара ротација Риманове сфере за $180°$ око $x_1-$осе.




Нека је $z$ произвољна тачка у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $A$ њена пројекција на Риманову сферу облика $A(a_1, a_2, a_3)$. Нека је $w = \dfrac{1}{z}$ и нека је $B$ њена пројекција на Риманову сферу облика $B(b_1, b_2, b_3)$. Ми треба да покажемо да тачка $A$ са Риманове сфере након ротације те сфере за $180°$ око $x_1-$осе долази на положај тачке $B$, односно да је $a_1 = b_1,\ a_2 = -b_2$ и $a_3 = -b_3$.

Употребом формуле (1.2) добијамо да је

$$A\left(\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right).$$

Како је $w = \dfrac{1}{z}$, добијамо да је $w = \dfrac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \dfrac{\operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z}{|z|^2} = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} - i\dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}$ и $|w| = \dfrac{1}{|z|}$. Уврштавајући то у формулу (1.2) добијамо

$$B\left(\frac{2\operatorname{Re} w}{|w|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im} w}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right) = B\left(\frac{2\operatorname{Re} z}{1+|z|^2}, \frac{-2\operatorname{Im} z}{1+|z|^2}, \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right),$$

те заиста важе тражене релације. □

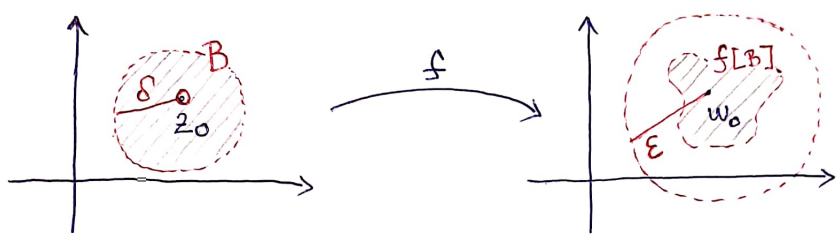
## 2.1 Непрекидност комплексне функције

**Дефиниција 2.6.** *Нека је комплексна функција $f$ дефинисана у некој околини тачке $z_0$. Кажемо да је $w_0$ гранична вредност функције $f$ када $z$ тежи $z_0$ и пишемо*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0,$$

*ако и само ако важи:*

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta(\varepsilon)>0)(\forall z\in D_f)\quad 0<|z-z_0|<\delta\ \Rightarrow |f(z)-w_0|<\varepsilon.$$




*Специјално, пишемо*

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall\varepsilon>0)(\exists K(\varepsilon)>0)(\forall z\in D_f)\quad |z|>K\ \Rightarrow |f(z)-w_0|<\varepsilon;\\
\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall M>0)(\exists\delta(M)>0)(\forall z\in D_f)\quad 0<|z-z_0|<\delta\ \Rightarrow |f(z)|>M;\\
\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall M>0)(\exists K(M)>0)(\forall z\in D_f)\quad |z|>K\ \Rightarrow |f(z)|>M.
\end{aligned}$$

**Пример 2.7.** Покажимо да важи $\lim_{z\to i} z^2 = -1$.

Треба показати

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta(\varepsilon)>0)(\forall z\in\mathbb{C})\quad 0<|z-i|<\delta\ \Rightarrow |z^2-(-1)|<\varepsilon.$$

Заиста, ако за дато $\varepsilon>0$ изаберемо $\delta=\min\{\varepsilon/3, 1\}$, тада за $0<|z-i|<\delta$ важи $|z+i|<|z|+1<2+1=3$ и

$$|z^2+1| = |(z-i)(z+i)| = |z-i||z+i| \le |z-i|\cdot 3 < \frac{\varepsilon}{3}\cdot 3 = \varepsilon.$$ □

**Теорема 2.8.** *Нека су функције $f$ и $g$ дефинисане у некој околини тачке $z_0$. Ако је $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$ и $\lim_{z\to z_0} g(z) = B$, онда важи:*

1. $\lim\limits_{z\to z_0} (f(z) \pm g(z)) = A \pm B$;

2. $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = A \cdot B$;

3. $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B}$, *где је $g(z) \neq 0$ у некој околини тачке $z_0$ и $B \neq 0$.*

Понекад је корисно користити секвенцијални критеријум конвергенције, посебно када је потребно показати да одређена гранична вредност не важи.

**Теорема 2.9.** *Нека је функција $f$ дефинисана у некој околини тачке $z_0$. Тада је*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$

*ако и само ако за сваки низ комплексних бројева $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D_f$ који конвергира ка $z_0$ важи*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w_0.$$

Поглавље ћемо завршити појмом непрекидности комплексне функције. Навешћемо дефиницију и основне особине непрекидних функција без доказа, јер су они идентични доказима из реалне анализе.

**Дефиниција 2.10.** *Нека је функција $f$ дефинисана у некој околини тачке $z_0$. Тада је функција $f$ непрекидна у тачки $z_0$ ако и само ако је $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Функција $f$ је непрекидна на скупу $S \subseteq D_f$ ако и само ако је непрекидна у свакој тачки скупа $S$.*

**Теорема 2.11.** *Ако су функције $f$ и $g$ непрекидне у тачки $z_0$ онда су то и функције $f \pm g$ и $f \cdot g$; ако је, додатно, функција $g$ ненула у некој околини тачке $z_0$ онда је непрекидна и функција $f/g$.*

Важи и теорема о непрекидности композиције непрекидних функција. На овај начин, уз претходну теорему, почевши од елементарних функција, које су непрекидне, добијамо широку класу непрекидних функција.

**Теорема 2.12.** *Ако је функција $f$ непрекидна у тачки $z_0$, а функција $g$ непрекидна у тачки $f(z_0)$, онда је функција $g \circ f$ непрекидна у $z_0$.*

**Пример 2.13.** У претходном примеру смо видели да се директном применом дефиниције показује да су комплексне степене функције $f(z) = z^n,\ n \in \mathbb{N}$ непрекидне на $\mathbb{C}$, а лако се види да је непрекидна и константна функција $f(z) = c,\ c = const$. Ово имплицира, употребом претходних теорема, да су непрекидни:

- полиноми: $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,\ z \in \mathbb{C}$ и
- рационалне функције: $\dfrac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}$ за $b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m \neq 0$. $\square$

**Напомена 2.14.** Аналогно као и у Напомени 1.17, може се показати да гранична вредност (непрекидност) функције може да се испита посредством граничне вредности (непрекидности) њеног реалног и имагинарног дела. Важи:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{x+iy\to x_0+iy_0} f(x+iy) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (u(x,y)+iv(x,y)) = w_0 = u_0 + iv_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad \wedge \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0. \qquad \square$$

**Пример 2.15.** Сада одмах добијамо да је комплексна експоненцијална функција $e^z,\ z\in\mathbb{C}$ непрекидна на целом $\mathbb{C}$, јер је облика $e^z = e^{x+iy} = e^x\cos y + i\,e^x\sin y,\ x,y\in\mathbb{R}$, а за реалне функције $e^x\cos y$ и $e^x\sin y$ знамо да су непрекидне на $\mathbb{R}^2$. $\square$

**Пример 2.16.** Покажимо неколико примера комплексних граничних вредности:

- $\lim\limits_{z\to 3i} \dfrac{z}{z^2+9} = \dfrac{3i}{-9+9} = „\dfrac{3i}{0}" = \infty;$
- $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{iz-2}{4z+i} = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{i-\frac{2}{z}}{4+\frac{i}{z}} = \dfrac{i-0}{4+0} = \dfrac{i}{4};$
- $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z^3+3i}{z^2+5z} = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1+\frac{3i}{z^3}}{\frac{1}{z}+\frac{5}{z^2}} = „\dfrac{1+0}{0+0}" = \infty.$ $\square$

**Пример 2.17.** Директно из дефиниције добијамо алтернативне начине за испитивање конвергенције. Наиме, важи:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{z\to z_0} |f(z)| = 0;$$
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty. \qquad \square$$

**Пример 2.18** (Непрекидно продужење)**.** За функцију $\tilde{f}(z),\ z\in D_{\tilde{f}}$ кажемо да непрекидно продужава функцију $f(z),\ z\in D_f$ ако је непрекидна, и ако важи $D_f\subset D_{\tilde{f}}$ и $\tilde{f}(z) = f(z),\ z\in D_f$.

За рационалну функцију $f(z) = \dfrac{2z}{z^2+z},\ z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1\}$, која је непрекидна на свом домену, проверити да ли може да се непрекидно продужи у тачкама у којима није дефинисана. Дакле, треба да проверимо да ли постоји функција $\tilde{f}(z),\ z\in D_{\tilde{f}}$ која је непрекидна и важи

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1\} \\ A, & z=-1 \\ B, & z=0. \end{cases}$$

Функција $\tilde{f}$ је непрекидна у $z=0$ ако важи

$$\lim_{z\to 0}\tilde{f}(z) = \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{2z}{z^2+z} = \lim_{z\to 0}\frac{2}{z+1} = 2.$$

За $B=2$ добијамо непрекидно проширење у нули. Са друге стране,

$$\lim_{z\to -1}\tilde{f}(z) = \lim_{z\to -1} f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{2}{z+1} = \frac{2}{0} = \infty,$$

те функцију није могуће непрекидно продужити у тачки $-1$. Коначно, функцију $f$ можемо непрекидно продужити функцијом $\tilde{f}$ на скуп $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ тако да важи:

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1\} \\ 2, & z = 0. \end{cases}$$

Напоменимо на крају, да се тачка $z = 0$ назива отклоњиви (привидни) сингуларитет функције $f$, а тачка $z = -1$ пол. $\square$

## 2.2 Диференцијабилност и аналитичке функције

**Дефиниција 2.19.** *Нека је функција $f$ дефинисана у некој околини тачке $z_0$. Извод функције $f$ у тачки $z_0$ дат је на следећи начин*

$$\frac{df}{dz}(z_0) = f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

*ако дати лимес постоји. Тада кажемо да је функција $f$ диференцијабилна у тачки $z_0$.*

Истакнимо одмах, а показује се аналогно као у реалној анализи, да је функција која је диференцијабилна у тачки $z_0$ и непрекидна у $z_0$.

**Пример 2.20.** Као и у реалној анализи важи: $\dfrac{d}{dz} z^n = n z^{n-1},\ z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$.

Користећи следећи идентитет

$$\begin{aligned} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} &= \frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^{n-i} (\Delta z)^i - z^n}{\Delta z} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} z^{n-i} (\Delta z)^{i-1} \\ &= n z^{n-1} + \binom{n}{2} z^{n-2} \Delta z + \cdots + n z (\Delta z)^{n-2} + (\Delta z)^{n-1}, \end{aligned}$$

добијамо да је

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z^n &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left( n z^{n-1} + \binom{n}{2} z^{n-2} \Delta z + \cdots + n z (\Delta z)^{n-2} + (\Delta z)^{n-1} \right) \\ &= n z^{n-1}, \qquad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$\square$

**Пример 2.21.** Покажимо да функција $f(z) = \bar{z},\ z \in \mathbb{C}$ није диференцијабилна ни у једној тачки $z \in \mathbb{C}$. Треба показати да лимес

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{(z + \Delta z)} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

не постоји. Низ $a_n = 1/n,\ n \in \mathbb{N}$ је такав да $a_n \to 0,\ n \to \infty$ и када га уврстимо у горњи лимес добијамо $\lim_{n \to \infty} \frac{1/n}{1/n} = 1$, док за низ $b_n = i(1/n),\ n \in \mathbb{N}$ важи да $b_n \to 0,\ n \to \infty$ и добијамо $\lim_{n \to \infty} \frac{-i(1/n)}{i(1/n)} = -1$. Коначно, Теорема 2.9 имплицира да посматрана гранична вредност не постоји. $\square$

**Напомена 2.22.** Није случајно дат пример функције $f(z) = \bar{z},\ z \in \mathbb{C}$ као оне која није диференцијабилна. Касније ћемо видети да се у комплексној анализи функције, које су диференцијабилне на неком отвореном скупу, увек могу изразити као функције по $z$, без употребе $x, y, \bar{z}$ и слично. $\square$

Следећа теорема нам помаже да лако проширимо класу диференцијабилних функција.

**Теорема 2.23.** *Нека су функције $f$ и $g$ диференцијабилне у тачки $z$, тада су то и функције $f \pm g,\ f \cdot g$ и $f/g$ ако је $g(z) \neq 0$ и важи*

- $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$;
- $(cf)'(z) = cf'(z),\ c = const$;
- $(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)},\ g(z) \neq 0.$

*Ако је функција $g$ диференцијабилна у тачки $z$, а функција $f$ у $g(z)$, онда је и функција $f \circ g$ диференцијабилна у тачки $z$ и важи:*

$$\frac{d(f \circ g)}{dz}(z) = \frac{d}{dz}(f(g(z))) = f'(g(z)) \cdot g'(z).$$

**Пример 2.24.** Претходна теорема и Пример 2.20 директно имплицирају да су сви полиноми и рационалне функције диференцијабилни у свим тачкама у којима су дефинисани.

На крају овог одељка дефинисаћемо најважнији појам комплексне анализе, а то су аналитичке функције.

**Дефиниција 2.25.** *Функција $f$ је аналитичка на отвореном скупу $S \subseteq \mathbb{C}$ ако је диференцијабилна у свакој тачки скупа $S$. За комплексну функцију $f$ кажемо да је аналитичка у тачки $z_0$ ако постоји околина тачке $z_0$, односно ако постоји $\varepsilon > 0$ тако да је функција $f$ аналитичка на отвореној лопти $B(z_0, \varepsilon)$. Специјално, кажемо да је функција $f$ цела ако је аналитичка на $\mathbb{C}$.*

Напоменимо да је за функцију $f$ појам "бити аналитичка у тачки $z_0$" много више од "бити диференцијабилна у $z_0$", јер аналитичност подразумева да постоји околина $B(z_0, \varepsilon)$ тачке $z_0$ на којој је $f$ диференцијабилна, видети Пример 2.30.

**Напомена 2.26.** У литератури се често користи термин *холоморфна функција* или *регуларна функција* за функцију која је диференцијабилна на отвореном скупу, према дефиницији 2.25. У том случају се аналитичким функцијама називају оне функције које имају непрекидан први извод на отвореном скупу. Међутим, видећемо да се те две класе функција поклапају, Теорема 4.33, те их ми одмах називамо аналитичким.

На крају одељка ћемо увести и појам сингуларне тачке.

**Дефиниција 2.27.** *Нека је $z_0$ тачка нагомилавања домена $D_f$ функције $f$. Тачка $z_0$ се назива сингуларна тачка, или сингуларитет, функције $f$, ако функција $f$ није аналитичка у тачки $z_0$, али постоји низ тачака које конвергирају у $z_0$ у којима $f$ јесте аналитичка.*

Дакле, сингуларитет је она тачка у којој се губи аналитичност функције. То значи две ствари, да функција није аналитичка у сингуларној тачки, али и да је аналитичка у њеној околини. Тачке које су далеко од области аналитичности функције се не узимају у обзир када се говори о сингуларитетима. Сингуларитети су веома важан појам у комплексној анализи и спомињаћемо их у свакој глави и то са све више детаља. Међутим, на овом месту желимо у напред да најавимо у којим се облицима све јављају. Постоје две основне врсте сингуларитета:

- $z_0$ је *изоловани сингуларитет* ако постоји $\varepsilon > 0$ тако да је у лопти $B(z_0, \varepsilon)$ тачка $z_0$ једини сингуларитет. У ову групу спадају привидни сингуларитети, полови и есенцијални сингуларитети (видети Поглавље 5.5). Изоловани сингуларитети најчешће настају као последица дељења нулом.

- иначе, $z_0$ је *тачка нагомилавања сингуларитета*. Овде постоје две могућности: или је $z_0$ тачка нагомилавања изолованих сингуларитета или је *тачка гранања*. Тачке гранања се појављују код вишезначних функција: логаритамске и корене (видети Поглавље 3.3 и 3.4).

## 2.3 Коши-Риманове парцијалне диференцијалне једначине и аналитичност

Претпоставимо да је функција

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy \in D_f$$

диференцијабилна у тачки $z_0 = x_0 + iy_0 \in D_f$. Тада постоји гранична вредност

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

То даље имплицира да постоје и одговарајуће граничне вредности по правцима, односно ако обележимо $\Delta z = h + ik$, да постоје лимеси:

1. по правцу $\Delta z = h + i \cdot 0 = h \to 0$, тј.

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) + iv(x_0 + h, y_0) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h \to 0} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

2. и по правцу $\Delta z = 0 + ik = ik \to 0$, тј.

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(z_0+ik)-f(z_0)}{ik} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0+i(y_0+k))-f(x_0+iy_0)}{ik} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{u(x_0,y_0+k)+iv(x_0,y_0+k)-(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))}{ik} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{u(x_0,y_0+k)-u(x_0,y_0)}{ik} + i \lim_{k\to 0} \frac{v(x_0,y_0+k)-v(x_0,y_0)}{ik} \\ &= -i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Дакле, прво што примећујемо је да ако је функција $f = u + iv$ диференцијабилна у тачки $z_0 = x_0 + iy_0$, онда постоје први парцијални изводи реалних функција $u$ и $v$ у тачки $(x_0, y_0)$ и извод $f'(z_0)$ може да се израчуна на један од наведених начина:

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + i\,v_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) - i\,u_y(x_0,y_0). \tag{2.1}$$

Затим, на основу (2.1) видимо да у тачки $(x_0, y_0)$ важи $u_x = v_y$ и $u_y = -v_x$, те из свега изложеног можемо да формулишемо и познати Коши-Риманов потребан услов за диференцијабилност комплексне функције, дат у наставку.

**Дефиниција 2.28** (Коши-Риманове ПДЈ)**.** *Коши-Риманове парцијалне диференцијалне једначине комплексне функције*

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

*у тачки $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ су дефинисане на следећи начин:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \tag{2.2}$$

**Теорема 2.29** (Коши-Риманов потребан услов за диференцијабилност)**.** *Ако је комплексна функција $f$ облика $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ диференцијабилна у тачки $z_0 \in D_f$, онда за функцију $f$ у тачки $z_0$ важе Коши-Риманове једначине* (2.2).

*Ако је функција $f$ аналитичка на отвореном скупу $S$, онда у свакој тачки скупа $S$ за функцију $f$ важе Коши-Риманове једначине* (2.2).

**Пример 2.30.** Покажимо да функција

$$f(z) = f(x+iy) = x^2 + y + i(y^2 - x), \qquad z \in \mathbb{C}$$

није аналитичка ни у једној тачки комплексне равни. Приметимо, успут, да је функција $f$ непрекидна у свим тачкама комплексне равни, јер су непрекидни и реални $u(x,y) = x^2 + y$ и имагинарни део $v(x,y) = y^2 - x,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Важи:

$$u_x(x,y) = 2x, \quad u_y(x,y) = 1, \quad v_x(x,y) = -1, \quad v_y(x,y) = 2y.$$

Коши-Риманова парцијална диференцијална једначина $u_y(x,y) = -v_x(x,y)$ је задовољена у свим тачкама $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, међутим, једначина $u_x(x,y) = v_y(x,y)$ важи само за тачке са праве $x = y$. Дакле, функција $f$ може бити диференцијабилна само у тачкама скупа $P = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + ix,\ x \in \mathbb{R}\}$. Како је скуп $P$ празне унутрашњости, не постоји ни једна тачка $z \in \mathbb{C}$ која има околину на којој је $f$ диференцијабилна, односно функција $f$ није аналитичка ни у једној тачки. □

Сада се поставља питање да ли су ови услови и довољни.

**Теорема 2.31** (Коши-Риманов довољан услов за диференцијабилност)**.** *Нека је комплексна функција $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ дефинисана на неком отвореном скупу $S$ који садржи тачку $z_0$. Ако први парцијални изводи функција $u$ и $v$ постоје у свим тачкама скупа $S$, непрекидни су у $z_0 = x_0 + iy_0$ и задовољавају Коши-Риманове једначине* (2.2) *у $z_0$, онда је функција $f$ диференцијабилна у тачки $z_0$.*

*Ако су, додатно, први парцијални изводи функција $u$ и $v$ непрекидни на $S$ и задовољавају Коши-Риманове једначине* (2.2) *у свим тачкама скупа $S$, онда је функција $f$ аналитичка на скупу $S$.*

***Доказ.*** Теорема 2.29 тврди да ако извод $f'(z_0)$ постоји, онда је он једнак

$$f'(z_0) = w_0 = u_x(x_0,y_0) + i\,v_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) - i\,u_y(x_0,y_0).$$

Дакле, наш задатак је да покажемо да ако важе услови теореме онда је

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = w_0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} - w_0\right| = 0.$$

Прво, вредност $w_0$ постоји, јер постоје парцијални изводи функција $u$ и $v$. Важи:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} - w_0\right| \\
&\quad= \lim_{\Delta z=h+ik\to 0}\left|\frac{u(x_0+h,y_0+k)+iv(x_0+h,y_0+k)-(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))}{h+ik} - w_0\right| \\
&\quad= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|u(x_0+h,y_0+k)+iv(x_0+h,y_0+k)-(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)) - w_0\cdot(h+ik)|}{\sqrt{h^2+k^2}}.
\end{aligned}$$

Користећи две могућности за изражавање $w_0$, добијамо да је

$$\begin{aligned}
w_0(h+ik) &= h(u_x(x_0,y_0)+i\,v_x(x_0,y_0)) + ik(v_y(x_0,y_0) - i\,u_y(x_0,y_0)) \\
&= hu_x(x_0,y_0) + ku_y(x_0,y_0) + i(hv_x(x_0,y_0) + kv_y(x_0,y_0)).
\end{aligned}$$

Ово даље имплицира, раздвајајући реални и имагинарни део последњег лимеса, да је

$$\begin{aligned}
0 \le \lim_{\Delta z\to 0}&\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} - w_0\right| \\
&\le \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|u(x_0+h,y_0+k)-u(x_0,y_0)-(hu_x(x_0,y_0)+ku_y(x_0,y_0))|}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&\quad+ \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|v(x_0+h,y_0+k)-v(x_0,y_0)-(hv_x(x_0,y_0)+kv_y(x_0,y_0))|}{\sqrt{h^2+k^2}},
\end{aligned}$$

ако последње две граничне вредности постоје. Међутим, последње две граничне вредности су чак једнаке нули, јер на основу услова задатка знамо да парцијални изводи функција $u$ и $v$ постоје и да су непрекидни у $(x_0,y_0)$, а то значи да су $u$ и $v$ диференцијабилне у $(x_0,y_0)$, односно да су посматране граничне вредности једнаке нули. Коначно,

$$0 \le \lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} - w_0\right| \le 0+0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} - w_0\right| = 0,$$

што смо и хтели да покажемо. □

**Пример 2.32.** Комплексну експоненцијалну функцију $e^z,\ z \in \mathbb{C}$ можемо записати на следећи начин:

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Реални део експоненцијалне функције $u(x, y) = e^x \cos y$ и имагинарни $v(x, y) = e^x \sin y$ имају непрекидне прве парцијалне изводе у свим тачкама $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Такође, у свим тачкама $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ функције $u$ и $v$ задовољавају Коши-Риманове једначине (2.2), јер је

$$u_x(x, y) = e^x \cos y = v_y(x, y) \quad \text{и} \quad u_y(x, y) = -e^x \sin y = -v_x(x, y).$$

Дакле, комплексна експоненцијална функција $e^z$, $z \in \mathbb{C}$ је аналитичка на $\mathbb{C}$, односно цела. Додатно, из (2.1) добијамо да је $(e^z)' = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, јер је

$$\frac{d}{dz}e^z = (e^z)' = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z, \quad z \in \mathbb{C}. \qquad \square$$

**Теорема 2.33.** *Ако је функција $f$ аналитичка на области $D$ и ако је $f'(z) = 0$ за све $z \in D$, онда је $f$ константна функција на $D$.*

***Доказ.*** Функција $f$ је аналитичка и важи $f'(z) = 0,\ z \in D$, па на основу Теореме 2.29 добијамо да је $u_x(x, y) = u_y(x, y) = v_x(x, y) = v_y(x, y) = 0,\ (x, y) \in D$. С обзиром да је $D$ повезан (иначе, би ово важило за сваку компоненту посебно) и отворен скуп, онда $u_x(x, y) = u_y(x, y) = 0,\ (x, y) \in D$ имплицира да постоји константа $A \in \mathbb{R}$ тако да је $u(x, y) = A,\ (x, y) \in D$; и слично да постоји $B \in \mathbb{R}$ тако да је $v(x, y) = B,\ (x, y) \in D$. Коначно, $f(z) = A + iB = const$, $z \in D$. $\square$

**Последица 2.34.** *Ако су функције $f$ и $g$ аналитичке на области $D$ такве да је $f'(z) = g'(z),\ z \in D$ онда је $f(z) = g(z) + const$.*

**Напомена 2.35.** Функција $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, која је аналитичка на отвореном скупу $D \subseteq \mathbb{C}$, увек може да се напише као функција по $z = x + iy$ тако да не зависи од $\bar{z} = x - iy$.

Уведимо смену:

$$\begin{aligned} \xi &= x + iy & x &= \frac{\xi + \eta}{2} \\ \eta &= x - iy & y &= \frac{\xi - \eta}{2i}. \end{aligned}$$

Тада за функцију

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$$

важи:

- $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial \xi} + i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial \xi} + \dfrac{\partial v}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right) = \dfrac{1}{2}(u_x + v_y) + \dfrac{i}{2}(v_x - u_y)$, што уз Коши-Риманове једначине имплицира да је $\tilde{f}_\xi = u_x + iv_x = f_z$, а то смо и очекивали јер је $\xi = z$;
- $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial \eta} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial \eta} + i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial \eta} + \dfrac{\partial v}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial \eta}\right) = \dfrac{1}{2}(u_x - v_y) + \dfrac{i}{2}(v_x + u_y)$, што уз Коши-Риманове једначине имплицира да је $\tilde{f}_\eta = 0 + i0 = 0$, односно функција $\tilde{f}$ не зависи од $\eta$ или другим речима $f$ не зависи од $\bar{z} = x - iy = \eta$. $\square$

## 2.4 Хармонијске функције и аналитичност

**Дефиниција 2.36.** *Реална функција $\phi(x, y)$ се назива хармонијска на области $D \subset \mathbb{R}^2$ ако су јој сви парцијални изводи другог реда непрекидни на $D$ и ако у свакој тачки области $D$, функција $\phi$ задовољава Лапласову*[1] *парцијалну диференцијалну једначину:*

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi := \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0.$$

**Теорема 2.37.** *Ако је $f(z) = f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ аналитичка на области $D$, онда су реалне функције $u$ и $v$ хармонијске на $D$.*

***Доказ.*** Касније ће бити показано да ако је $f$ аналитичка на области $D$, онда су $u, v \in C^\infty(D)$. Покажимо да $u$ задовољава Лапласову ПДЈ. Како је $v \in C^\infty(D)$ онда су јој мешовити други изводи једнаки, $v_{xy} = v_{yx}$. Сада користећи Коши-Риманове једначине добијамо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

Аналогно се показује и да је функција $v$ хармонијска на $D$. □

**Напомена 2.38.** За дату хармонијску функцију $u(x, y)$ на области $D$ увек можемо конструисати функцију $v(x, y)$ тако да комплексна функција $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ буде аналитичка функција на одговарајућој области $D$.

**Пример 2.39.** Одредити аналитичку функцију $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$ којој је реални део хармонијска функција $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Прво, функција $u$ је заиста хармонијска на $\mathbb{R}^2$, јер је $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 6x - 6x = 0$.

Даље, како желимо да функција $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ буде аналитичка, треба да важе Коши-Риманове једначине. Користећи прву од њих $u_x = v_y$, добијамо да је $v_y(x, y) = 3x^2 - 3y^2$. Одавде је

$$v(x, y) = \int (3x^2 - 3y^2)dy = 3x^2y - y^3 + \psi(x).$$

Друга Коши-Риманова једначина $u_y = -v_x$ имплицира $v_x = 6xy + \psi'(x) = -u_y = 6xy - 1$, одакле је $\psi'(x) = -1$, односно $\psi(x) = -x + c$. Коначно, имагинарни део је $v(x, y) = 3x^2y - y^3 - x + c$, те је

$$\begin{aligned} f(z) = f(x + iy) &= x^3 - 3xy^2 + y + i(3x^2y - y^3 - x + c) \\ &= x^3 + 3x(iy)^2 + 3x^2(iy) + (iy)^3 + y - ix + ic = (x + iy)^3 - i(x + iy) + ic \\ &= z^3 - i(z - c). \end{aligned}$$

Искористимо прилику да поново истакнемо да није случајно што смо успели $f$ да изразимо као функцију од $z$, односно да упаримо променљиве $x$ и $y$ тако да свуда имамо $x + iy$. Разлог томе је што је $f$ аналитичка функција.

[1] Пјер-Симон, Маркиз де Лаплас (Pierre-Simon, Marquis de Laplace, 1749–1827) - француски математичар и астроном

Додајмо и то да постоји и једноставнији начин да аналитичку функцију $f(x,y) = u(x,y)+iv(x,y)$ изразимо као функцију по $z$. Наиме, како смо сигурни да ће свако $x$ имати и одговарајуће $iy$ (односно, где год је $x$ појавиће се и $z = x + iy$, а $y$ занемаримо), аналитичку функцију $f$ можемо једноставно написати $f(z) = f(z,0) = u(z,0) + iv(z,0)$. Заиста, у претходном примеру добијамо:

$$f(z) = z^3 - 3z \cdot 0^2 + 0 + i(3z^2 \cdot 0 - 0^3 - z + c) = z^3 + i(-z + c). \qquad \square$$

# Глава 3

# Елементарне комплексне функције

## 3.1 Полиноми и рационалне функције

Нека је $n, m \in \mathbb{N}$ и нека су дати комплексни бројеви $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$.

**Дефиниција 3.1.** *Полином $n-$тог степена је*

$$p_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,\ z \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0.$$

*Рационална функција је количник два полинома и дефинисана је тамо где је именилац различит од нуле:*

$$R_{n,m}(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m},\ z \in \mathbb{C},\ \textit{где је}\ a_n, b_m \neq 0,\ b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m \neq 0.$$

До сада смо показали да су полиноми $p_n$ целе функције, односно да су аналитичке на целом $\mathbb{C}$, а да су рационалне функције $R_{n,m}$ аналитичке тамо где је $b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n \neq 0$. Затим, доказали смо и да је $\dfrac{d}{dz} z^n = n z^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$.

**Пример 3.2.** Факторишимо полином $p_3(z) = z^3 + (2-i)z^2 - iz$ над пољем комплексних бројева. Први корак је јасан:

$$p_3(z) = z(z^2 + (2-i)z - i).$$

Даље, рачунајући $z_{1/2}$ добијамо да је $z_1 = \dfrac{-2+i+\sqrt{3}}{2}$ и $z_2 = \dfrac{-2+i-\sqrt{3}}{2}$, одакле важи

$$\begin{aligned} p_3(z) &= z\left(z - \frac{-2+i+\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{-2+i-\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} z \left(2z - (-2+\sqrt{3}+i)\right)\left(2z - (-2-\sqrt{3}+i)\right). \end{aligned}$$

□

Када развијемо теорију комплексне интеграције, показаћемо једну од најпознатијих теорема алгебре (види Теорему 4.40):

**Теорема 3.3** (Основни став алгебре)**.** *Сваки неконстантан полином са комплексним коефицијентима има бар једну нулу у пољу комплексних бројева $\mathbb{C}$.*

Еквивалентна формулација Основног става алгебре је да сваки полином $n-$тог степена има тачно $n$ нула у пољу $\mathbb{C}$, рачунајући и њихову вишеструкост. Наиме, како полином $p_n$ има бар једну нулу $z_1 \in \mathbb{C}$, на основу Безуовог става, можемо га написати у облику $p_n(z) = (z - z_1)p_{n-1}(z)$. Али и полином $p_{n-1}$ има бар једну нулу $z_2 \in \mathbb{C}$, и тако редом док не дођемо до полинома првог степена, који не може даље да се разлаже. Дакле, важи:

$$p_n(z) = (z - z_1)p_{n-1}(z) = (z - z_1)(z - z_2)p_{n-2}(z) = \cdots = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n) \cdot a_n.$$

Приметимо да $z_1, \dots, z_n$ не морају бити међусобно различити комплексни бројеви, те не кажемо да полином $n-$тог степена има тачно $n$ *различитих* нула, већ $n$ нула рачунајући и њихову вишеструкост.

Нуле имениоца рационалне функције се називају *полови*.

**Пример 3.4.** Датој рационалној функцији $R_{3,5}$ факторисаћемо понаособ именилац и бројилац.

$$R_{3,5}(z) = \frac{(3z + 3i)(z^2 - 4)}{(z - 2)(z^2 + 1)^2} = \frac{3(z + i)(z - 2)(z + 2)}{(z - 2)(z + i)^2(z - i)^2}.$$

На први поглед, нуле рационалне функције су $-i, 2, -2$, а полови $2, -i, i$. Међутим, бројеви $-i$ и $2$ имају двоструку улогу за једну исту функцију, те треба да одлучимо која је доминантнија. Након, сређивања разломка видимо да је

$$R_{3,5}(z) = \frac{(3z + 3i)(z^2 - 4)}{(z - 2)(z^2 + 1)^2} = \frac{3(z + i)(z - 2)(z + 2)}{(z - 2)(z + i)^2(z - i)^2} = \frac{3(z + 2)}{(z + i)(z - i)^2}.$$

Дакле, рећи ћемо да је $-2$ нула првог реда рационалне функције $R_{3,5}$, да је $-i$ пол првог, а $i$ пол другог реда, док вредност 2 није ни нула ни пол рационалне функције $R_{3,5}$ (касније ћемо то звати отклоњиви сингуларитет). □

Свака рационална функција са комплексним коефицијентима може да се напише као збир елементарних рационалних функција облика $\dfrac{A}{(z - z_0)^k},\ A \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}$.

**Пример 3.5.** Важи:

- $\dfrac{4z + 4}{z(z - 1)(z - 2)^2} = \dfrac{A}{z} + \dfrac{B}{z - 1} + \dfrac{C}{z - 2} + \dfrac{D}{(z - 2)^2} = \cdots = \dfrac{-1}{z} + \dfrac{8}{z - 1} + \dfrac{-7}{z - 2} + \dfrac{6}{(z - 2)^2}.$
- $\dfrac{2z + i}{z^3 + z} = \dfrac{2z + i}{z(z + i)(z - i)} = \dfrac{A}{z} + \dfrac{B}{z + i} + \dfrac{C}{z - i} = \cdots = \dfrac{i}{z} + \dfrac{\frac{i}{2}}{z + i} + \dfrac{-\frac{3i}{2}}{z - i}.$ □

## 3.2 Експоненцијална функција (тригонометријске и хиперболичне тригонометријске функције)

Већ смо размотрили мотивацију за увођење комплексне експоненцијалне функције на следећи начин:

**Дефиниција 3.6.** *Експоненцијална функција комплексне променљиве,* $e^{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *се дефинише са:*

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad z = x + iy \in \mathbb{C}. \tag{3.1}$$

Подсетимо се, показали смо да је експоненцијална функција аналитичка на $\mathbb{C}$, односно цела функција. Такође, знамо и да је $\dfrac{d}{dz}e^z = e^z,\ z \in \mathbb{C}$.

Даље, за дати број $z = x + iy \in \mathbb{C}$, директно из (3.1), добијамо да је: $|e^z| = e^x$ и $\operatorname{Arg} e^z = y + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. С обзиром да је $|e^z| = e^x \neq 0$ за све $z \in \mathbb{C}$, добијамо да је $e^z \neq 0$ за све $z \in \mathbb{C}$.

Дакле, у будуће претпостављамо $e^{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Овако дефинисана експоненцијална функција је сирјекција. Наиме, за $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ облика $w = re^{i\varphi},\ r > 0,\ \varphi \in \mathbb{R}$ важи $w = re^{i\varphi} = e^{\ln r}e^{i\varphi} = e^{\ln r + i\varphi}$. Дакле, произвољно $w = re^{i\varphi}$ из кодомена $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ добија се као слика $z = \ln r + i\varphi \in \mathbb{C}$, односно $w = e^{\ln r + i\varphi}$. Међутим, експоненцијална функција није инјекција. Све тачке облика $z_k = x + i(\varphi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ се сликају у исту тачку $w = e^{z_k} = e^x(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)) = e^x(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Приметимо да се бесконачно много различитих тачака домена $z_k,\ k \in \mathbb{Z}$ слика у једну исту тачку $w$ у кодомену.

**Теорема 3.7.** *За комплексну експоненцијалну функцију важи:*

1. $e^z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$

2. $e^{z_1} = e^{z_2} \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = z_2 + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$

***Доказ.***

1. ($\Rightarrow$) Нека за $z = x + iy \in \mathbb{C}$ важи $e^z = 1$. То значи да је $|e^z| = e^x = 1$, односно $x = 0$. Даље, $e^{0+iy} = e^{iy} = \cos y + i\sin y = 1$ имплицира: $\cos y = 1 \ \wedge\ \sin y = 0,\ y \in \mathbb{R}$, а то је испуњено само у тачкама $y = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Коначно, добијамо да $e^z = 1$ имплицира $z = 0 + i \cdot 2k\pi = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$.

   ($\Leftarrow$) Обрнуто, ако је $z = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$, онда је $e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1 + i \cdot 0 = 1$.

2. На основу доказаног под 1, и особина експоненцијалне функције, добијамо да је

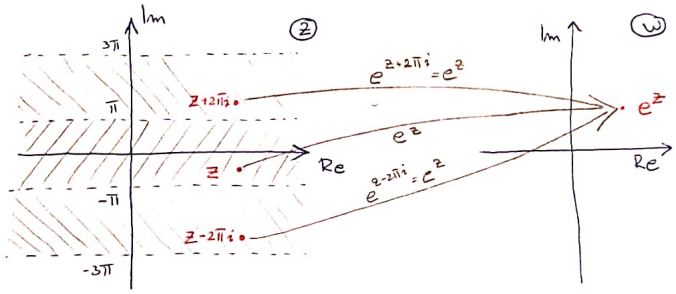
$$e^{z_1} = e^{z_2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{z_1 - z_2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 - z_2 = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = z_2 + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$$

□

**Напомена 3.8.**

На основу Теореме 3.7 можемо рећи да је комплексна експоненцијална функција периодична ("дуж имагинарне осе") са периодом $2\pi i$. Односно важи:

$$e^z = e^{z + k\cdot 2\pi i}, \quad z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}.$$




□

У наставку ћемо увести комплексне тригонометријске функције уопштавајући већ познате реалне тригонометријске функције. Користећи особине реалних тригонометријских функција добијамо да је $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ и $e^{-iy} = \cos(-y) + i\sin(-y) = \cos y - i\sin y,\ y \in \mathbb{R}$. Одавде се директно добија да реалне тригонометријске функције можемо записати као $\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$ и $\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i},\ y \in \mathbb{R}$. Овај запис је и мотивација за увођење дефиниције комплексних тригонометријских функција:

**Дефиниција 3.9.** *Комплексне тригонометријске функције дате су са*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ z \in \mathbb{C} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ z \in \mathbb{C},$$
$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \cos z \neq 0\} \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},\ z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \sin z \neq 0\}.$$

Истакнимо у наставку неке од важних особина комплексних тригонометријских функција:

- $\dfrac{d}{dz}\sin z = \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = \dfrac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z,\ z \in \mathbb{C}.$

- Слично, $\dfrac{d}{dz}\cos z = -\sin z,\ z \in \mathbb{C}$. Дакле, важе исте формуле за диференцирање као у реалној анализи.

- За комплексне тригонометријске функције важе познате тригонометријске формуле, нпр.
$$\sin(2z) = \frac{e^{i2z} - e^{-i2z}}{2i} = \frac{(e^{iz})^2 - (e^{-iz})^2}{2i} = 2\frac{(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iz} + e^{-iz})}{2i \cdot 2} = 2\sin z \cos z,\ z \in \mathbb{C}.$$

- Периодичне су (”дуж реалне осе”). На пример, синусна и косинусна функција са периодом $2\pi$. Заиста,
$$\cos(z + k \cdot 2\pi) = \frac{e^{i(z+2k\pi)} + e^{-i(z+2k\pi)}}{2} = \frac{e^{iz}e^{2k\pi i} + e^{-iz}e^{-2k\pi i}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \ z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z},$$
jep je $e^{2k\pi i} = e^{-2k\pi i} = 1,\ k \in \mathbb{Z}$.

- Комплексне тригонометријске функције су једнаке нули једино тамо где су то биле и реалне тригонометријске функције, дакле нема нових нула. На пример, важи:
$$\begin{aligned}\cos z = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz} = -e^{-iz} \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz} = e^{i\pi}e^{-iz}\\ &\Leftrightarrow \quad iz = -iz + i\pi + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad 2iz = i(\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \qquad \text{а то су све већ позната реална решења.}\end{aligned}$$

- Комплексне тригонометријске функције нису ограничене, односно не постоји $M > 0$ тако да је, на пример, $|\cos z| \leq M$ за све $z \in \mathbb{C}$. Заиста, ако посматрамо строго имагинарне тачке облика $z = iy,\ y \in \mathbb{R}$ видимо да је
$$|\cos(iy)| = \left|\frac{e^{-y} + e^{y}}{2}\right| = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$
А за функцију реалне променљиве: $\dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2},\ y \in \mathbb{R}$ знамо да је неограничена.

**Дефиниција 3.10.** *Хиперболичне тригонометријске функције комплексне променљиве се дефинишу на следећи начин:*

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},\ z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},\ z \in \mathbb{C},$$
$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{ch} z \neq 0\} \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z},\ z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{sh} z \neq 0\}.$$

За комплексне хиперболичне тригонометријске функције важи:

- С обзиром да су све наведене функције дефинисане употребом експоненцијалне функције, закључујемо да су $\operatorname{sh}$ и $\operatorname{ch}$ целе функције, а $\operatorname{th}$ и $\operatorname{cth}$ аналитичке на домену дефинисаности.

- $\dfrac{d}{dz}\operatorname{sh} z = \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{e^z - e^{-z}}{2}\right) = \left(\dfrac{e^z + e^{-z}}{2}\right) = \operatorname{ch} z,\ z \in \mathbb{C}.$

- Слично, $\dfrac{d}{dz}\operatorname{ch} z = \operatorname{sh} z,\ z \in \mathbb{C}.$

- Директно по дефиницији се показује да за све $z \in \mathbb{C}$ важе следеће корисне формуле:

$$\begin{aligned} \sin(iz) &= i\operatorname{sh} z \qquad & \operatorname{sh}(iz) &= i\sin z \\ \cos(iz) &= \operatorname{ch} z \qquad & \operatorname{ch}(iz) &= \cos z. \end{aligned}$$

- Из дефиниције добијамо да важи познати идентитет: $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$. Заиста,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z &= \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{(e^z + e^{-z})^2 - (e^z - e^{-z})^2}{4} \\ &= \frac{2e^{-z} \cdot 2e^z}{4} = \frac{4e^{z-z}}{4} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

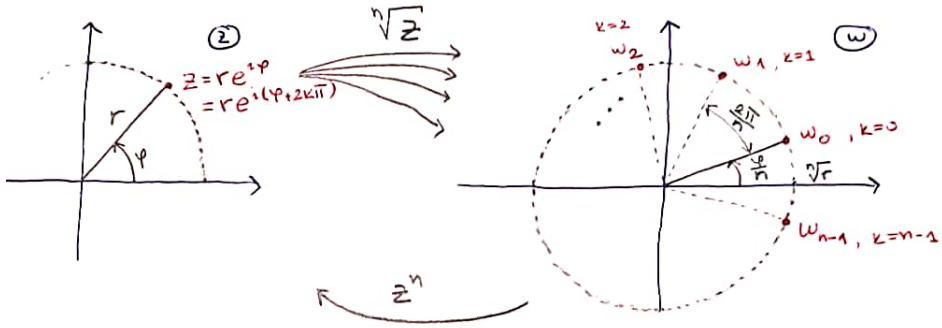
## 3.3 Вишезначне функције

У овом поглављу ћемо прецизније дефинисати појам вишезначне функције. Подсетићемо се вишезначних функција које смо већ видели и истаћи неке од проблема на које можемо да наиђемо код њих.

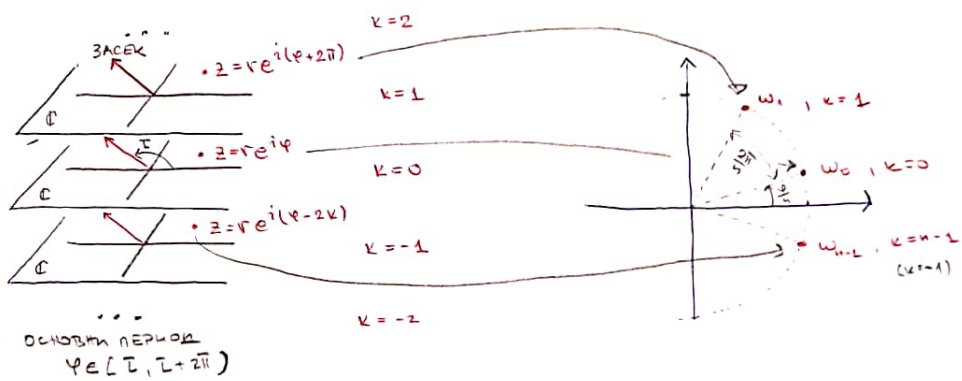
**Дефиниција 3.11.** *За функцију $f$ дефинисану над $\mathbb{C}$ кажемо да је вишезначна функција ако је за бар једно $z \in \mathbb{C}$ вредност $f(z)$ подскуп скупа $\mathbb{C}$ са бар два елемента.*

На пример, до сада смо видели да су корена функција $\sqrt[n]{z},\ z \in \mathbb{C}$ (за свако $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ има $n$ вредности) и аргумент $\operatorname{Arg} z,\ z \in \mathbb{C}$ (за свако $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ има бесконачно много вредности) вишезначне функције. Погледајмо детаљније ове две функције.

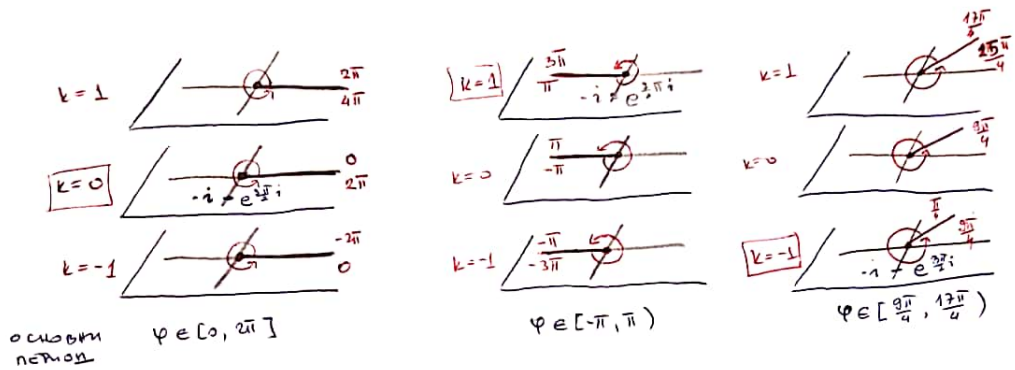
У комплексној анализи, функција $\sqrt[n]{z},\ z \in \mathbb{C}$ свако $z \neq 0$, облика $z = re^{i\varphi},\ r > 0,\ \varphi \in \mathbb{R}$ слика у $n$ различитих тачака $w_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\ k = 0, 1, \ldots, n-1$, које образују правилан $n-$тоугао у кодомену. Заиста, за свако $w_k,\ k = 0, 1, \ldots, n-1$ важи да је $w_k^n = re^{i(\varphi+2k\pi)} = re^{i\varphi} = z$. За свако фиксирано $k = 0, 1, \ldots, n-1$, пресликавање $z \mapsto w_k,\ z \in \mathbb{C}$ се назива *грана вишезначне функције* $\sqrt[n]{z},\ z \in \mathbb{C}$, док се за $k = 0$ одговарајуће пресликавање назива *главна грана*.



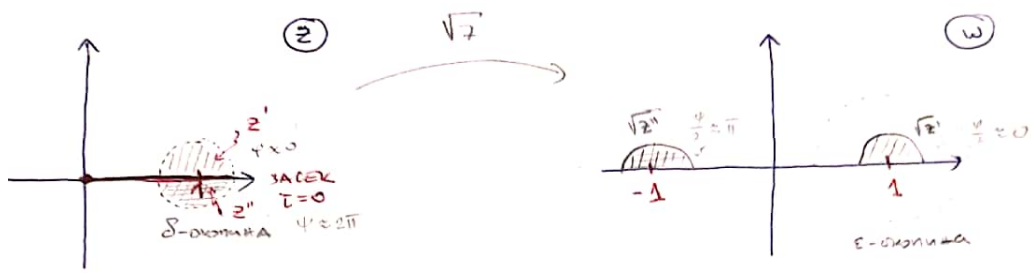

Приметимо да различити $w_k$ настају од различитих могућности да запишемо $z = re^{i(\varphi+2k\pi)},\ k \in \mathbb{Z}$. Када желимо да истакнемо која репрезентација тачке $z = re^{i(\varphi+2k\pi)},\ k \in \mathbb{Z}$ се користи, на место једне комплексне равни постављамо бесконачно много комплексних равни, где свака од њих одговара једном $k \in \mathbb{Z}$, односно периоду аргумента тачке $z$.




Такво представљање комплексне равни се назива *Риманова површ*. За прелазак са једне равни на другу користе се засеци, односно полуправе које крећу из координатног почетка, и могу да иду у било ком правцу. Тиме се истовремено дефинише и главни период за угао $\varphi \in [\tau, \tau+2\pi)$, ако је засек права $re^{i\tau},\ r > 0$. Засек је најчешће позитиван део реалне осе (и тада је главни период $\varphi \in [0, 2\pi)$) или негативан део реалне осе ($\varphi \in [-\pi, \pi)$), али може да буде и било која друга полуправа. Положај засека ће утицати и на запис броја $z \in \mathbb{C}$, нпр. $z = -i = e^{\frac{3\pi}{2}i}$ је: $e^{(\frac{3\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi)i}$, ако је $\tau = 0$; затим $e^{(-\frac{\pi}{2}+2\cdot 1\cdot\pi)i}$, ако је $\tau = -\pi$; или $e^{(\frac{7\pi}{2}+2\cdot(-1)\cdot\pi)i}$ ако је $\tau = \frac{9\pi}{4}$.




**Напомена 3.12.** У тачкама које се налазе на засеку, губи се непрекидност функције $\sqrt[n]{z},\ z \in \mathbb{C}$, зато се те тачке најчешће избацују из домена да би се очувала непрекидност. На пример, нека се засек налази на позитивном делу реалне осе, $\tau = 0$ и нека се посматра функција $\sqrt{z},\ z \in \mathbb{C}$. Посматрајмо главну грану функције $\sqrt{z}$ која комплексну раван у домену слика на горњу полураван у кодомену. То је сад функција у класичном смислу и можемо посматрати њену непрекидност. Дакле, у овом случају тачка $z_0 = 1$ се слика у тачку $w_0 = \sqrt{1} = 1$. За произвољну $\varepsilon-$околину тачке $w_0 = 1$ не постоји $\delta-$околина тачке $z_0 = 1$ тако да за свако $z \in \mathbb{C}$ такво да је $|z - 1| < \delta$ важи $|\sqrt{z} - 1| < \varepsilon$. Наиме, тачке $z'$ из $\delta-$околине тачке $z_0 = 1$ које се налазе изнад реалне осе (аргумент им је близак 0) ће се сликати у $\sqrt{z'}$ чији је аргумент око 0, док ће се тачке $z''$ из $\delta-$околине тачке $z_0 = 1$ које се налазе испод реалне осе (аргумент близак $2\pi$) сликати у $\sqrt{z''}$ чији је аргумент око $\pi$.

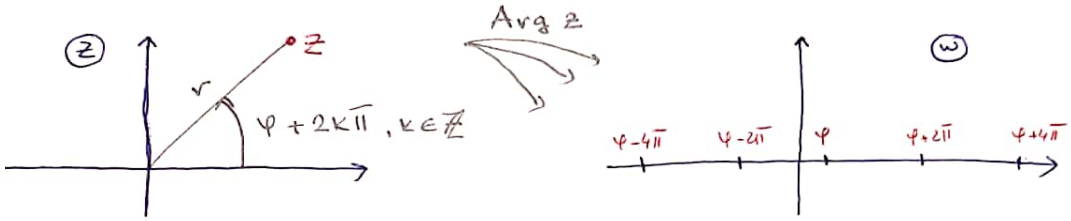



Додатно, на сличан начин може да се покаже да ако је засек на полуправој $\{re^{i\tau} \mid r \geq 0\}$, онда је свака грана корене функције $\sqrt[n]{z}$ аналитичка функција на области $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\tau} \mid r \geq 0\}$. Већ смо коментарисали да засек може да буде било која права која полази из координатног почетка, зато и свака тачка може да буде аналитичка, сем нуле. Нула се налази на сваком могућем положају засека. Дакле, $z = 0$ је сингуларитет корене функције у свим варијантама и то није изоловани, јер су сингуларитети и све тачке на засеку (ту се већ губи непрекидност, па и аналитичност). Тачку $z = 0$ називамо *тачком гранања* корене функције. С обзиром да корена функција $\sqrt[n]{z}$ има $n$ грана које се формирају кроз засеке, тачку $z = 0$ називамо прецизније *алгебарска тачка гранања $n-$тог реда*. Рецимо на крају да се и тачка $z = \infty$ узима за алгебарску тачку гранања $n-$тог реда функције $\sqrt[n]{z}$. Заиста, ако изразимо $z = 1/\xi$ и посматрамо понашање функције $\sqrt[n]{(1/\xi)}$, видимо да је $\xi = 0$ (а то значи и $z = \infty$) алгебарска тачка гранања $n-$тог реда. $\square$

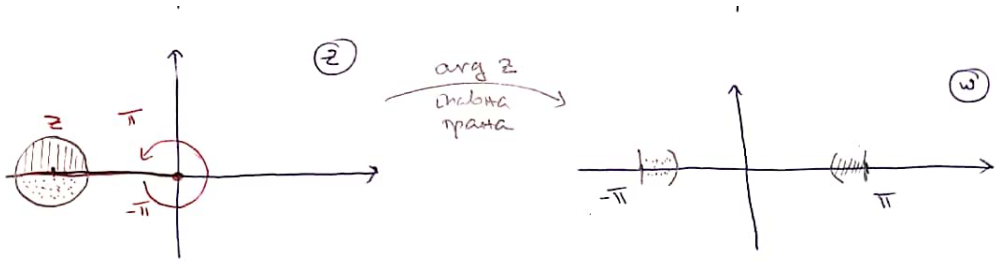
Слично, функција аргумента $\mathrm{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ дата са

$$z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi + 2k\pi)} \mapsto \mathrm{Arg}\, z = \{\varphi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\},$$

је вишезначна функција. За разлику од корене функције која свакој тачки придружује скуп са коначно много елемената, функција аргумента свакој тачки придружује бесконачан пребројив скуп. Главном граном функције аргумента се назива она код које је $k = 0$, и обележава са $\arg_\tau : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to [\tau, \tau+2\pi)$, у зависности где смо ставили засек. Ако није другачије наглашено засек се налази на негативном делу реалне осе, $\tau = -\pi$, и тада пишемо $\arg$ без индекса.




И код функције аргумента $\mathrm{Arg}_\tau$ губи се непрекидност, па и аналитичност, у тачкама засека $re^{i\tau}$, $r > 0$, па га по потреби избацујемо из домена.




Такође, као и код корене функције, тачке $z = 0$ и $z = \infty$ се називају тачке гранања функције аргумента. Овог пута, с обзиром да се функција аргумента кроз засек грана у бесконачно много грана, тачке $z = 0$ и $z = \infty$ се називају *трансцендентне тачке гранања*.

До сада смо релативно неформално и описно говорили о гранању функције, а сада ћемо дати прецизну дефиницију *гране вишезначне функције* и *тачке гранања*.

**Дефиниција 3.13.** *Функција $f$ је грана вишезначне функције $F$ на домену $D$ ако је $f$ једнозначна и непрекидна на $D$ и важи $f(z) \in F(z),\ z \in D$.*

**Дефиниција 3.14.** *Тачка $z_0$ је тачка гранања вишезначне функције $F$ ако када у домену функције око тачке $z_0$ опишемо кружницу $S = S(z_0, r)$, слика ове у кодомену $f[S]$ није затворена крива.*

*Ако се слика у кодомену затвори када кружницу $S$ опишемо $n$ пута око тачке $z_0$, онда се $z_0$ назива алгебарска тачка гранања $n-$тог реда. Ако се слика у кодомену никада не затвара, тада је $z_0$ трансцендентна тачка гранања.*

**Пример 3.15.** Покажимо да је и на основу ове дефиниције, тачка $z = 0$ алгебарска тачка гранања трећег реда функције $\sqrt[3]{z}$.

Када кружницу $e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$ пресликамо функцијом $\sqrt[3]{z}$ добијамо отворену криву (тачније кружни лук) $e^{it/3},\ t \in [0, 2\pi]$, јер $t/3$ прође само вредностима од 0 до $2\pi/3$. Да би се кружница у слици затворила, параметар $t$ мора да припада интервалу $[0, 6\pi]$, односно кружница у домену мора три пута да обиђе око $z = 0$. $\square$

**Пример 3.16.** За функцију $\sqrt[5]{\dfrac{z-2}{z-i}}$ алгебарске тачке гранања петог реда су оне тачке кад је аргумент $\dfrac{z-2}{z-i}$ једнак 0 или $\infty$, односно $z=2$ и $z=i$. $\square$

**Пример 3.17.** Функција аргумента $\operatorname{Arg} z$ има трансцедентну тачку гранања у $z=0$. Наиме, колико год пута у домену да обиђемо око нуле кружницом $e^{it},\ t\in\mathbb{R}$, слика у кодомену је права $\arg(e^{it}) = t,\ t\in\mathbb{R}$, која се поклапа са реалном осом и никад се неће затворити. $\square$

Кратке анимиране филмове о Римановој површи, засецима и гранама функције, као и другим повезаним темама у комплексној равни, можете наћи на овом линку.

## 3.4 Логаритамска функција

Логаритамску функцију желимо да дефинишемо тако да буде инверзна експоненцијалној функцији. Користећи Теорему 3.7 добијамо:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ln} z = w \quad &\Leftrightarrow \quad e^w = z\\
&\Leftrightarrow \quad e^{u+iv} = re^{i\varphi}, \quad \text{где је} \quad w=u+iv,\ u,v\in\mathbb{R}\ \wedge\ z=re^{i\varphi},\ r>0,\ \varphi\in\mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow \quad e^{u+iv} = e^{\ln r}e^{i\varphi} = e^{\ln r + i\varphi} \quad \text{(овде је } \ln r,\ r>0 \text{ реална логаритамска функција)}\\
&\Leftrightarrow \quad u+iv = \ln r + i\varphi + 2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow \quad w = u+iv = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

**Дефиниција 3.18.** *Ако је $z\neq 0$, онда је $\operatorname{Ln} z$ вишезначна функција, са бесконачно много вредности, дата са*

$$\operatorname{Ln}_{(\tau)} z := \ln|z| + i\operatorname{Arg}_{(\tau)} z = \ln|z| + i(\arg_{(\tau)} z + 2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}.$$

*Ознака $\ln_{(\tau)} z = \ln|z| + i\arg_{(\tau)} z$ је резервисана за главну грану, када је $k=0$.*

Напоменимо, одмах, да најчешће узимамо да је $\tau=-\pi$ и онда га не пишемо у индексу: $\ln z = \ln|z| + i\arg z,\ \arg z\in[-\pi,\pi)$. Сада нема забуне око ознака јер се главна грана комплексне логаритамске функције ($\ln z$) и реална логаритамска функција ($\ln|z|$) поклапају. Заиста, за $z=x\in(0,\infty)$ важи $\ln x = \ln|x| + i\arg x = \ln x + i\cdot 0$.

**Пример 3.19.** Важи:

1. $\operatorname{Ln} 3 = \ln|3| + i(\arg 3 + 2k\pi) = \ln 3 + 2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$.
2. $\ln 3 = \ln|3| + i\arg 3 = \ln 3$.
3. $\ln(-i) = \ln|-i| + i\arg(-i) = \ln 1 + i\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}i$.
4. $\operatorname{Ln}(1+i) = \ln|1+i| + i\left(\arg(1+i) + 2k\pi\right) = \ln\sqrt{2} + i\left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$. $\square$

У наставку ћемо набројати неке од особина комплексне логаритамске функције.

- Логаритамска функција је инверзна експоненцијалној функцији, односно важи:

$$z = e^{\operatorname{Ln} z} = e^{\ln z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Заиста, користећи особине комплексне експоненцијалне и реалне логаритамске функције, добијамо:

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{Ln} z} &= e^{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)} = e^{\ln|z|} e^{i \arg z} e^{2k\pi i} = |z| e^{i \arg z} \cdot 1 = z, \quad z \neq 0; \\ e^{\ln z} &= e^{\ln|z| + i \arg z} = e^{\ln|z|} e^{i \arg z} = |z| e^{i \arg z} = z, \quad z \neq 0. \end{aligned}$$

- Важи: $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Заиста, имајући на уму особине реалне логаритамске функције и комплексне вишезначне функције аргумента, добијамо:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 &= \ln|z_1| + i \operatorname{Arg} z_1 + \ln|z_2| + i \operatorname{Arg} z_2 \\ &= \ln|z_1||z_2| + i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) = \ln|z_1 z_2| + i \operatorname{Arg}(z_1 z_2) \\ &= \operatorname{Ln}(z_1 z_2). \end{aligned}$$

Слично, $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Међутим, морамо имати на уму да за главну грану ово не важи, односно:

$$\ln(z_1 z_2) \neq \ln z_1 + \ln z_2,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Наиме, за главну грану логаритамске функције важи $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, где $\arg z$ припада основном периоду, нпр. $\arg z \in [-\pi, \pi)$. На пример, ако је $\arg z_1 = \arg z_2 = \frac{2\pi}{3} \in [-\pi, \pi)$, онда је $\arg(z_1 z_2) = -\frac{2\pi}{3} \in [-\pi, \pi)$, односно $\arg(z_1 z_2) \neq \arg z_1 + \arg z_2$. Дакле,

$$\ln(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + i \arg(z_1 z_2) \neq \ln|z_1| + i \arg z_1 + \ln|z_2| + i \arg z_2 = \ln z_1 + \ln z_2.$$

- С обзиром да је $\operatorname{Ln}_\tau z = \ln|z| + i \operatorname{Arg}_\tau z,\ z \neq 0$ и да функција $\operatorname{Arg}_\tau z$ има засек, на полуправој $re^{\tau i},\ r > 0$, онда га има и комплексна логаритамска функција $\operatorname{Ln}_\tau z,\ z \neq 0$. Најчешће, ако не пишемо индекс, подразумевамо да је засек на негативном делу реалне осе, за $\tau = -\pi$.

**Теорема 3.20.** *Функција* $\ln z$ *је аналитичка на* $D^* = \mathbb{C} \setminus \{z : z = -x,\ x \geq 0\}$ *и важи*

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}, \quad z \in D^*.$$

***Доказ.*** За функцију аргумента $\arg z$ смо показали да губи непрекидност на засеку $re^{-\pi i} = -r,\ r \geq 0$, те то важи и за комплексну функцију $\ln z = \ln|z| + i \arg z$. Дакле, на засеку губимо и диференцијабилност функције $\ln z,\ z \neq 0$. Нека је $z_0 \in D^*$ (приметимо да је $D^*$ област), тада важи:

$$\frac{d}{dz} \ln z \Big|_{z=z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\ln z - \ln z_0}{z - z_0} = \lim_{w \to w_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} = \frac{1}{\frac{d}{dw} e^w \big|_{w=w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0},$$

при чему смо, код друге једнакости, користили смену $w = \ln z$, идентитет $z = e^{\ln z}$, непрекидност експоненцијалне и логаритамске функције на $D^*$, а у наставку, диференцијал експоненцијалне функције. $\square$

Сада, употребом Теореме 2.37, директно добијамо наредна два тврђења.

**Последица 3.21.** *Реална функција* $\ln|z|,\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *је хармонијска на свом домену.*

**Последица 3.22.** *Реална функција* $\arg z,\ z \in D^*$ *је хармонијска на свом домену.*

**Пример 3.23.** Одредити домен аналитичности, $D^*$, функције $f(z) = \ln(3z - i)$ и одредити $f'(z)$.

Важи, $D^* = \mathbb{C} \setminus \{z \mid 3z - i = -x,\ x \geq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{z \mid z = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}i,\ x \geq 0\}$.

Даље, $\dfrac{d}{dz}\ln(3z - i) = \dfrac{1}{3z - i} \cdot \dfrac{d}{dz}(3z - i) = \dfrac{3}{3z - i},\ z \in D^*$. □

**Пример 3.24.** Наћи ону грану, $f$, вишезначне функције $F(z) = \mathrm{Ln}_\tau(z^3 - 2)$ и одредити $\tau$, која је аналитичка у $z = 0$ и, затим, одредити $f(0)$ и $f'(0)$.

Функција $F(z) = \mathrm{Ln}_\tau(z^3 - 2) = \ln|z^3 - 2| + i(\arg_\tau(z^3 - 2) + 2k\pi)$ има засек (те ту губимо непрекидност, па и диференцијабилност) у тачкама $z \in \mathbb{C}$ за које је $z^3 - 2 = re^{\tau i},\ r \geq 0$. Како нас посебно интересује тачка $z = 0$ бираћемо $\tau$ тако да $0^3 - 2 = -2 \notin \{re^{i\tau} : r \geq 0\}$. Добри су дакле, сви засеци који нису негативни део реалне осе, тј. $\tau \neq -\pi$. Узмимо на пример да је $\tau = -\pi/4$.

Тражена грана вишезначне функције $F$ је $f(z) = \ln_{-\pi/4}(z^3 - 2)$. На основу Теореме 3.20 знамо да је $f$ аналитичка на области $D^* = \mathbb{C} \setminus \{z : z^3 - 2 = re^{-i\pi/4},\ r \geq 0\}$. Даље, важи:

$$f(0) = \ln_{-\pi/4}(-2) = \ln|-2| + i\arg_{-\pi/4}(-2) = \ln 2 + i\pi;$$
$$f'(0) = \frac{3z^2}{z^3 - 2}\Big|_{z=0} = 0.$$ □

**Напомена 3.25.** На крају напоменимо да су и за логаритамску функцију тачке $z = 0$ и $z = \infty$ *тансцендентне тачке гранања*, јер је логаритамска функција дефинисана преко функције аргумента, $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$.

Заиста, ако у домену обиђемо произвољно много пута око нуле кружницом $e^{it},\ t \in \mathbb{R}$, слика је права $\ln(e^{it}) = \ln|e^{it}| + i\arg(e^{it}) = it,\ t \in \mathbb{R}$ која се поклапа са имагинарном осом и никад се неће затворити. □

## 3.5 Комплексна степена функција

**Дефиниција 3.26.** *Комплексна (вишезначна) степена функција дата је са*

$$z^\alpha = (e^{\mathrm{Ln}\, z})^\alpha = e^{\alpha\,\mathrm{Ln}\, z},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \qquad \textit{за свако } \alpha \in \mathbb{C}.$$

**Пример 3.27.** Одредити $(-2)^i$. Важи:

$$(-2)^i = e^{i\,\mathrm{Ln}(-2)} = e^{i(\ln|-2| + i(\arg(-2) + 2k\pi))} = e^{i\ln 2 - \pi - 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Приметимо да смо као решење добили бесконачно много различитих комплексних бројева који се налазе на полуправој која креће из координатног почетка и налази се под углом $\ln 2$ у односу на позитиван део реалне осе, а на одаљености $e^{-(2k+1)\pi},\ k \in \mathbb{Z}$. □

С обзиром да су и полиноми $z^n$ $n \in \mathbb{N}$, степене функције, а за њих знамо да су једнозначне функције, размотримо за које $\alpha \in \mathbb{C}$ ће доћи до тога да се вредности вишезначне степене функције $z^\alpha$ поклопе. Две гране степене функције $z^\alpha,\ z \neq 0$ за $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ се поклапају ако је:

$$\begin{aligned} e^{\alpha(\ln z + 2k_1\pi i)} = e^{\alpha(\ln z + 2k_2\pi i)} \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha 2k_1\pi i = \alpha 2k_2\pi i + 2m\pi i \quad \text{за неко } m \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha k_1 = \alpha k_2 + m \quad \text{за неко } m \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{m}{k_1 - k_2} \quad \text{за неко } m \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Ако је $\alpha \in \mathbb{Q}$ вредности вишезначне функције $z^\alpha,\ z \neq 0$ ће се понављати, односно за $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ важи:

$$z^{m/n} = e^{\frac{m}{n}(\ln z + 2k\pi i)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Дакле:

- за $\alpha \in \mathbb{N}$, функција $z^\alpha$ је једнозначна;
- за $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, функција $z^\alpha$ за свако $z \neq 0$ узима $n$ различитих вредности;
- за $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, функција $z^\alpha$ у свакој тачки $z \neq 0$ узима бесконачно много различитих вредности.

Главна грана степене функције $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ је аналитичка тамо где је то и функција $\ln z,\ z \neq 0$. На основу Теореме 3.20, то је скуп $D^*$, и важи:

$$\frac{d}{dz} z^\alpha = \frac{d}{dz}(e^{\alpha \ln z}) = e^{\alpha \ln z} \alpha \frac{1}{z} = \alpha z^\alpha \frac{1}{z},$$

где смо на обе стране једнакости користили исту грану вишезначне функције $z^\alpha$.

## 3.6 Инверзне тригонометријске и хиперболичне тригонометријске функције

Погледајмо, на пример, како бисмо одредили инверзну функцију функцији $\cos z$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Arccos} z = w \quad &\Leftrightarrow \quad \cos w = z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^{wi} + e^{-wi}}{2} = z \quad \Leftrightarrow \quad e^{2wi} - 2ze^{wi} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{wi} = \frac{2z + \sqrt{4z^2 - 4}}{2} = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad wi = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad w = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right). \end{aligned}$$

Приметимо да је и функција $\operatorname{Arccos}$ вишезначна, јер је дефинисана употребом чак две вишезначне функције: корена и логаритма.

**Дефиниција 3.28.** *Комплексне (вишезначне) инверзне тригонометријске и хиперболичне тригонометријске функције се дефинишу, на одговарајућим доменима, на следећи начин:*

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(zi + \sqrt{1-z^2}\right) \qquad \operatorname{Arcsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$$
$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}) \qquad \operatorname{Arcch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})$$
$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{i-z}{i+z}\right) \qquad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$
$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{z+i}{z-i}\right) \qquad \operatorname{Arccth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Непрекидност и диференцијабилност инверзних тригонометријских и хиперболичних тригонометријских функција, као и до сад, можемо посматрати за појединачне гране. Тако је

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(\arccos z) &= \frac{d}{dz}\left(-i \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)\right) = -i\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right) = \frac{-i}{\sqrt{z^2-1}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}},\end{aligned}$$

где смо на почетку и крају користили главну грану $(+)$ функције корена.

Покажимо на примеру да су ово права уопштења реалних инверзних тригонометријских функција.

**Пример 3.29.** Нека је $z$ реалан број који се налази у интервалу $(-1,1)$. Показати да се тада $\arcsin z$ налази у интервалу $(-\pi/2, \pi/2)$, као што је то случај у реалној анализи.

Нека је $z = x,\ x \in (-1,1)$. Тада је $\arcsin x$, према Дефиницији 3.28, једнак

$$\arcsin x = -i \ln(xi + \sqrt{1-x^2}) = -i\left(\ln\left|xi + \sqrt{1-x^2}\right| + i \arg\left(xi + \sqrt{1-x^2}\right)\right).$$

Приметимо прво да је за $x \in (-1,1)$ вредност $\sqrt{1-x^2} \in (0,1]$, јер користимо главну $(+)$ грану корена. Модуо $\left|\sqrt{1-x^2} + ix\right| = \sqrt{(1-x^2)+x^2} = 1$, па добијамо да је $\ln\left|xi + \sqrt{1-x^2}\right| = \ln 1 = 0$. Даље, сада знамо и да се број $\sqrt{1-x^2} + ix$, за $x \in (-1,1)$, у комплексној равни налази десно од имагинарне осе, па је $\arg\left(xi + \sqrt{1-x^2}\right) \in (-\pi/2, \pi/2)$. Коначно,

$$\arcsin x = -i \cdot i \arg\left(xi + \sqrt{1-x^2}\right) = \arg\left(xi + \sqrt{1-x^2}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \qquad \square$$

**Напомена 3.30.** Приметимо да све инверзне тригонометријске и хиперболичне тригонометријске функције имају трансцендентне тачке гранања, јер су дефинисане преко логаритамске функције.

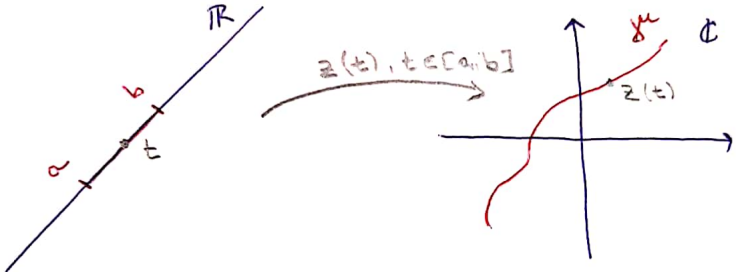
На пример, за функцију $\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$ тачке $z = i$ и $z = -i$ су трансцендентне тачке гранања, јер је аргумент наведене логаритамске функције тада једнак $0$ и $\infty$, редом.

# Глава 4

# Комплексна интеграција

Интеграл комплексне функције се дефинише на исти начин као и у реалној анализи. У првом поглављу ћемо дефинишати појам глатке криве, а затим контуре као коначног непрекидног низа глатких кривих. Затим, у другом поглављу дефинишемо комплексни интеграл дуж криве, посредством Риманових сума, већ познатог приступа из реалне анализе. У наставку ћемо се упознавати са особинама овако дефинисаног интеграла. Као посебно важно место истичемо последња два поглавља, где ћемо кроз низ теорема доказати да је функција која је диференцијабилна на области $D$ (аналитичка) истовремено и бесконачно пута непрекидно диференцијабилна на области $D$, Теорема 4.33.

## 4.1 Контура у комплексној равни




**Дефиниција 4.1.** *Скуп тачака у комплексној равни, $\gamma \subset \mathbb{C}$, се назива глатка крива ако постоји пресликавање $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ тако да је $\gamma = \{z(t) \mid t \in [a, b]\}$ и задовољава:*

1. *пресликавање $z$ је непрекидно диференцијабилно на $[a, b]$, односно ако је функција $z$ облика $z(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [a, b]$*

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t),\ t \in [a, b] \quad x, y \in C^1[a, b];$$

2. *$z'(t) \neq 0,\ t \in [a, b]$;*

3. *пресликавање $z$ је инјективно, односно крива $\gamma$ нема самопресечних тачака.*

*Скуп $\gamma \subset \mathbb{C}$ се назива затворена глатка крива ако важе услови 1. и 2. и услов*

*3'. пресликавање $z$ је инјективно за $t \in [a, b)$ и важи $z(a) = z(b)$ и $z'(a) = z'(b)$.*

*Пресликавање $z(t),\ t \in [a,b]$ назива се допустива параметризација криве $\gamma$.*

Ако крива $\gamma$ има једну допустиву параметризацију, има их и бесконачно много.

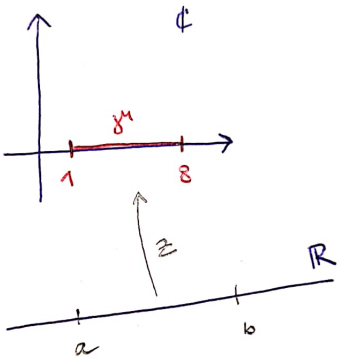
**Пример 4.2.** Одредити допустиве параметризације следећим кривама:

1. Посматрана крива може да се параметризује на следећи начин:

$$z(t) = t,\ t \in [1,8], \quad \text{јер важи}$$
$$x(t) = t,\ y(t) = 0, \quad x, y \in C^1[1,8],$$
$$z'(t) = 1 \neq 0,\ t \in [1,8]$$
$$z \text{ је инјективна;}$$

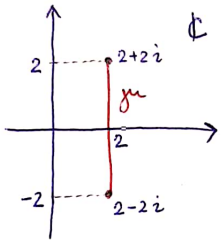
или друга допустива параметризација

$$\tilde{z}(t) = t + 1,\ t \in [0,7].$$



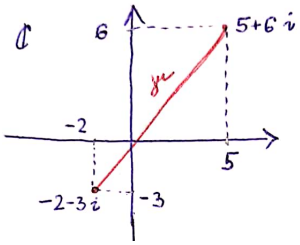

2. Посматрана крива може да се параметризује на следећи начин:

$$z(t) = 2 + it,\ t \in [-2,2], \quad \text{јер важи}$$
$$x(t) = 2,\ y(t) = t, \quad x, y \in C^1[-2,2],$$
$$z'(t) = i \neq 0,\ t \in [-2,2]$$
$$z \text{ је инјективна.}$$



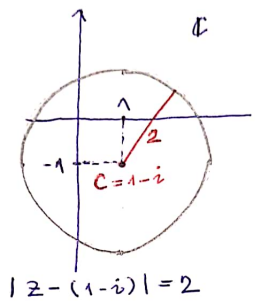

3. Посматрана крива може да се параметризује на следећи начин:

$$z(t) = 7t - 2 + i(9t - 3),\ t \in [0,1], \quad \text{јер важи}$$
$$x(t) = 7t - 2,\ y(t) = 9t - 3, \quad x, y \in C^1[0,1],$$
$$z'(t) = 7 + 9i \neq 0,\ t \in [0,1]$$
$$z \text{ је инјективна.}$$



4. Посматрана крива може да се параметризује на следећи начин:

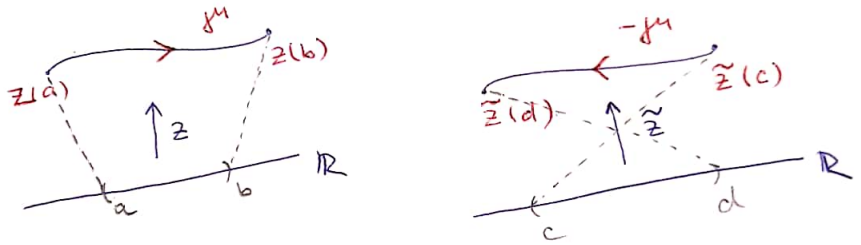
$$z(t) - (1-i) = 2e^{it},\ t \in [0, 2\pi], \quad \text{односно}$$
$$z(t) = 1 - i + 2e^{it},\ t \in [0, 2\pi], \quad \text{јер важи}$$
$$z'(t) = 2ie^{it},\ z \in C^1[0, 2\pi]$$
$$z'(t) \neq 0,\ t \in [0, 2\pi]$$
$z$ је инјективна.




□

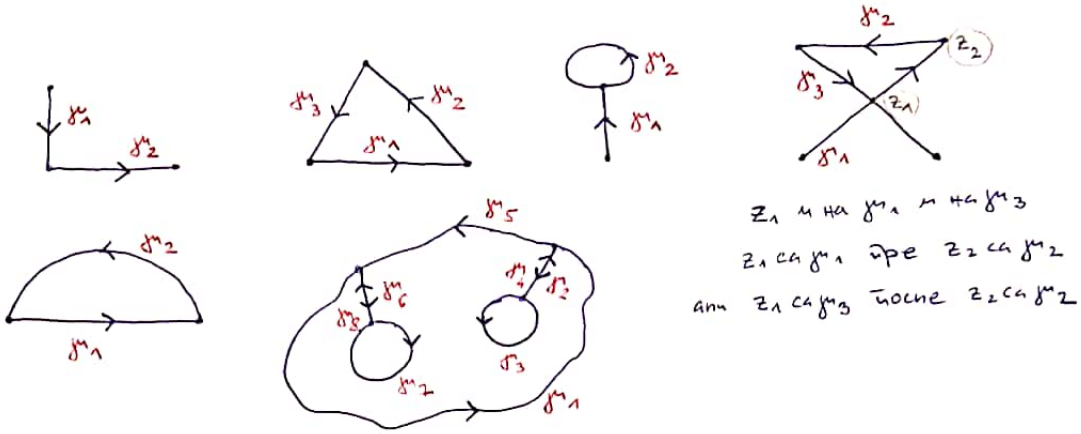
**Напомена 4.3.** Приметимо да је крива $\gamma = \{z(t) \mid t \in [a, b]\} \subset \mathbb{C}$ непрекидна слика компактног скупа $[a, b]$, те је и сама, као скуп у $\mathbb{C}$, компактна. Дакле, кад год то буде потребно, можемо користити затвореност и ограниченост криве $\gamma$.

За криву $\gamma = \{z(t) \mid t \in [a, b]\}$, параметризовану пресликавањем $z$, ћемо рећи да је оријентисана од $z(a)$ ка $z(b),\ a < b$. Друга параметризација би могла да да и друго усмерење. Тако да, кад говоримо о оријентисаним глатким кривама подразумевамо да параметризација одговара и усмерењу.




**Дефиниција 4.4.** *Кажемо да је* $\Gamma$ *контура ако је или једна тачка* $z_0$ *или коначан низ оријентисаних глатких кривих* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, *тако да се крајња тачка криве* $\gamma_k$ *поклапа са почетном тачком криве* $\gamma_{k+1},\ k = 1, 2, \ldots, n-1$. *Пишемо* $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$.

**Пример 4.5.** Погледајмо неколико примера контура $\Gamma$ :



$\square$

Параметризације кривих $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ контуре $\Gamma$ увек могу да се изаберу тако да им се домени надовезују, односно ако је $\gamma_k = \{z_k(t) \mid t \in [a_k, b_k]\},\ k = 1, 2, \ldots, n$, онда је $b_k = a_{k+1},\ k = 1, 2, \ldots, n-1$. Дакле, рећи ћемо да је контура $\Gamma$ параметризована пресликавањем $z(t),\ t \in [a, b]$, где је $a = a_1,\ b = b_n$ и $z(t) = z_k(t),\ t \in [a_k, b_k],\ k = 1, \ldots, n$; а за пресликавање $z$ важи да је непрекидно на $[a, b]$ и непрекидно диференцијабилно на $[a, b] \setminus \{b_k \mid k = 1, \ldots, n-1\}$. Користићемо ознаку $-\Gamma$ за криву супротног смера од криве $\Gamma$, односно $-\Gamma = (-\gamma_n, \ldots, -\gamma_1)$.

За контуру $\Gamma$ кажемо да је *петља* ако је затворена и, додатно, да је *проста затворена контура (петља)* ако нема самопресечних тачака (сем почетне и крајње тачке). Проста затворена контура може бити позитивно оријентисана, ако јој је смер супротан од смера кретања казаљке на сату, или негативно оријентисана, ако јој је смер исти као и смер кретања казаљке. За прецизнију дефиницију оријентације просте затворене контуре читалац се упућује на [10, Theorem 1, p.158], где се оријентација уводи употребом Жорданове теореме за криве.

Подсетимо се, дужина криве $\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) \mid t \in [a, b]\}$ се израчунава на следећи начин:

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_a^b \left| \frac{dz}{dt} \right|\, dt.$$

Дужина контуре $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ је дата са:

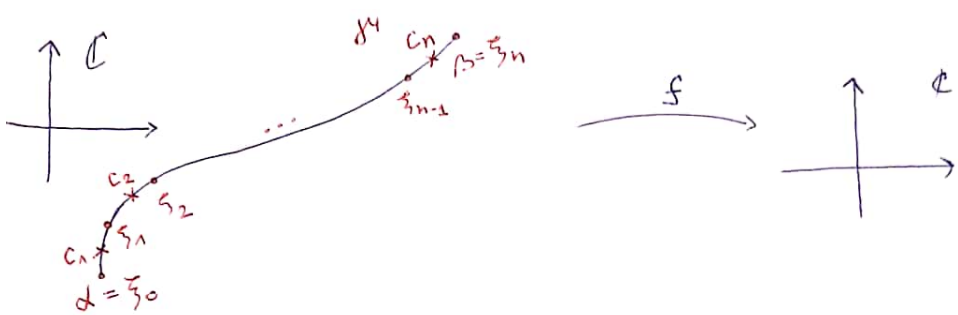
$$l(\Gamma) = l(\gamma_1 + \cdots + \gamma_n) = l(\gamma_1) + \cdots + l(\gamma_n).$$

Ова дефиниција је добра, јер је крива $\gamma$ по дефиницији слика непрекидно диференцијабилне функције $z(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [a, b]$, те посматрани интеграл увек постоји као коначан позитиван реалан број, односно важи:

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \in \mathbb{R}^+.$$

## 4.2 Интеграл по контури

Нека је $\gamma = \{z(t) \mid t \in [a, b]\}$ проста оријентисана глатка крива од $\alpha = z(a)$ до $\beta = z(b)$. Нека је $\mathcal{P}_n$ партиција криве $\gamma$ на $n$ делова тачкама $\xi_0 = \alpha, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n = \beta \in \gamma$. Означимо делове лука криве $\gamma$ са: $\widehat{\xi_{i-1}, \xi_i},\ i = 1, \ldots, n$. Највећу дужину лука дела криве $\gamma$ дате партиције $\mathcal{P}_n$ означимо са $\mu(\mathcal{P}_n) = \max\{l(\widehat{\xi_{i-1}, \xi_i}) \mid i = 1, \ldots, n\}$. Нека је на сваком делу партиције $\mathcal{P}_n$ криве $\gamma$ дата тачка $c_i \in \widehat{\xi_{i-1}, \xi_i},\ i = 1, \ldots, n$.



*Риманова сума* функције $f : \gamma \to \mathbb{C}$ која одговара партицији $\mathcal{P}_n$ криве $\gamma$ је:

$$S(\mathcal{P}_n) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(\xi_k - \xi_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta\xi_k.$$

**Дефиниција 4.6.** *Нека је $f$ комплексна функција дефинисана дуж просте оријентисане глатке криве $\gamma$. Кажемо да је $f$ интеграбилна дуж $\gamma$ ако постоји $L \in \mathbb{C}$ тако да је:*

$$L = \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n), \quad \text{за произвољан низ партиција} \quad \{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{таквих да} \quad \lim_{n\to\infty} \mu(\mathcal{P}_n) = 0.$$

*Комплексан број $L$ се назива интеграл функције $f$ дуж криве $\gamma$ и обележава:*

$$L = \int_\gamma f(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta\xi_k.$$

*Када желимо да нагласимо да се интеграција врши дуж затворене криве $\gamma$, користићемо ознаку*

$$L = \oint_\gamma f(z)\, dz.$$

Као и у реалној анализи, директно на основу дефиниције добијамо, ако су $f$ и $g$ интеграбилне дуж $\gamma$ и $c = \text{const} \in \mathbb{C}$, онда су интеграбилне и $c \cdot f,\ f \pm g$ и $-f$ и важи:

- $\displaystyle\int_\gamma c \cdot f(z)dz = c\int_\gamma f(z)dz;$
- $\displaystyle\int_\gamma (f(z) \pm g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz \pm \int_\gamma g(z)dz;$
- $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$

Такође, као за функције реалне променљиве, може се показати и следећа теорема:

**Теорема 4.7.** *Ако је комплексна функција $f$ непрекидна у свим тачкама просте оријентисане глатке криве $\gamma$, онда је $f$ и интеграбилна дуж $\gamma$.*

Приметимо да, ако би крива $\gamma$ била дата са $\gamma = \{z(t) = t \mid t \in [a, b]\}$, а комплексна функција $f$ са $f :\ \gamma = [a, b] \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, реални и комплексни интеграл би се поклопили јер је дефиниција иста:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Ова чињеница, и наведене особине интеграла, нам омогућавају да интеграл комплексне функције облика $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ запишемо и на следећи начин:

$$\int_{\gamma=[a,b]} f(z)\, dz = \int_a^b (u(t) + iv(t))\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i\int_a^b v(t)\, dt,$$

где су последња два интеграла реална.

Дакле, комплексна функција $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ облика $f(t) = u(t) + iv(t),\ t \in [a, b]$ је интеграбилна ако су интеграбилне реалне функције $u$ и $v$. Наиме, нека су $U$ и $V$ примитивне функције функција $u$ и $v$, односно нека је $U' = u$ и $V' = v$. Тада важи да је $F = U + iV$ примитивна функција функције $f$, односно да је $F' = (U + iV)' = U' + iV' = u + iv = f$.

**Теорема 4.8.** *Ако је комплексна функција непрекидна на* $[a, b]$ *и* $F' = f$ *онда важи:*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

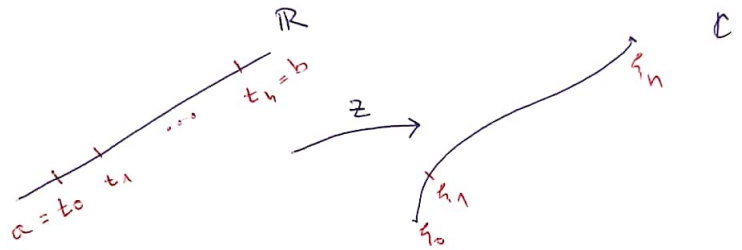
***Доказ.*** Заиста, користећи одговарајућу теорему за реалне интеграле, добијамо да важи:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt = U(b) - U(a) + i(V(b) - V(a)) = F(b) - F(a). \qquad \square$$

**Пример 4.9.** Важи: $\displaystyle\int_0^\pi e^{it}dt = -ie^{it}\Big|_0^\pi = -i(e^{i\pi} - e^0) = -i(-1-1) = 2i.$

Овде смо користили да је за непрекидну подинтегралну функцију $f(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t$, $t \in [0, \pi]$ њена примитивна функција дата са $F(t) = \sin t - i\cos t = -ie^{it},\ t \in [0, \pi]$. $\square$

До сада смо довели у везу комплексни интеграл функције $f = u + iv$ над кривом $\gamma$ која је интервал на реалној оси $[a, b] \subset \mathbb{C}$ и реалне интеграле функција $u$ и $v$ над $[a, b]$, као и њихове примитивне функције ако постоје. У наставку желимо да те резултате употребимо и за израчунавање интеграла над произвољном кривом $\gamma$. Нека је $\mathcal{P}_n = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ произвољна партиција криве $\gamma = \{z(t) \mid t \in [a, b]\}$. Тада постоји партиција $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ интервала $[a, b]$, тако да је $z(t_i) = \xi_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$.




Знајући да је оријентисана глатка крива $\gamma$ дата својом параметризацијом $z(t),\ t \in [a, b]$ која је непрекидно диференцијабилна функција, добијамо

$$\Delta\xi_k = \xi_k - \xi_{k-1} = z(t_k) - z(t_{k-1}) \approx z'(t_k)(t_k - t_{k-1}) = z'(t_k)\Delta t_k, \quad \Delta t_k \to 0.$$

Уврштавајући то у израз за одређивање интеграла комплексне функције $f$ дуж криве $\gamma$, добијамо

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta\xi_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(z(t_k))z'(t_k)\Delta t_k = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

**Теорема 4.10.** *Нека је* $f$ *непрекидна функција на простој оријентисаној глаткој кривој* $\gamma$. *Ако је* $z = z(t),\ t \in [a, b]$ *допустива параметризација криве* $\gamma$ *онда је:*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Дакле, вредност интеграла не зависи од допустиве параметризације $z(t),\ t \in [a, b]$.

**Пример 4.11.** Одредимо вредност интеграла $I_j = \oint_{S(z_0,r)} (z-z_0)^j\, dz,\ j \in \mathbb{Z}$.

Користећи параметризацију сфере $S(z_0,r) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z(t) = z_0 + re^{it},\ t \in [0,2\pi]\right\}$ добијамо

$$I_j = \oint_{S(z_0,r)} (z-z_0)^j\, dz = \int_0^{2\pi} \left(re^{it}\right)^j ire^{it}\, dt = ir^{j+1} \int_0^{2\pi} e^{i(j+1)t}\, dt, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

За $j=-1$ имамо да је $I_{-1} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$, док за $j \neq -1$ важи

$$I_j = \oint_{S(z_0,r)} (z-z_0)^j\, dz = \frac{r^{j+1}}{j+1} e^{i(j+1)t}\Big|_0^{2\pi} = \frac{r^{j+1}}{j+1}(1-1) = 0.$$

Дакле,

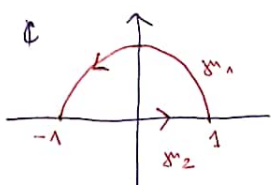
$$I_j = \oint_{S(z_0,r)} (z-z_0)^j\, dz = \begin{cases} 2\pi i, & j=-1 \\ 0, & j \neq -1. \end{cases} \qquad \square$$

**Дефиниција 4.12.** *Нека је $\Gamma$ контура $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ и функција $f$ непрекидна на $\Gamma$. Онда је интеграл по контури $\Gamma$ функције $f$ дат са:*

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$

*Ако је $\Gamma$ једна тачка онда је $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.*

**Пример 4.13.** Израчунајмо вредност интеграла $\oint_\Gamma e^z dz$, где је контура $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ састављена од криве $\gamma_1$ која је горња полукружиница $|z| = 1$, од тачке $1$ до тачке $-1$, и криве $\gamma_2$ која је дуж $[-1,1]$.




Користећи параметризације:
$\gamma_1 = \{z(t) = e^{it} \mid t \in [0,\pi]\}$ и
$\gamma_2 = \{z(t) = t \mid t \in [-1,1]\}$, добијамо:

$$\oint_\Gamma e^z dz = \int_{\gamma_1} e^z dz + \int_{\gamma_2} e^z dz = \int_0^\pi e^{e^{it}} ie^{it} dt + \int_{-1}^1 e^t\, dt = \int_1^{-1} e^s ds + \int_{-1}^1 e^t dt = 0. \qquad \square$$

Нека је $\gamma$ оријентисана глатка крива, а интеграбилна функција $f$ ограничена, односно постоји $M > 0$ тако да $|f(z)| \leq M,\ z \in \gamma$. Тада интеграл функције $f$ можемо оценити на следећи начин:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta\xi_k\right| \leq \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta\xi_k\right| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n |f(c_k)||\Delta\xi_k|$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n M|\Delta\xi_k| = M \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n |\Delta\xi_k| = M \cdot l(\gamma).$$

Директним уопштавањем овог разматрања добијамо следећу теорему.

**Теорема 4.14.** *Ако је $f$ непрекидна на контури $\Gamma$ и ако је $|f(z)| \leq M,\ z \in \Gamma$, онда важи:*

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \leq M \cdot l(\Gamma),$$

*где $l(\Gamma)$ означава дужину контуре $\Gamma$. Посебно, важи:*

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \leq \max_{z\in\Gamma} |f(z)| \cdot l(\Gamma).$$

**Пример 4.15.** Погледајмо која би била горња граница интеграла $\oint_\Gamma \frac{e^z}{z^2+1}dz$, где је $\Gamma$ позитивно оријентисана кружница $|z| = 2$.

Приметимо прво да је функција $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+1}$ непрекидна на контури $\Gamma$, јер су јој једине проблематичне тачке $i$ и $-i$ које нису на контури, те је и интеграбилна. Сада има смисла да оцењујемо вредност интеграла. Прво, за тачке $z = x + iy$ са контуре $\Gamma$ важи $|z| = 2$, те је $x \in [-2, 2]$ и

$$\left| \frac{e^z}{z^2+1} \right| = \frac{|e^z|}{|z^2+1|} \leq \frac{|e^{x+iy}|}{||z^2|-1|} = \frac{|e^x||e^{iy}|}{||z|^2-1|} \leq \frac{e^2}{3}.$$

Коначно, важи:

$$\left| \oint_\Gamma \frac{e^z}{z^2+1}dz \right| \leq \frac{e^2}{3} \cdot l(\Gamma) = \frac{4\pi e^2}{3}. \qquad \square$$

## 4.3 Независност интеграла од путање

Наредна теорема показује да, за одређену класу функција $f$, интеграл по контури $\Gamma$ уопште не зависи од саме контуре, већ само од њених крајњих тачака.

**Теорема 4.16.** *Нека је $f$ непрекидна на области $D$ и нека је $F$ њена примитивна функција на $D$; тј. нека је $\frac{d}{dz}F = f$ на $D$. Тада, за сваку контуру $\Gamma$ која цела лежи у $D$, са почетном тачком $\alpha$ и крајњом $\beta$, важи:*

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = F(\beta) - F(\alpha).$$

***Доказ.*** Нека је контура $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$, параметризована пресликавањем $z(t),\ t \in [a, b]$ и нека је $\{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ подела интервала $[a, b]$ тако да је $\gamma_k = \{z(t) \mid t \in [t_{k-1}, t_k]\},\ k = 1, 2, \ldots, n$. Важи $\alpha = z(a) = z(t_0)$ и $\beta = z(b) = z(t_n)$.

Како је $f$ непрекидна на области $D$, добијамо да је $F$ аналитичка на области $D$, па и у свакој тачки контуре $\Gamma$. Параметризација $z$ је такође диференцијабилно пресликавање у свим тачкама $[t_{k-1}, t_k],\ k = 1, \ldots, n$, те важи:

$$\frac{d}{dt}F(z(t)) = \frac{d}{dz}F(z(t))\frac{d}{dt}z(t) = F'(z(t))z'(t) = f(z(t))z'(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_k],\ k = 1, \ldots, n.$$

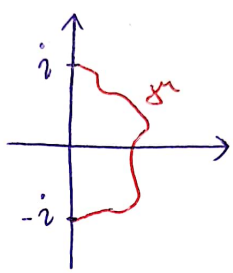
Коначно, уз Теорему 4.8 и Теорему 4.10, добијамо:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)\,dz &= \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(z(t))z'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} F(z(t))\Big|_{t_{k-1}}^{t_k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(F(z(t_k)) - F(z(t_{k-1}))\right)\\ &= F(z(t_1)) - F(z(t_0)) + F(z(t_2)) - F(z(t_1)) + \cdots + F(z(t_n)) - F(z(t_{n-1}))\\ &= F(z(t_n)) - F(z(t_0)) = F(\beta) - F(\alpha).\end{aligned}$$

□

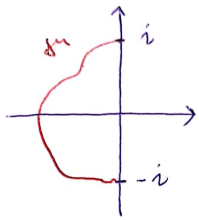
**Напомена 4.17.** Истакнимо још једном да функција $F$, из Теореме 4.16, мора бити аналитичка на $D$. Због тога ову теорему, на пример, не можемо применити на функцију $\ln z = \ln_{-\pi} z$, као примитивну функцију за функцију $\dfrac{1}{z}$, на свим областима $D$. С обзиром да $\ln z$ губи непрекидност на засеку, негативни део реалне осе, област $D$ не сме да садржи тај засек.

Посматрајмо, на пример, $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$ дуж две различите криве $\gamma$ које спајају $-i$ и $i$.

1. 


У овом случају, као примитивну функцију (која је аналитичка па и непрекидна дуж криве $\gamma$) можемо користити $\ln z$ са засеком на негативном делу реалне осе, дакле $\ln z = \ln_{-\pi} z$, јер крива $\gamma$ не садржи тачке са засека.

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz &= \ln z\Big|_{-i}^{i} = \ln i - \ln(-i)\\ &= \ln|i| + i\arg(i) - (\ln|-i| + i\arg(-i))\\ &= 0 + i\cdot\frac{\pi}{2} - \left(0 + i\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi i.\end{aligned}$$

2. 


Сада за примитивну функцију бирамо верзију функције $\ln z$ чији засек не сече криву $\gamma$, на пример $\ln_0 z$.

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz &= \ln_0 z\Big|_{-i}^{i} = \ln_0 i - \ln_0(-i)\\ &= \ln|i| + i\arg_0(i) - (\ln|-i| + i\arg_0(-i))\\ &= 0 + i\cdot\frac{\pi}{2} - \left(0 + i\cdot\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -\pi i.\end{aligned}$$

□

**Последица 4.18.** *Нека је $f$ непрекидна на области $D$ и нека има примитивну функцију на $D$. Тада за сваку петљу $\Gamma$ унутар области $D$ важи:*

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Теорема 4.7 тврди да су непрекидне функције дуж криве $\gamma \subset D$ и интеграбилне дуж $\gamma$. Међутим, још увек не знамо да ли функција $f$ која је непрекидна над $D$ има и примитивну функцију над $D$, односно да ли постоји $F$ тако да је $F' = f$ (види Напомену 4.17). Следећа теорема нам даје одговор.

**Теорема 4.19.** *Нека је функција $f$ непрекидна на области $D$. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

1. *$f$ има примитивну функцију на $D$;*
2. $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$ *за сваку петљу $\Gamma$ унутар $D$;*
3. *интеграл по контури функције $f$ не зависи од путање (зависи само од почетне и крајње тачке).*

***Доказ.***

(1. $\Rightarrow$ 2.) Посматрана импликација је Последица 4.18.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Нека су $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ две контуре унутар области $D \subset \mathbb{C}$ од тачке $\alpha \in D$ до тачке $\beta \in D$. Нека је $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$, тада је $\Gamma$ петља унутар области $D$. На основу претпоставке 2. важи:

$$0 = \oint_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{-\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz;$$

односно,

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

(3. $\Rightarrow$ 1.) Нека је тачка $z_0 \in D$ фиксирана. Како је $D$ област, онда за свако $z \in D$ постоји крива $\Gamma_{z_0 \to z}$ која спаја тачке $z_0$ и $z$ и цела лежи у $D$. Дефинишимо функцију $F(z),\ z \in D$ на следећи начин:

$$F(z) = \int_{\Gamma_{z_0 \to z}} f(\xi)\,d\xi.$$

С обзиром на услов 3, дефиниција функције $F$ не зависи од избора контуре $\Gamma_{z_0 \to z}$ која спаја $z_0$ и $z$. Због тога, за произвољно $\Delta z$ контура $\Gamma_{z_0 \to z+\Delta z}$ која спаја $z_0$ и $z + \Delta z$ може бити баш она која пролази кроз $z$. Дакле, важи:

$$F(z+\Delta z) = \int_{\Gamma_{z_0 \to z+\Delta z}} f(\xi)\,d\xi = \int_{\Gamma_{z_0 \to z}} f(\xi)\,d\xi + \int_{\Gamma_{z \to z+\Delta z}} f(\xi)\,d\xi.$$

Одавде добијамо:

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{\Gamma_{z \to z+\Delta z}} f(\xi)\,d\xi = \begin{bmatrix} \eta(t) = z + t\Delta z \\ t \in [0,1] \end{bmatrix} = \int_0^1 f(z + t\Delta z)\Delta z\,dt.$$

Приметимо да смо као параметризацију контуре $\Gamma_{z \to z+\Delta z}$ користили дуж $[z, z+\Delta z]$. То можемо да урадимо јер је $D$ област, а тиме и отворен скуп, па за свако $z \in D$ постоји $\varepsilon > 0$ тако да лопта $\{z + \Delta z :\ |\Delta z| < \varepsilon\} \subset D$. Дакле, за $\Delta z$ такво да је $|\Delta z| < \varepsilon$ важи $[z, z+\Delta z] \subset D$. Даље, важи:

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \int_0^1 f(z + t\Delta z)dt.$$

Коначно, користећи непрекидност функције $f$, добијамо да је $F$ примитивна функција функције $f$, односно важи:

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \int_0^1 f(z + t\Delta z)dt = \int_0^1 f(z)dt = f(z)\int_0^1 dt$$
$$= f(z). \qquad \square$$

## 4.4 Кошијева интегрална теорема

На основу Теореме 4.19 знамо да функција $f$ непрекидна над $D$ има примитивну функцију на $D$ ако и само ако јој је интеграл дуж сваке петље у $D$ једнак нули. Овај услов није једноставно проверити. Позната Кошијева интегрална теорема, којој је посвећено ово поглавље, тврди да аналитичке функције увек испуњавају овај услов, те да имају и примитивну функцију.

Нека је дата функција $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ на следећи начин:

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y), \quad z \in D.$$

Нека је $\Gamma$ оријентисана петља у $D$ дата параметризацијом $z : [a,b] \to D$, где је

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a,b].$$

Тада, на основу Теореме 4.10, добијамо:

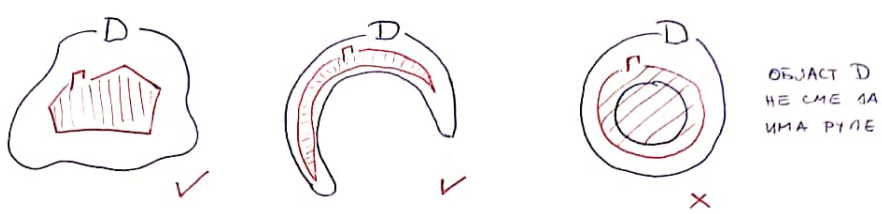
$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt = \int_a^b \Big(u\big(x(t),y(t)\big) + iv\big(x(t),y(t)\big)\Big)\Big(x'(t) + iy'(t)\Big)dt$$
$$= \int_a^b \Big(u\big(x(t),y(t)\big)x'(t) - v\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)dt$$
$$+ i\int_a^b \Big(v\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + u\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)dt.$$

Комплексни интеграл по контури $\Gamma$ смо свели на израчунавање два реална интеграла. Применом дефиниције за реални криволинијски интеграл друге врсте, добијамо:

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \oint_\Gamma \Big(u(x,y)dx - v(x,y)dy\Big) + i\oint_\Gamma \Big(v(x,y)dx + u(x,y)dy\Big).$$

**Дефиниција 4.20.** *Просто повезана област $D$ је област са следећом особином: Ако је $\Gamma$ произвољна проста (без самопресечних тачака) оријентисана затворена контура у $D$, тада унутрашњост контуре $\Gamma$ цела лежи у $D$.*

**Пример 4.21.** Прва два примера су просто повезане области, док трећи није.



$\square$

Подсетимо се познате Гринове теореме за реалне криволинијске интеграле друге врсте.

**Теорема 4.22** (Гринова теорема)**.** *Нека је $f = (u, v)$ непрекидно диференцијабилно векторско поље дефинисано на просто повезаној области $D$ и нека је $\Gamma$ позитивно оријентисана проста затворена контура у $D$. Тада:*

$$\oint_{\Gamma} (u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy) = \iint_{D'} \left( \frac{\partial}{\partial x} v(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \right) dxdy,$$

*где је област $D' \subset D$ унутрашњост контуре $\Gamma$.*

Дакле, ако је комплексна функција $f$ аналитичка (постоји $f'$) таква да је $f'$ додатно и непрекидна функција, онда применом Гринове теореме добијамо:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \iint_{D'} \left( \frac{\partial}{\partial x}(-v(x,y)) - \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \right) dxdy + i \iint_{D'} \left( \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) \right) dxdy.$$

Коначно, употребом Коши-Риманових парцијалних диференцијалних једначина, закључујемо да за непрекидно диференцијабилну комплексну функцију $f$ над просто повезаном области $D$ важи да је интеграл дуж сваке позитивно оријентисане просте затворене контуре $\Gamma$ једнак нули, односно:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0. \tag{4.1}$$

Кошијева интегрална теорема је нешто општији резултат.

**Теорема 4.23** (Кошијева интегрална теорема)**.** *Нека је функција $f$ аналитичка на просто повезаној области $D$. Тада ако је $\Gamma$ затворена контура у $D$, онда:*

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

**Напомена 4.24.** Приметимо да је Кошијева интегрална теорема општија од нашег уводног разматрања по два основа:

1. Контура $\Gamma$ не мора бити проста затворена контура, јер свака затворена контура може да се разбије на више простих затворених контура. Такође, оријентација није битна јер промена оријентације може само да промени знак вредности интеграла, који је свакако једнак нули.

2. Функција $f$ не мора да буде непрекидно диференцијабилна на просто повезаној области $D$, довољно је само да буде аналитичка. $\square$

У наставку ћемо дати доказ модификације Кошијеве интегралне теореме, познате као Гурсаова теорема, где се за контуру $\Gamma$ узима троугаона линија. У доказу ћемо истаћи како се превазилази недостатак непрекидности функције $f'$. Разматрање доказа за произвољну затворену контуру $\Gamma$ би изискивало увођење већег броја тополошких појмова, као што је хомотопија, којима бисмо прецизно формулисали појам скупљања (свођења, колапсирања) петље у тачку унутар просто повезане области $D$. Како нам ти појмови неће користити у наставку, овде ћемо се задржати на доказу Гурсаове теореме.

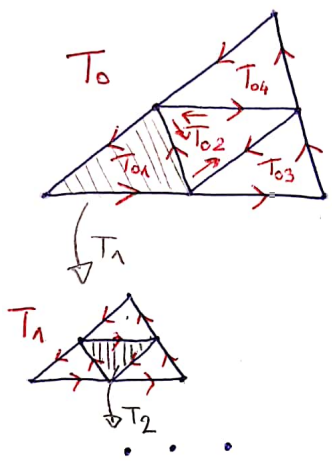
**Теорема 4.25** (Гурсаова[1] теорема)**.** *Нека је функција $f$ аналитичка на просто повезаној области $D$. Тада, ако је $T$ троугаона линија унутар области $D$, онда:*

$$\oint_T f(z)\,dz = 0.$$

***Доказ.*** Претпоставимо супротно, нека је:

$$\oint_T f(z)\,dz = J \neq 0.$$

Важи $|J| > 0$. Означимо троугаону линију $T$ са $T_0$, ради рекурентног дефинисања низа уписаних троугаоних линија $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Троугао $\overline{int\ T_0}$ можемо поделити на четири једнака троугла $\overline{int\ T_{0,i}},\ i = 1,2,3,4$, као на слици.




Важи $\oint_{T_0} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{4} \oint_{T_{0,i}} f(z)\,dz = J$. На основу особина модула, постоји $k \in \{1,2,3,4\}$, тако да је $\left|\oint_{T_{0,k}} f(z)\,dz\right| \geq \frac{|J|}{4}$. Означимо ту троугаону линију са $T_1$. Даље, на исти начин, троугао $\overline{int\ T_1}$ можемо поделити на четири, једнака $\overline{int\ T_{1,i}},\ i = 1,2,3,4$, тако да за једну од троуганих линија, а означићемо је са $T_2$, важи $\left|\oint_{T_2} f(z)\,dz\right| \geq \frac{|J|}{4^2}$. Истим поступком, у $n-$том кораку издвојићемо троугаону линију $T_n$ за коју важи

$$\left|\oint_{T_n} f(z)\,dz\right| \geq \frac{|J|}{4^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

За низ троуглова $\{\overline{int\ T_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ важи:

$$\mathbb{C} \supset D \supset \overline{int\ T_0} \supset \overline{int\ T_1} \supset \cdots \supset \overline{int\ T_n} \supset \ldots \qquad \text{и} \qquad p(\overline{int\ T_n}) = \frac{p(\overline{int\ T})}{4^n} \to 0,\ n \to \infty,$$

где смо са $p(\overline{int\ T_n})$ обележили површину троугла $\overline{int\ T_n},\ n \in \mathbb{N}$. Дакле, $\{\overline{int\ T_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ је низ уметнутих затворених скупова у комплетном простору $\mathbb{C}$, и њихов дијаметар иде у нулу, те на основу Канторовог принципа, Теорема 1.14, постоји:

$$z_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{int\ T_n} \subset D. \tag{4.2}$$

Како је $D$ област, постоји $r > 0$ тако да лопта $B(z_0, r) \subseteq D$. С обзиром на начин дефинисања низа троугаоних линија $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за $n \geq n_0$ важи $T_n \subset B(z_0, r)$.

Функција $f : D \to \mathbb{C}$ је аналитичка на области $D$, те важи $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$, тј.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\ \delta > 0) \quad \left(|z - z_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon\right).$$

[1] Едуард Гурсат (Édouard Goursat, 1858 – 1936) - француски математичар

Без умањења општости, за дато $\varepsilon > 0$, можемо претпоставити да је $r = \delta$, те за све $z \in T_n,\ n \geq n_0$ важи $|z - z_0| < r = \delta$, што имплицира

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|.$$

Функција $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ је полином првог степена, те је непрекидно диференцијабилна на $D$, па на основу (4.1) добијамо да је $\int_{T_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))dz = 0$. Одавде је:

$$\left| \oint_{T_n} f(z)\, dz \right| = \left| \oint_{T_n} \big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big)\, dz \right| \leq \oint_{T_n} \big|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big|\ |dz|$$
$$\leq \oint_{T_n} \varepsilon\, |z - z_0|\, |dz| \leq \varepsilon\, l(T_n) \oint_{T_n} |dz| \leq \varepsilon\, l^2(T_n) = \varepsilon \left( \frac{l(T)}{2^n} \right)^2.$$

Овде смо користили да за дужину троугаоне линије $T_n$ важи $l(T_n) = \dfrac{l(T)}{2^n},\ n \in \mathbb{N}$, као и да за све $z \in T_n,\ n \in \mathbb{N}$ важи $|z - z_0| \leq l(T_n)$, на основу (4.2). Даље, одавде добијамо

$$\frac{|J|}{4^n} \leq \left| \oint_{T_n} f(z)\, dz \right| \leq \varepsilon \left( \frac{l(T)}{2^n} \right)^2,\ \varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad |J| \leq \varepsilon\, (l(T))^2,\ \varepsilon > 0.$$

Коначно, како ово важи за свако $\varepsilon > 0$, закључујемо $|J| = 0$, што је у контрадикцији са почетном претпоставком. Дакле, важи $J = 0$. □

Комбиновањем Кошијеве интегралне теореме и Теореме 4.19, долазимо до наредног тврђења.

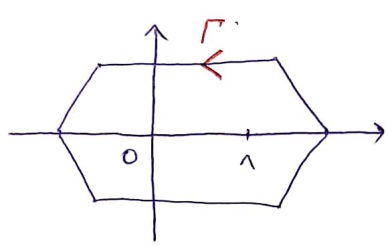
**Теорема 4.26.** *На просто повезаној области $D$ аналитичка функција $f$ има примитивну функцију, интеграл по контури унутар $D$ не зависи од путање већ само од крајњих тачака путање и интеграл по петљи унутар $D$ је једнак нули.*

**Пример 4.27.** Одредити $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 - 9}\, dz$.

Приметимо да је функција $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2 - 9}$ аналитичка на просто повезаној области $D$, која садржи унутрашњост криве $|z| = 2$, односно на области $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2 + \varepsilon\},\ \varepsilon > 0$. Наиме, важи: $f'(z) = \dfrac{e^z(z^2 - 2z - 9)}{(z^2 - 9)^2}$, те извод не постоји једино у тачкама $-3, 3 \notin D$. Кружница $|z| = 2$ је затворена контура унутар $D$. Сада, директно на основу Кошијеве интегралне теореме, закључујемо

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 - 9}\, dz = 0.$$ □

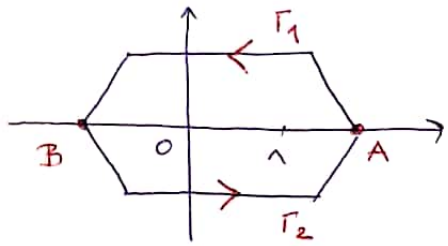
**Пример 4.28.** Одредити $\displaystyle\oint_{\Gamma} \frac{3z - 2}{z^2 - z}\, dz$, где је контура $\Gamma$ дата на слици.

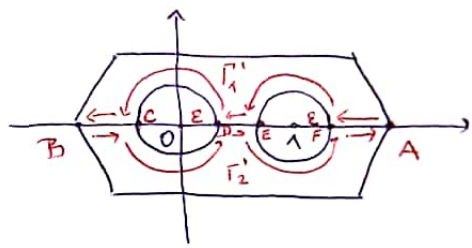


Извод подинтегралне функције $f(z) = \dfrac{3z-2}{z^2-z}$ је функција $f'(z) = \dfrac{-3z^2+4z-1}{(z^2-z)^2}$, те $f$ није диференцијабилна једино у тачкама 0 и 1. Међутим, ове тачке се налазе унутар контуре $\Gamma$. Идеја, која је уобичајена у оваквим ситуацијама, је да контуру $\Gamma$ напишемо као $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, те имамо:

$$\oint_\Gamma \frac{3z-2}{z^2-z}\,dz = \int_{\Gamma_1} \frac{3z-2}{z^2-z}\,dz + \int_{\Gamma_2} \frac{3z-2}{z^2-z}\,dz.$$

Даље, како је $f$ аналитичка на области $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, на основу Теореме 4.26, контуре $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, дуж којих интегралимо, можемо заменити контурама $\Gamma_1'$ и $\Gamma_2'$, као на слици, јер заобилазе тачке 0 и 1.




$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \frac{3z-2}{z^2-z}\,dz &= \int_{\Gamma_1'} \frac{3z-2}{z^2-z}\,dz + \int_{\Gamma_2'} \frac{3z-2}{z^2-z}\,dz \\
&= \left(\int_{AF} + \int_{\widehat{FE}} + \int_{ED} + \int_{\widehat{DC}} + \int_{CB}\right) \frac{3z-2}{z^2-z}\,dz \\
&\qquad + \left(\int_{BC} + \int_{\widehat{CD}} + \int_{DE} + \int_{\widehat{EF}} + \int_{FA}\right) \frac{3z-2}{z^2-z}\,dz \\
&= \oint_{|z|=\varepsilon} \frac{3z-2}{z^2-z}\,dz + \oint_{|z-1|=\varepsilon} \frac{3z-2}{z^2-z}\,dz.
\end{aligned}$$

Користећи да је $\dfrac{3z-2}{z^2-z} = \dfrac{2}{z} + \dfrac{1}{z-1}$, добијамо

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \frac{3z-2}{z^2-z}\,dz &= \oint_{|z|=\varepsilon} \left(\frac{2}{z} + \frac{1}{z-1}\right) dz + \oint_{|z-1|=\varepsilon} \left(\frac{2}{z} + \frac{1}{z-1}\right) dz \\
&= \oint_{|z|=\varepsilon} \frac{2}{z}\,dz + \oint_{|z|=\varepsilon} \frac{1}{z-1}\,dz + \oint_{|z-1|=\varepsilon} \frac{2}{z}\,dz + \oint_{|z-1|=\varepsilon} \frac{1}{z-1}\,dz.
\end{aligned}$$

Даље, функција $\dfrac{2}{z}$ је аналитичка унутар $|z-1| = \varepsilon$, а $\dfrac{1}{z-1}$ унутар $|z| = \varepsilon$, те Кошијева интегрална теорема имплицира да су други и трећи интеграл једнаки нули. Важи:

$$\oint_\Gamma \frac{3z-2}{z^2-z}\,dz = \oint_{|z|=\varepsilon} \frac{2}{z}\,dz + \oint_{|z-1|=\varepsilon} \frac{1}{z-1}\,dz,$$

где су обе кружнице позитивно оријентисане. Одређивање почетног интеграла завршавамо директним израчунавањем последња два интеграла. Користићемо следеће параметризације: у првом интегралу $z(t) = \varepsilon e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$, а у другом $z(t) = 1 + \varepsilon e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$.

$$\oint_\Gamma \frac{3z-2}{z^2-z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{2}{\varepsilon e^{it}}\, i\varepsilon e^{it}\,dt + \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\varepsilon e^{it}-1}\, i\varepsilon e^{it}\,dt = 3i\int_0^{2\pi} dt = 6\pi i.$$

Напоменимо да ћемо у наредном поглављу формулисати и доказати Кошијеве интегралне формуле које нуде једноставнији начин за решавања овог задатка (видети Пример 4.31). $\square$

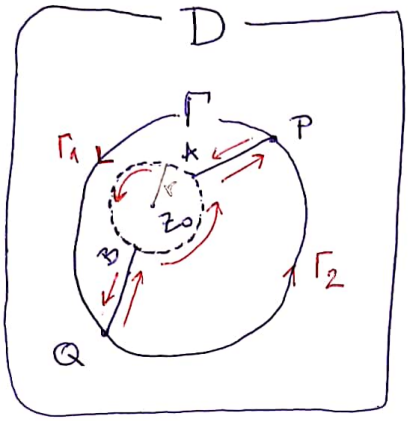
## 4.5 Кошијеве интегралне формуле

Кошијеве интегралне формуле, које дефинишемо и доказујемо у овом поглављу, имплицирају бројне јако важне последице за аналитичке функције. Због тога је ово једно од најважнијих поглавља ове књиге. Да бисмо то одмах истакли набројаћемо неке од њих: бесконачна диференцијабилност аналитичких функција, Лијувилова теорема (једине ограничене целе функције су константне функције), Основни став алгебре и Принцип максимума модула (максимум функције $|f|$ се увек достиже на рубу ограниченог домена $D$).

**Теорема 4.29** (Кошијева интегрална формула)**.** *Нека је $\Gamma$ проста затворена позитивно оријентисана контура. Ако је $f$ аналитичка у некој просто повезаној области $D$ која садржи контуру $\Gamma$ и ако је $z_0$ у унутрашњости $\Gamma$, онда:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

***Доказ.*** Подинтегрална функција $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ је аналитичка у свим тачкама области $D$ сем у тачки $z_0$. Тачка $z_0$ је у унутрашњости контуре $\Gamma$, те постоји $r > 0$ тако да $B(z_0, r) \subset int\, \Gamma$.




Нека су $P$ и $Q$ две произвољне тачке на контури $\Gamma$, које је деле на два дела, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Нека је $A = S(z_0, r) \cap Pz_0$ и $B = S(z_0, r) \cap Qz_0$, као на слици.
Теорема 4.26, с обзиром на аналитичност подинтегралне функције ван тачке $z_0$, тврди да се интеграл дуж контуре $\Gamma_1$ може заменити интегралом дуж контуре $PA \cup \widehat{AB} \cup BQ$, а интеграл дуж $\Gamma_2$ интегралом дуж $QB \cup \widehat{BA} \cup AP$, где су $\widehat{AB}$ и $\widehat{BA}$ одговарајући делови кружнице $S(z_0, r)$. Важи:

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz &= \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz + \int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \\
&= \left( \int_{PA} + \int_{\widehat{AB}} + \int_{BQ} \right) \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz + \left( \int_{QB} + \int_{\widehat{BA}} + \int_{AP} \right) \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \\
&= \oint_{S(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz,
\end{aligned}$$

где је кружница $S(z_0, r)$ позитивно оријентисана као и контура $\Gamma$. Даље, посматрани интеграл можемо трансформисати на следећи начин:

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_{S(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_{S(z_0,r)} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz + \oint_{S(z_0,r)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz.$$

Користећи параметризацију $z = z_0 + re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$, први интеграл са десне стране горње једнакости је једнак:

$$\oint_{S(z_0,r)} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}\, dt}{re^{it}} = f(z_0)\, i\, 2\pi.$$

Ако покажемо да други интеграл тежи нули када $r \to 0$, тврђење Кошијеве интегралне формуле је доказано. Прво, како је $f$ непрекидна функција, а $S(z_0, r)$ компактан скуп, постоји $M_r > 0$ тако да важи:

$$M_r = \max\{|f(z) - f(z_0)| \mid z \in S(z_0, r)\}.$$

Ово, даље, имплицира

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| = \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \leq \frac{M_r}{r}, \qquad z \in S(z_0, r).$$

Важи:

$$\left|\oint_{S(z_0,r)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz\right| \leq \oint_{S(z_0,r)} \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| |dz| \leq \frac{M_r}{r}\, l(S(z_0, r)) = \frac{M_r}{r} 2r\pi = 2M_r\pi.$$

Функција $f$ је непрекидна, па $f(z) \to f(z_0)$ када $z \to z_0$, односно $M_r \to 0$ када $r \to 0$. Дакле,

$$\left|\oint_{S(z_0,r)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz\right| \leq 2M_r\pi \to 0, \qquad r \to 0.$$

Коначно, имајући у виду да смо кружницу $S(z_0, r)$ бирали произвољно са јединим условом да је $B(z_0, r) \subset int\,\Gamma$, и да први интеграл не зависи од полупречника $r > 0$, добијамо:

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz &= \lim_{r\to 0} \oint_{S(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0)\, 2\pi i + \lim_{r\to 0} \oint_{S(z_0,r)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz = f(z_0)\, 2\pi i + 0 \\ &= f(z_0)\, 2\pi i,\end{aligned}$$

односно,

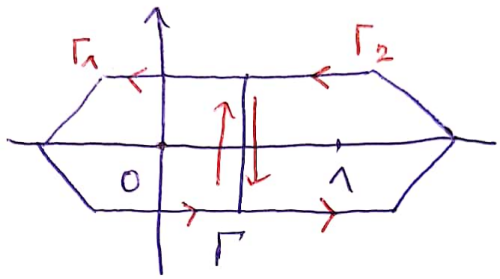
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \qquad \square$$

**Пример 4.30.** Одредимо вредност интеграла $\displaystyle\oint_{|z-2|=1} \frac{\cos z}{z^2 - 4}\, dz$, ако је крива позитивно оријентисана.

Подинтегралну функцију можемо написати у облику $\dfrac{\frac{\cos z}{z+2}}{z - 2}$, с обзиром да је $f(z) = \dfrac{\cos z}{z + 2}$ аналитичка унутар криве дуж које интегралимо, $|z - 2| = 1$. Приметимо да би проблем, сингуларитет, функције $f$ могла била и тачка $z = -2$, али она овог пута лежи далеко ван кружнице $|z - 2| = 1$. Применом Кошијеве интегралне формуле добијамо:

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{\cos z}{z^2 - 4}\, dz = \oint_{|z-2|=1} \frac{\frac{\cos z}{z+2}}{z - 2}\, dz = 2\pi i \left(\frac{\cos z}{z + 2}\right)\Big|_{z=2} = 2\pi i\, \frac{\cos 2}{4} = \frac{\pi i \cos 2}{2}. \qquad \square$$

**Пример 4.31.** Прикажимо краће решење интеграла из Примера 4.28 применом Кошијеве интегралне формуле.




Поделимо, прво, контуру $\Gamma$ на две позитивно оријентисане затворене контуре $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, тако да је $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, као на слици.

Користећи, опет, да је $\dfrac{3z-2}{z^2-z} = \dfrac{2}{z} + \dfrac{1}{z-1}$ и поделу контуре $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, добијамо:

$$\oint_\Gamma \frac{3z-2}{z^2-z}\,dz = \oint_\Gamma \left(\frac{2}{z} + \frac{1}{z-1}\right) dz = \oint_{\Gamma_1} \left(\frac{2}{z} + \frac{1}{z-1}\right) dz + \oint_{\Gamma_2} \left(\frac{2}{z} + \frac{1}{z-1}\right) dz$$
$$= \oint_{\Gamma_1} \frac{2}{z}\,dz + \oint_{\Gamma_1} \frac{1}{z-1}\,dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{2}{z}\,dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{1}{z-1}\,dz.$$

Даље, функција $\dfrac{2}{z}$ је аналитичка унутар контуре $\Gamma_2$, а $\dfrac{1}{z-1}$ унутар $\Gamma_1$, те Кошијева интегрална теорема имплицира да су други и трећи интеграл једнаки нули. Важи:

$$\oint_\Gamma \frac{3z-2}{z^2-z}\,dz = \oint_{\Gamma_1} \frac{2}{z}\,dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{1}{z-1}\,dz,$$

где су обе контуре $\Gamma_i,\ i = 1, 2$ позитивно оријентисане. Коначно, примена Кошијеве интегралне формуле имплицира:

$$\oint_\Gamma \frac{3z-2}{z^2-z}\,dz = 2\pi i\,(2)\Big|_{z=0} + 2\pi i\,(1)\Big|_{z=1} = 6\pi i. \qquad \square$$

Наредна теорема је техничког карактера, мада веома важна и сама за себе. Напоменимо да у њеној формулацији, за разлику од Кошијеве интегралне формуле, не тражимо аналитичност функције $f$, као ни затвореност контуре $\Gamma$.

**Теорема 4.32.** *Нека је $g$ непрекидна на контури $\Gamma$ и нека за свако $z \notin \Gamma$ важи:*

$$G(z) = \int_\Gamma \frac{g(\xi)}{\xi - z}\,d\xi.$$

*Тада је $G$ аналитичка ван $\Gamma$ и извод је дат са:*

$$G'(z) = \int_\Gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^2}\,d\xi.$$

***Доказ.*** Напоменимо прво да је пресликавање $G : \mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{C}$ добро дефинисано, јер је за све $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ подинтегрална функција $\dfrac{g(\xi)}{\xi - z}$ непрекидна дуж контуре $\Gamma$, те је на основу Теореме 4.7, и интеграбилна.

Даље, наш задатак је да покажемо да је функција $G$ диференцијабилна у свакој тачки $z \notin \Gamma$, па тиме и аналитичка, јер је $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ отворен скуп. Прецизније, треба да покажемо да је:

$$G'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{G(z+\Delta z) - G(z)}{\Delta z} = \int_\Gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi, \quad z \notin \Gamma.$$

За $z \notin \Gamma$ важи:

$$\frac{G(z+\Delta z) - G(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \int_\Gamma g(\xi) \left( \frac{1}{\xi - z - \Delta z} - \frac{1}{\xi - z} \right) d\xi = \int_\Gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)}\, d\xi,$$

где је $\Delta z$ довољно мало да и $z + \Delta z \notin \Gamma$. Нека је:

$$J_{\Delta z} = \frac{G(z+\Delta z) - G(z)}{\Delta z} - \int_\Gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi.$$

Хоћемо $\lim\limits_{\Delta z \to 0} J_{\Delta z} = 0$. Важи:

$$J_{\Delta z} = \int_\Gamma g(\xi) \left( \frac{1}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)} - \frac{1}{(\xi - z)^2} \right) d\xi = \Delta z \int_\Gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)^2}\, d\xi.$$

Користећи непрекидност функције $g$ дуж (компактне) контуре $\Gamma$, закључујемо да постоји $M > 0$ тако да $M = \max\{|g(\xi)| : \xi \in \Gamma\}$. Нека је $d = \min\{|z - \eta| : \eta \in \Gamma\}$. С обзиром да $z \notin \Gamma$ и да је $\Gamma$ затворен скуп, добијамо да је $d > 0$. Сада, за $\xi \in \Gamma,\ z \notin \Gamma$ и $\Delta z < d/2$, важи:

$$|\xi - z - \Delta z| \geq ||\xi - z| - |\Delta z|| \geq \left| d - \frac{d}{2} \right| = \frac{d}{2}.$$

Коначно, важи:

$$\lim_{\Delta z \to 0} |J_{\Delta z}| \leq \lim_{\Delta z \to 0} |\Delta z| \frac{M}{\frac{d}{2} d^2} \int_\Gamma |d\xi| = \frac{2M\, l(\Gamma)}{d^3} \lim_{\Delta z \to 0} |\Delta z| = 0,$$

чиме је доказ завршен. □

На потпуно аналоган начин могли смо показати исто тврђење полазећи од функције:

$$H(z) = \int_\Gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi, \quad z \notin \Gamma,$$

и закључити да је онда $H$ аналитичка и да је $H' = G''$ облика:

$$H'(z) = 2 \int_\Gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^3}\, d\xi, \quad z \notin \Gamma.$$

Дакле, ако је $g$ непрекидна дуж контуре $\Gamma$ и ако је функција $G : \mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{C}$ дата са:

$$G(z) = \int_\Gamma \frac{g(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \quad z \notin \Gamma,$$

онда је $G^{(n)},\ n \in \mathbb{N}$ аналитичка и $n-$ти извод је дат са:

$$G^{(n)}(z) = n! \int_\Gamma \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi, \quad z \notin \Gamma.$$

Важна последица ових разматрања је да је извод аналитичке функције опет аналитичка функција. Дакле, за комплексну функцију која је аналитичка (има извод на отвореном скупу) важи да јој је и извод аналитичка функција, односно извод је непрекидан и има свој извод, и тако редом. Наиме, ако је функција $f$ аналитичка у тачки $z_0$, онда постоји $r > 0$ тако да је аналитичка на области $D = B(z_0, 2r)$, те је аналитичка и на позитивно оријентисаној кружници $\Gamma = S(z_0, r) \subset D$. На основу Кошијеве интегралне формуле добијамо да за све $z$ из унутрашњости криве $\Gamma$ важи:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \quad z \in B(z_0, r).$$

Сада, како је функција $f$ аналитичка, па и непрекидна, на основу Теореме 4.32 и разматрања након ње, добијамо да је $f^{(n)},\ n \in \mathbb{N}$ аналитичка функција и да је:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi, \quad z \in B(z_0, r).$$

Наведена аргументација директно имплицира наредно тврђење, погодним изборима контуре $\Gamma$.

**Теорема 4.33.** *Ако је функција $f$ аналитичка на области $D$, онда сви њени изводи $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ постоје и аналитичке су функције на $D$.*

Примењујући додатно Коши-Риманове парцијалне диференцијалне једначине на аналитичку функцију $f = u + iv$ на области $D$, добијамо да за све $(x, y) \in D$ важи:

$$f'(z) = f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y),$$

$f'$ непрекидна на $D$ и постоји $f''$ на $D$,

$$f''(z) = f''(x + iy) = u_{xx}(x, y) + iv_{xx}(x, y) = -u_{yy}(x, y) - iv_{yy}(x, y) = v_{xy}(x, y) - iu_{xy}(x, y),$$

$f''$ непрекидна на $D$ и постоји $f^{(3)}$ на $D$, и тако даље, и томе слично.

**Теорема 4.34.** *Ако је функција $f = u + iv$ аналитичка на области $D$, онда постоје сви парцијални изводи реалних функција $u$ и $v$ и непрекидни су на $D$.*

**Теорема 4.35** (Теорема Морере[2])**.** *Ако је $f$ непрекидна на области $D$ и ако за сваку петљу $\Gamma \subset D$ важи:*

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = 0,$$

*онда је функција $f$ аналитичка на $D$.*

***Доказ.*** Функција $f$ непрекидна на области $D$, таква да јој је интеграл дуж произвољне петље $\Gamma \subset D$ једнак нули, има примитивну функцију $F$ на $D$, на основу Теореме 4.19. Важи: $F'(z) = f(z),\ z \in D$. Коначно, аналитичност функције $F$ ($F$ има извод на области $D$) имплицира аналитичност функције $f$ на области $D$, применом Теореме 4.33. □

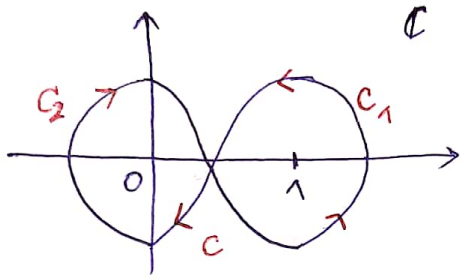
Закључимо ово поглавље теоремом која сабира сва претходна разматрања.

**Теорема 4.36** (Уопштена Кошијева интегрална формула)**.** *Ако је $f$ аналитичка унутар и на позитивно оријентисаној простој затвореној контури $\Gamma$ и ако је $z$ унутар $\Gamma$, онда:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi, \quad z \in int\,\Gamma,\ n \in \mathbb{N}.$$

[2]Ђачинто Морера (Giacinto Morera, 1856–1909) - италијански математичар и инжењер

**Пример 4.37.** Одредити вредност интеграла $I = \oint_C \frac{2z+1}{z(z-1)^2}\,dz$, где је контура $C$ дата на слици.




Поделимо посматрану контуру $C$ на две, $C = C_1 + C_2$, тако да је $C_1$ позитивно оријентисана петља којој је 1 у унутрашњости, а $C_2$ негативно оријентисана петља којој је 0 у унутрашњости. Тада, на основу уопштене Кошијеве интегралне формуле, важи:

$$I = \oint_{C_1} \frac{\frac{2z+1}{z}}{(z-1)^2}\,dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{2z+1}{(z-1)^2}}{z}\,dz = 2\pi i \left(\frac{2z+1}{z}\right)'\Bigg|_{z=1} - 2\pi i \left(\frac{2z+1}{(z-1)^2}\right)\Bigg|_{z=0}$$
$$= 2\pi i\,\frac{-1}{z^2}\Bigg|_{z=1} - 2\pi i = -4\pi i. \qquad \square$$

## 4.6 Оцене аналитичке функције, Принцип максимума модула

**Теорема 4.38** (Кошијева оцена аналитичке функције)**.** *Нека је функција $f$ аналитичка унутар и на кружници $S(z_0, R)$, полупречника $R > 0$ са центром у $z_0$. Нека је $M > 0$ такво да је*

$$|f(z)| \le M, \quad z \in S(z_0, R),$$

*онда, за изводе функције $f$ у тачки $z_0$, важи:*

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \frac{n!\,M}{R^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

***Доказ.*** Користећи Уопштену Кошијеву интегралну формулу, Теорема 4.36, и особине функције $f$ добијамо:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_{S(z_0,R)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi\right| \le \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^{n+1}}\,2R\pi = \frac{n!\,M}{R^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

**Теорема 4.39** (Лијувилова[3] теорема)**.** *Једина цела функција која је ограничена је константна функција.*

***Доказ.*** С обзиром да је функција $f$ цела, за свако $z \in \mathbb{C}$ и свако $R > 0$, важи да је $f$ аналитичка унутар и на кружници $S(z, R)$, полупречника $R$ са центром у $z$. Такође, функција $f$ је и ограничена, односно постоји $M > 0$, тако да је $|f(z)| \le M,\ z \in \mathbb{C}$. Применом Кошијеве оцене, Теорема 4.38, добијамо:

$$\left|f'(z)\right| \le \frac{M}{R}, \quad z \in \mathbb{C},\ R > 0.$$

Када пустимо $R \to \infty$, добијамо $|f'(z)| \le 0,\ z \in \mathbb{C}$, односно $|f'(z)| = 0,\ z \in \mathbb{C}$. Коначно, Теорема 2.33 имплицира да је функција $f$ константна. $\square$

[3] Жозеф Лијувил (Joseph Liouville, 1809–1882) - француски математичар

**Теорема 4.40** (Основни став алгебре)**.** *Сваки неконстантан полином са комплексним коефицијентима има најмање једну нулу у* $\mathbb{C}$.

***Доказ.*** Нека је дат полином

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Претпоставимо, супротно, да полином $P$ нема ни једну нулу у $\mathbb{C}$, тј. $P(z) \neq 0,\ z \in \mathbb{C}$. Дефинишимо функцију $f(z) = \dfrac{1}{P(z)},\ z \in \mathbb{C}$. Функција $f$ је цела, јер је полином $P$ цела функција и нема ни једну нулу. Ако покажемо да је функција $f$ ограничена, на основу Лијувилове теореме, Теорема 4.39, добијамо да је $f$ константна функција. Но, тада би за полином $P$ важило: $P(z) = \dfrac{1}{f(z)} = const$, што је контрадикција.

Покажимо још да је функција $f$ ограничена. Важи:

$$\frac{P(z)}{z^n} = a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \xrightarrow[z\to\infty]{} a_n,$$

одакле добијамо да постоји $\rho > 0$ тако да важи:

$$\left|\frac{P(z)}{z^n}\right| \geq \frac{|a_n|}{2}, \quad |z| \geq \rho.$$

Даље, имамо:

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq \frac{2}{|a_n||z|^n} \leq \frac{2}{|a_n|\rho^n}, \quad |z| \geq \rho.$$

Дакле, функција $f$ је ограничена за $|z| \geq \rho$. Међутим, функција $f$ је непрекидна, те је ограничена и на компактном скупу $|z| \leq \rho$, чиме је доказ завршен. □

Кошијева оцена аналитичке функције, Теорема 4.38, истиче да вредност аналитичке функције $f$, унутар кружнице $S(z_0, R)$, може да се ограничи вредностима функције $f$ на самој кружници. Ова чињеница је уопштена Принципом максимума модула, којем је посвећен остатак овог поглавља.

Нека је функција $f$ аналитичка у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$, то значи да постоји $R > 0$ тако да је $f$ аналитичка и на затвореном кругу $\overline{B(z_0, R)}$. На основу Кошијеве интегралне формуле, Теорема 4.29, важи:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{S(z_0,R)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{Re^{it}}\, iRe^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\, dt.$$

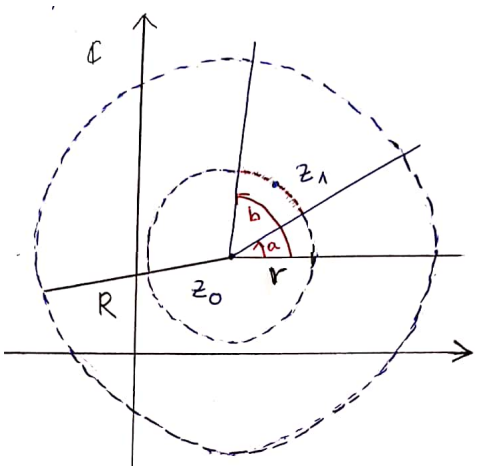
Непрекидност функције $f$ на компактном скупу $S(z_0, R)$, имплицира да постоји $M > 0$ тако да $M = \max\{|f(z)| :\ z \in S(z_0, R)\}$. Одавде, даље закључујемо да и вредност $|f(z_0)|$ мора бити мања од $M$, јер

$$|f(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\, dt\right| \leq \frac{1}{2\pi} M \int_0^{2\pi} |dt| = M.$$

Верзије Принципа максимума модула се, у својој основи, увек ослањају на ову чињеницу да аналитичка функција максималну вредност модула увек достиже на рубу области аналитичности.

**Лема 4.41.** *Нека је функција $f$ аналитичка на лопти $B(z_0, R)$ и нека је максимална вредност функције $|f|$ на $B(z_0, R)$ баш $|f(z_0)|$. Тада је $|f|$ константна функција на $B(z_0, R)$.*

***Доказ.*** Претпоставимо супротно, да функција $|f|$ није константна на $B(z_0, R)$.




Тада постоји $z_1 \in B(z_0, R)$ тако да је:

$$|f(z_1)| < |f(z_0)|.$$

Нека је $r = |z_0 - z_1|$. Тада $z_1 \in S(z_0, r)$. Непрекидност функције $|f|$ имплицира да постоји интервал $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ тако да је:

$$|f(z_0 + re^{it})| < |f(z_0)|, \quad t \in [a, b].$$

Тада, важи:

$$\begin{aligned}|f(z_0)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + re^{it})\right|\,|dt| \\ &< \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^a |f(z_0)|\,|dt| + \int_a^b |f(z_0)|\,|dt| + \int_b^{2\pi} |f(z_0)|\,|dt|\right) = \frac{1}{2\pi}\,|f(z_0)| \cdot 2\pi = |f(z_0)|,\end{aligned}$$

што је контрадикција. Коначно, претпоставка није тачна, односно функција $|f|$ је константна на $B(z_0, R)$. □

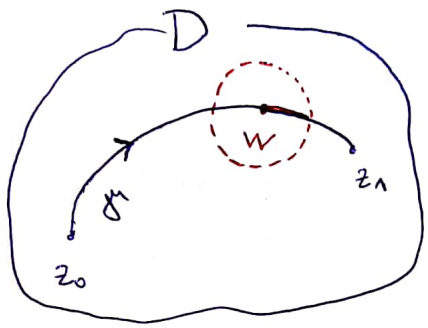
**Теорема 4.42** (Принцип максимума модула 1)**.** *Ако је функција $f$ аналитичка на области $D$ и $|f|$ достиже максималну вредност у $z_0 \in D$, онда је $f$ константна функција на $D$.*

***Доказ.*** Приметимо прво, ако покажемо да је функција $|f|$ константна на области $D$, онда је то и сама аналитичка функција $f = u + iv$. Наиме, из $|f| = const$ следи $|f|^2 = u^2 + v^2 = const$. Парцијални изводи константне функције се анулирају, те је

$$\begin{aligned}\frac{\partial |f|^2}{\partial x} &= 2uu_x + 2vv_x = 0 \\ \frac{\partial |f|^2}{\partial y} &= 2uu_y + 2vv_y = 0.\end{aligned}$$

Ако на другу једначину применимо Коши-Риманове једначине, $u_y = -v_x$ и $v_y = u_x$, затим прву једначину помножимо са $v$, а другу са $-u$ и саберемо, добијамо да је $(u^2 + v^2)v_x = 0$. Ако су $u, v \neq 0$, онда је $v_x = 0$. Ако су $u, v = 0$, онда је функција $f = u + iv = 0$ константна, па је доказ већ завршен. На сличан начин можемо показати и да је $u_x = 0$. Дакле, важи $f' = u_x + iv_x = 0$ на области $D$, па је $f = const$ на $D$, применом Теореме 2.33.

Покажимо сад да је $|f|$ константна на $D$. Претпоставимо супротно, да $|f|$ није константна на области $D$ и да достиже свој максимум у тачки $z_0 \in D$. Тада постоји $z_1 \in D$, тако да је $|f(z_1)| < |f(z_0)|$. Како је $D$ повезан скуп, постоји крива $\gamma$ која спаја тачке $z_0$ и $z_1$. Из $|f(z_0)| > |f(z_1)|$ и $f$ непрекидна, следи да постоји $w \in \gamma$ где функција $|f|$ први пут креће да опада, односно:




1. $|f(z)| = |f(z_0)|$ за тачке $z \in \gamma$ које се налазе пре $w$;

2. и постоји $r > 0$ тако да је $|f(z)| < |f(z_0)|$ за тачке $z \in \gamma$ које су након $w$ и $z \in B(w, r)$.

Јасно, на основу непрекидности функције $|f|$, важи: $|f(w)| = |f(z_0)|$.

Коначно, ако применимо Лему 4.41 на функцију $f$ и лопту $B(w, r)$, добијамо да је $|f| = const$ на $B(w, r)$, а то је у контрадикцији са условом 2. Дакле, $|f|$ је константна функција, а тиме је константна и функција $f$. □

**Теорема 4.43** (Принцип максимума модула 2)**.** *Нека је $D$ ограничена област. Ако је функција $f$ непрекидна на затварању области $D$, односно $\overline{D}$, и аналитичка на области $D$, онда $f$ достиже максималну вредност модула на рубу од $D$, тј. $\partial D$.*

***Доказ.*** Скуп $\overline{D}$ је компактан, те непрекидна функција $|f|$ достиже своју максималну вредност на $\overline{D}$. Нека је $z_0 \in \overline{D}$ тачка у којој се достиже максимум функције $|f|$. Ако $z_0 \in \partial D$, онда је доказ завршен. Ако тачка $z_0 \in D$, онда на основу Принципа максимума модула, Теорема 4.42, знамо да је функција $f$ константна на $D$, па и на $\overline{D}$ због непрекидности, те опет можемо рећи да се максимум функције $|f|$ достиже и у некој од тачака са руба, $\partial D$. □

**Пример 4.44.** Наћи максималну вредност од $|z^2 + 3z - 1|$ на кругу $|z| \leq 1$.

Функција $f(z) = z^2 + 3z - 1$ је цела, те задовољава услове за примену Принципа максимума модула, Теорема 4.43, на скупу $|z| \leq 1$, на основу ког закључујемо да се максимална вредност од $|f(z)|$ достиже на рубу области, за $|z| = 1$. За тачке $z$, такве да $|z| = 1$, важи $z = e^{it},\ t \in [0, 2\pi)$. Даље, функција $|f|$ је максимална тамо где је то и $|f|^2$, а за тачке са руба области, $|z| = 1$, рачунамо

$$|z^2 + 3z - 1|^2\Big|_{|z|=1} = (z^2 + 3z - 1)\overline{(z^2 + 3z - 1)}\Big|_{|z|=1} = (e^{2it} + 3e^{it} - 1)(e^{-2it} + 3e^{-it} - 1)$$
$$= 11 - 2 \cdot \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} = 11 - 2\cos(2t).$$

Реална функција $11 - 2\cos(2t)$ достиже максимум тамо где је $\cos(2t) = -1$, односно за $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$ и $t_2 = \dfrac{3\pi}{2}$. Дакле, тачке у којима функција $|z^2 + 3z - 1|$ достиже максималну вредност су $z_1 = e^{i\pi/2} = i$ и $z_2 = e^{i3\pi/2} = -i$. Коначно, тражена максимална вредност функције $|z^2 + 3z - 1|$ је $|i^2 + 3i - 1| = |-2 + 3i| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$. □

# Глава 5

# Аналитичке функције представљене преко степених редова

Раније смо видели да наизглед наивна дефиниција аналитичности функције у тачки $z_0$, као функције која (само) има извод на некој околини тачке $z_0$, имплицира да та функција има све изводе на тој области и да су сви они непрекидни. У овом поглављу ћемо показати још и више, да аналитичку функцију можемо да развијемо у Тејлоров ред у околини тачке $z_0$. Подсетимо се, у реалној анализи је функција називана аналитичка ако је могла да се развије у Тејлоров ред, те ћемо након овог поглавља оправдати употребу термина аналитичка у комплексној анализи. У наставку поглавља, размотрићемо понашање функције $f$ која је аналитичка у некој околини тачке $z_0$, изузев у самој тачки $z_0$. Таква тачка $z_0$ се назива изоловани сингуларитет функције $f$.

## 5.1 Функционални низови и редови

Приметимо прво да низ функција $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots,\ z \in D \subseteq \mathbb{C}$ за неке $z \in D \subseteq \mathbb{C}$ може да конвергира, док за неке друге $z \in D \subseteq \mathbb{C}$ може да дивергира.

**Пример 5.1.** Посматрајмо низ функција $\left\{\left(\frac{z}{2i}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Директно на основу Примера 1.16 добијамо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n = \begin{cases} 0, & |z| < |2i| = 2 \\ 1, & z = 2i \\ \text{не постоји}, & |z| = 2,\ z \neq 2i \\ \infty, & |z| > 2. \end{cases}$$

□

Слично важи и за комплексне функционалне редове $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z),\ z \in D \subseteq \mathbb{C}$.

**Пример 5.2.** Нека је $z_0 \neq 0$ фиксиран комплексан број. Испитајмо конвергенцију функционалног реда $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_0}\right)^j$. Имајући на уму Лему 1.22, добијамо

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_0}\right)^j = \begin{cases} \dfrac{z_0}{z_0 - z}, & |z| < |z_0| \\ \text{дивергира}, & |z| \geq |z_0|. \end{cases}$$

$\square$

Да би низ или ред аналитичких функција конвергирао ка аналитичкој функцији, презентовани тип конвергенције, који се назива тачкаста конвергенција, није довољно јак.

**Дефиниција 5.3.** *Низ комплексних функција $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ униформно конвергира ка функцији $f$ на скупу $T \subseteq \mathbb{C}$, ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за $n > n_0$ важи*

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \qquad \text{за све} \quad z \in T.$$

*Аналогно, ред комплексних функција $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ униформно конвергира ка функцији $f$ на скупу $T$, ако одговарајући низ парцијалних сума униформно конвергира ка $f$ на $T \subseteq \mathbb{C}$.*

Есенцијална особина униформне конвергенције је да за произвољно $\varepsilon > 0$, може да се одреди $n_0 \in \mathbb{N}$, независно од $z$ из скупа $T$, тако да је разлика $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ за све $n > n_0$ и $z \in T$. Јасно, униформна конвергенција имплицира тачкасту.

За сад знамо, Пример 5.2, да ред $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^j$ тачкасто конвергира на отвореној лопти $|z| < |z_0|$. Испитајмо и унифромну конвергенцију.

**Пример 5.4.** Покажимо да ред $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^j$ униформно конвергира на свакој затвореној лопти $|z| \leq r$, где је $r < |z_0|$.

Знамо да је тачкаста граница овог реда $\dfrac{z_0}{z_0 - z}$, $|z| < |z_0|$, те ће нам она бити и кандидат за униформну границу. Нека је $|z| \leq r < |z_0|$. Тада, јасно, важи:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) \quad \left| \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{z}{z_0}\right)^j - \frac{z_0}{z_0 - z} \right| = \frac{|z/z_0|^{n+1}}{|1 - z/z_0|} \leq \frac{|r/z_0|^{n+1}}{1 - |r/z_0|} < \varepsilon,$$

јер је $\left|\dfrac{r}{z_0}\right| < 1$. $\square$

На крају наведимо теорему, која је уопштење упоредног критеријума за конвергенцију бројних редова.

**Теорема 5.5** (Вајерштрасов[1] М-тест)**.** *Нека је $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ конвергентан ред позитивних реалних бројева. Нека је $j_0 \in \mathbb{N}_0$. Нека је $f_j,\ j \in \mathbb{N}_0$ низ комплексних функција таквих да*

$$|f_j(z)| \leq M_j, \quad \text{за све} \quad z \in T \subseteq \mathbb{C},\ j \geq j_0.$$

*Тада ред $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ униформно конвергира на скупу $T$.*

[1]Карл Теодор Вилхелм Вајерштрас (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815–1897) - немачки математичар

## 5.2 Тејлоров ред аналитичке функције

Циљ овог поглавља је да покажемо да аналитичке функције, како су дефинисане у комплексној анализи, могу да се развију у степени ред, и тиме да оправдамо њихово име.

Ако бисмо желели да одредимо полином $p_n$ који апроксимира (добро описује) аналитичку функцију $f$ у околини тачке $z_0 \in \mathbb{C}$, тако да је $p_n^{(k)}(z_0) = f^{(k)}(z_0),\ k = 0, 1, \ldots, n$, добили бисмо полином

$$p_n(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Сада се поставља питање да ли кад $n \to \infty$ полином $p_n$ све боље описује аналитичку функцију $f$ и да ли би ред који би се, евентуално, добио у граничном процесу био једнак самој функцији $f$.

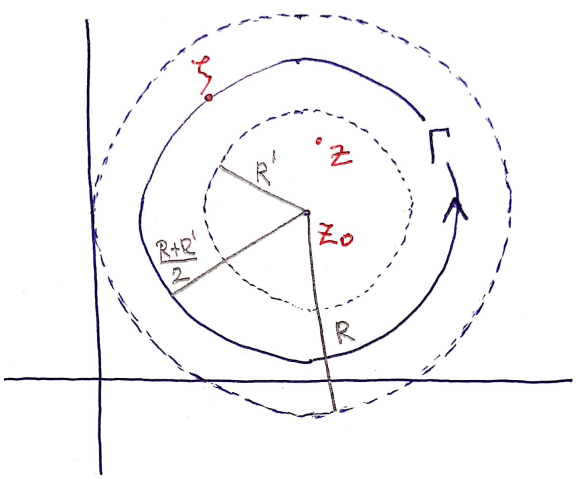
**Дефиниција 5.6.** *Ако је функција $f$ аналитичка у $z_0 \in \mathbb{C}$, тада се ред*

$$f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z - z_0)^j + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z - z_0)^j$$

*назива Тејлоров[2] ред функције $f$ у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$. Ако је $z_0 = 0$, посматрани ред се назива и Маклоренов[3] ред функције $f$.*

**Теорема 5.7** (Тејлоров ред)**.** *Нека је функција $f$ аналитичка на отвореној лопти $|z - z_0| < R$. Тада Тејлоров ред функције $f$ у тачки $z_0$ конвергира ка $f$ за све $z$ из лопте $|z - z_0| < R$. Додатно, конвергенција је униформна на свим затвореним лоптама $|z - z_0| \leq R' < R$.*

***Доказ.*** Приметимо, прво, да када покажемо униформну конвергенцију Тејлоровог реда функције $f$ ка функцији $f$ на произвољној затвореној лопти $|z - z_0| \leq R' < R$, добијамо и тачкасту конвергенцију у свим тачкама $z$ из отворене лопте $|z - z_0| < R$. Нека је дато $0 < R' < R$. Покажимо тражену униформну конвергенцију на затвореној лопти $|z - z_0| \leq R'$.




Нека је $\Gamma$ позитивно оријентисана кружница

$$|z - z_0| = (R + R')/2.$$

Кошијева интегрална формула, Теорема 4.29, имплицира да за све $z \in \overline{B\,(z_0, R')}$ важи:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

У наставку ћемо, део подинтегралне функције, израз $\dfrac{1}{\xi - z}$ написати у другом облику, користећи геометријску прогресију, на следећи начин:

[2]Брук Тејлор (Brook Taylor, 1685–1731) - енглески математичар
[3]Колин Маклорен (Colin Maclaurin, 1698 – 1746) - шкотски математичар

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}} \cdot \frac{1}{\xi - z_0}$$
$$= \left( 1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n + \frac{\left(\dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}} \right) \cdot \frac{1}{\xi - z_0},$$

где је, јасно, $\left|\dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| < 1$. Сада, Кошијева интегрална формула добија облик

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi + \frac{z - z_0}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2}\, d\xi + \frac{(z - z_0)^2}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^3}\, d\xi + \dots$$
$$\cdots + \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi + T_n(z),$$

где је остатак $T_n(z)$, уз мало рачуна, облика

$$T_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \cdot \frac{(z - z_0)^{n+1}}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi.$$

Даље, употребом уопштене Кошијеве интегралне формуле, Теорема 4.36, добијамо да је за све $n \in \mathbb{N}$ и $z \in \overline{B\,(z_0, R')}$

$$f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{1!} f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \cdots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + T_n(z)$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j + T_n(z).$$

Дакле, остало је још да покажемо да остатак $T_n$ тежи у нулу, када $n \to \infty$, униформно на затвореној лопти $|z - z_0| \leq R'$. Важи:

$$|z - z_0| \leq R' \quad \wedge \quad |\xi - z_0| = \frac{R + R'}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|z - z_0|}{|\xi - z_0|} \leq \frac{2R'}{R + R'}$$

као и:

$$|\xi - z| \geq \frac{R + R'}{2} - R' = \frac{R - R'}{2}.$$

Коначно, користећи ознаку $M = \max_{\xi \in \Gamma} |f(\xi)|$, добијамо да је за све $z \in \overline{B\,(z_0, R')}$

$$|T_n(z)| \leq \frac{1}{|2\pi i|} \oint_\Gamma \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|} \cdot \frac{|z - z_0|^{n+1}}{|\xi - z_0|^{n+1}}\, d\xi \leq \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{2}{R - R'} \cdot \left(\frac{2R'}{R + R'}\right)^{n+1} \oint_\Gamma |d\xi|$$
$$\leq \frac{M(R + R')}{R - R'} \left(\frac{2R'}{R + R'}\right)^{n+1}.$$

С обзиром да је $\left|\dfrac{2R'}{R + R'}\right| < 1$, за свако $\varepsilon > 0$ може се одредити $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за $n > n_0$ остатак $|T_n(z)| < \varepsilon$ за све $z \in \overline{B\,(z_0, R')}$. $\square$

Приметимо да ова теорема имплицира да Тејлоров ред функције $f$ у $z_0$ конвергира ка функцији $f$ у свим тачкама највеће отворене лопте око $z_0$, на којој је $f$ аналитичка.

**Теорема 5.8.** *Нека је функција $f$ аналитичка у $z_0 \in \mathbb{C}$. Тејлоров ред функције $f'$ у тачки $z_0$ се добија диференцирањем члан по члан Тејлоровог реда функције $f$ у $z_0$ и он конвергира на истој отвореној лопти на којој конвергира и Тејлоров ред функције $f$, односно важи*

$$f'(z) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j\right)' = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j\right)' = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{f^{(j)}(z_0)}{(j-1)!}(z-z_0)^{j-1}.$$

***Доказ.*** Функција $f$ је аналитичка у $z_0 \in \mathbb{C}$, те је аналитичка и функција $f'$ у $z_0$. Дакле, $f'$ можемо развити у Тејлоров ред у околини тачке $z_0$, Теорема 5.7, на следећи начин:

$$f'(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(f')^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j+1)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j,$$

што смо и хтели да докажемо. С обзиром да су $f$ и $f'$ аналитичке на истој области, Теорема 4.33, јасно је да је и област конвергенције за оба Тејлорова реда једнака, јер су то највеће отворене лопте на којима су посматране функције аналитичке. □

**Пример 5.9.** Посматрајмо главну грану логаритамске функције $\ln z$ у околини тачке $z_0 = 1$. Непрекидност, па и диференцијабилност, се губи у тачки $z = 0$, тако да је највећа лопта на којој је она аналитичка $|z-1| < 1$. Како је $\ln 1 = 0$ и важи:

$$\frac{d}{dz^j}\ln z = \frac{(-1)^{j+1}(j-1)!}{z^j}, \quad j \in \mathbb{N},$$

добијамо да је развој у Тејлоров ред функције $\ln z$, у околини тачке $z_0 = 1$, дат са

$$\ln z = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}(j-1)!}{j!}(z-1)^j = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}(z-1)^j, \quad |z-1| < 1.$$

Развој функције $\dfrac{1}{z}$ у Тејлоров ред у околини тачке $z_0 = 1$, користећи да је

$$\frac{d}{dz^j}\frac{1}{z} = \frac{(-1)^j j!}{z^{j+1}}, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

је дат са

$$\frac{1}{z} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j j!}{j!}(z-1)^j = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\,(z-1)^j, \quad |z-1| < 1.$$

Напоменимо да је област конвергенције, опет, отворена лопта $|z-1| < 1$, јер функција $\dfrac{1}{z}$ није дефинисана у тачки $z = 0$. На крају, приметимо да је $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$ и да за њихове Тејлорове редове важи:

$$(\ln z)' = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}(z-1)^j\right)' = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{j+1}}{j}(z-1)^j\right)' = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\,(z-1)^j = \frac{1}{z},\ |z-1| < 1.$$

□

Директно по дефиницији, слично као у претходном примеру, може се показати да важе следећи Маклоренови развоји елементарних функција:

$$e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\, z^j, \qquad z \in \mathbb{C};$$

$$\sin z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\, z^{2j+1}, \qquad z \in \mathbb{C};$$

$$\cos z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}\, z^{2j}, \qquad z \in \mathbb{C};$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{j=0}^{\infty} z^j, \qquad |z| < 1;$$

$$\ln(1+z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j}\, z^j, \qquad |z| < 1;$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} z^j, \qquad |z| < 1,$$

где је $\binom{\alpha}{j} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!},\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

У наставку ћемо формулисати још две теореме које могу да помогну приликом одређивања Тејлорових развоја.

**Теорема 5.10.** *Нека су $f$ и $g$ аналитичке функције у тачки $z_0 \in \mathbb{C}$, и нека је $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$ и $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (z-z_0)^j$ у некој околини тачке $z_0$. Тада је, у истој тој околини тачке $z_0$,*

1. *за $c = const \in \mathbb{C}$, Тејлоров ред функције $cf$ дат са $cf(z) = \sum_{j=0}^{\infty} ca_j (z-z_0)^j$;*
2. *Тејлоров ред функције $f \pm g$ дат са $f(z) \pm g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j \pm b_j)\,(z-z_0)^j$.*

**Дефиниција 5.11.** *Кошијев производ два реда $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$ и $\sum_{j=0}^{\infty} b_j (z-z_0)^j$ је (формални) ред $\sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-z_0)^j$, где је*

$$c_j = \sum_{l=0}^{j} a_{j-l} b_l = a_j b_0 + a_{j-1} b_1 + \dots + a_0 b_j, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

**Теорема 5.12.** *Нека су $f$ и $g$ аналитичке функције у околини тачке $z_0 \in \mathbb{C}$ са својим Тејлоровим развојима у ред $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$ и $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (z-z_0)^j$. Тада је Тејлоров ред функције $fg$ у околини тачке $z_0$ дат Кошијевом формулом за производ ова два реда*

$$f(z)g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{j} a_{j-l} b_l \right) (z-z_0)^j,$$

*и он сигурно конвергира бар на мањој од области конвергенције ова два реда.*

На крају овог одељка, напоменимо још једном да развијање аналитичке функције у Тејлоров ред потврђује да се аналитичка функција увек може експлицитно изразити као функција од $z$, при чему нису додатно потребни $\bar{z}, x, y$ и слично.

## 5.3 Тејлорови и степени редови

Тејлорови редови су истовремено и степени редови.

**Дефиниција 5.13.** *Функционални ред облика* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j,\ z \in D$ *се назива степени ред. Константе* $a_j,\ j \in \mathbb{N}_0$ *се називају коефицијенти степеног реда.*

Одмах се намећу нека од питања. За које $z \in \mathbb{C}$ степени редови конвергирају? Да ли су граничне функције, суме, аналитичке функције? Да ли је развијање функције у степени ред јединствено, односно да ли је сваки степени ред и Тејлоров ред? У овом поглављу одговорићемо на ова питања.

**Теорема 5.14.** *За сваки степени ред* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$ *постоји реалан број* $R,\ 0 \leq R \leq \infty$, *који зависи само од коефицијената* $a_j,\ j \in \mathbb{N}_0$, *тако да важи:*

1. *ред конвергира унутар отворене лопте* $|z-z_0| < R$;
2. *ред униформно конвергира на свакој затвореној лопти* $|z-z_0| \leq R',\ R' < R$;
3. *ред дивергира на* $|z-z_0| > R$.

*Број* $R$ *се назива полупречник конвергенције степеног реда.*

Приметимо да теорема не говори ништа о конвергенцији посматраног степеног реда на самој кружници $|z-z_0| = R$. Формални доказ ове теореме ћемо изоставити, али ћемо показати наредну лему, која осветљава зашто је област конвергенције увек лопта.

**Лема 5.15.** *Ако степени ред* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ *конвергира у некој тачки чији је модуо* $r$, *онда конвергира и на отвореној лопти* $|z| < r$.

***Доказ.*** По претпоставци постоји $z_1 \in \mathbb{C}$, са особином $|z_1| = r$, тако да ред $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z_1^j$ конвергира. Ово даље имплицира да су чланови реда ограничени, односно постоји $M > 0$ тако да је

$$|a_j z_1^j| = |a_j| r^j \leq M, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Сада, за $|z| < r$ важи

$$|a_j z^j| = |a_j| r^j \left(\frac{|z|}{r}\right)^j \leq M \left(\frac{|z|}{r}\right)^j, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Како је $|z|/r < 1$, употребом упоредног критеријума за конвергенцију редова и конвергенцију само геометријског реда, добијамо апсолутну конвергенцију посматраног степеног реда, а тиме и обичну. $\square$

Број $R,\ 0 \leq R \leq \infty$, полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$, као и у реалној анализи, можемо покушати да одредимо помоћу формула:

1. Даламберова формула: $R = \lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{|a_j|}{|a_{j+1}|}$;
2. Кошијева формула: $R = \dfrac{1}{\limsup_{j\in\mathbb{N}} \sqrt[j]{|a_j|}}$;

користећи конвенцију $1/0 = \infty$ и $1/\infty = 0$.

У наставку ћемо, ради комплетности излагања, без доказа, навести два резултата.

**Лема 5.16.** *Нека је $f_n,\ n \in \mathbb{N}$ низ непрекидних функција на скупу $T \subseteq \mathbb{C}$, који униформно конвергира ка функцији $f$ на $T$. Тада је и функција $f$ непрекидна на $T$.*

**Теорема 5.17.** *Нека је $f_n,\ n \in \mathbb{N}$ низ непрекидних функција на скупу $T \subseteq \mathbb{C}$, који садржи контуру $\Gamma$, који униформно конвергира ка функцији $f$ на $T$. Тада*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma \left(\lim_{n\to\infty} f_n(z)\right)\,dz = \lim_{n\to\infty}\left(\int_\Gamma f_n(z)\,dz\right).$$

На основу ове теореме директно, преко парцијалних сума, добијамо да и ред непрекидних функција $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$, који униформно конвергира ка функцији $f$, може да се интеграли члан по члан, односно

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)\right)\,dz = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\int_\Gamma f_j(z)\,dz\right).$$

**Теорема 5.18.** *Нека је $f_n$ низ аналитичких функција на просто повезаној области $D$, који униформно конвергира ка функцији $f$ на $D$. Тада је $f$ аналитичка на $D$.*

***Доказ.*** Знамо да је функција $f$ непрекидна на $D$. Нека је $\Gamma$ произвољна петља унутар $D$. Функције $f_n,\ n \in \mathbb{N}$ су аналитичке на $D$, те је на основу Кошијеве интегралне теореме $\int_\Gamma f_n(z)\,dz = 0,\ n \in \mathbb{N}$. Важи, на основу претходне теореме,

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\left(\oint_\Gamma f_n(z)\,dz\right) = 0.$$

Коначно, теорема Морере, Теорема 4.35, имплицира да је функција $f$ аналитичка на $D$. □

Како су парцијалне суме степених редова, полиноми, аналитичке функције, директно добијамо наредну теорему.

**Теорема 5.19.** *Граница, сума, степеног реда је аналитичка функција у свим тачкама унутар области (лопте) конвергенције.*

Овај одељак завршићемо теоремом која доводи у везу произвољни степени ред, чија граница, на области конвергенције, је увек аналитичка функција, са Тејлоровим редом те функције.

**Теорема 5.20.** *Ако степени ред $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$ конвергира ка функцији $f(z)$ у некој (не-нула) околини тачке $z_0$, онда је*

$$a_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

*Дакле, ред $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$ је Тејлоров развој функције $f$ у околини тачке $z_0$.*

***Доказ.*** Нека је $\Gamma$ позитивно оријентисана кружница, са центром у $z_0$, која лежи унутар области конвергенције посматраног степеног реда. Функција $f$ је аналитичка, те на основу уопштене Кошијеве интегралне формуле, добијамо

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Када уместо функције $f(\xi)$ уврстимо степени ред $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(\xi - z_0)^j$ и интегралимо члан по члан, добијамо да је за $n \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{\sum_{j=0}^{\infty} a_j(\xi - z_0)^j}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi = \frac{n!}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left( \oint_\Gamma (\xi - z_0)^{j-(n+1)}\, d\xi \right) = \frac{n!}{2\pi i}\, a_n\, 2\pi i = n! a_n,$$

јер је

$$\oint_\Gamma (\xi - z_0)^{j-(n+1)}\, d\xi = \begin{cases} 2\pi i, & j = n \\ 0, & j \neq n. \end{cases}$$

Дакле, важи $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ n \in \mathbb{N}_0$. □

Дакле, функција $f$ која је аналитичка у околини тачке $z_0$ се може на јединствен начин представити у форми степеног реда и то баш својим Тејлоровим редом у околини тачке $z_0$.

## 5.4 Лоранови редови

Подсетимо се, тачка $z_0 \in \mathbb{C}$ је сингуларитет функције $f$, која је аналитичка на области $D \subseteq \mathbb{C}$, ако је $z_0$ тачка нагомилавања скупа $D$, односно $z_0 \in \overline{D}$ и ако $f$ није аналитичка у $z_0$. У овом поглављу ћемо размотрити да ли је могуће функцију развити у ред у околини неког од сингуларитета.

**Теорема 5.21** (Лоранов[4] ред)**.** *Нека је функција $f$ аналитичка на прстену $0 \leq r < |z - z_0| < R \leq \infty$. Тада функцију $f$ можемо изразити као збир два реда:*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_0)^j + \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j}(z - z_0)^{-j},$$

*где оба реда конвергирају на датом прстену, а конвергенција је униформна на сваком затвореном прстену $r < r' \leq |z - z_0| \leq R' < R$. Коефицијенти $a_j,\ j \in \mathbb{Z}$ су дати са:*

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{j+1}}\, d\xi, \quad j \in \mathbb{Z},$$

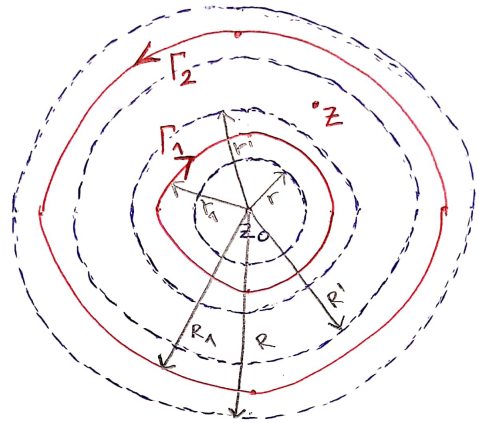
*где је $\Gamma$ произвољна позитивно оријентисана проста затворена контура која припада посматраном прстену и $z_0$ се налази у њеној унутрашњости.*

***Доказ.*** Довољно је показати униформну конвергенцију на свим затвореним прстеновима $r' \leq |z - z_0| \leq R'$, таквим да је $0 < r < r' < R' < R$, јер она имплицира (тачкасту) коневргенцију на отвореном прстену $r < |z - z_0| < R$.

[4] Пјер Алфонс Лоран (Pierre Alphonse Laurent, 1813–1854) - француски математичар

Нека је дат произвољан затворен прстен

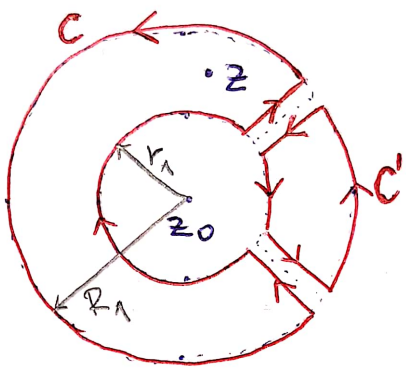
$$r' \leq |z - z_0| \leq R', \quad 0 < r < r' < R' < R.$$




Покажимо прво да за свако $z$ из тог затвореног прстена важи:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \qquad (5.1)$$

где је $\Gamma_1$ негативно оријентисана кружница са центром у $z_0$ полупречника $r_1 = \frac{r+r'}{2}$, а $\Gamma_2$ позитивно оријентисана кружница са центром у $z_0$ полупречника $R_1 = \frac{R+R'}{2}$. Наведена формула је варијација Кошијеве интегралне формуле у случају када функција $f$ није аналитичка у самој тачки $z_0$, већ на неком прстену око ње.




Нека је контура $C$ дата као на слици. Јасно, $C$ је проста, затворена, позитивно оријентисана контура у чијој унутрашњости се налази тачка $z$, те на основу Кошијеве интегралне формуле важи:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Нека је $C'$ допуна контуре $C$, као на слици. Подинтегрална функција је аналитичка унутар контуре $C'$, па Кошијева интегрална теорема имплицира

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = 0.$$

Коначно, како се интеграли дуж праволинијских делова контура $C$ и $C'$ скраћују, добијамо да важи:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C+C'} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Сад смо спремни да наставимо са доказом. С обзиром да $z$ припада унурашњости контуре $\Gamma_2$, на потпуно исти начин као при доказу развијања функције у Тејлоров ред, Теорема 5.7, добијамо:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \sum_{j=0}^{n} a_j (z - z_0)^j + T_n(z),$$

где $T_n(z) \to 0$ униформно када $n \to \infty$ за $|z - z_0| \leq R'$ и коефицијенти $a_j,\ j \in \mathbb{N}_0$ су дати са:

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{j+1}}\, d\xi, \qquad j \in \mathbb{N}_0.$$

Дакле,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j, \quad |z - z_0| \leq R'.$$

Приметимо, међутим, да коефицијенте $a_j$ не можемо идентификовати са $\dfrac{f^{(j)}(z_0)}{j!}$, као што је то био случај у Тејлоровој теореми, јер немамо аналитичност функције у тачки $z_0$.

Погледајмо сад интеграл дуж контуре $\Gamma_1$ у формули (5.1). Тачка $z$ је сада у спољашњости контуре $\Gamma_1$, па за $\xi \in \Gamma_1$ важи: $\left|\dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| < 1$. Имајући то у виду, израз $\dfrac{1}{\xi - z}$ који се појављује у подинтегралној функцији, употребом геометријске прогресије, можемо написати као:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{-1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}} \\ &= \frac{-1}{z - z_0} \cdot \left( 1 + \frac{\xi - z_0}{z - z_0} + \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^m + \frac{\left(\dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^{m+1}}{1 - \dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}} \right).\end{aligned}$$

Уврштавајући ово у интеграл, добијамо:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \sum_{j=1}^{m+1} a_{-j}(z - z_0)^{-j} + \mathcal{T}_m(z),$$

где су коефицијенти дати са:

$$a_{-j} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-j+1}}\, d\xi, \qquad j \in \mathbb{N},$$

а остатак:

$$\mathcal{T}_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \cdot \frac{(\xi - z_0)^{m+1}}{(z - z_0)^{m+1}}\, d\xi.$$

Чињеница да $\xi \in \Gamma_1$ имплицира да је: $|\xi - z| \geq r' - r_1,\ |\xi - z_0| = r_1$ и $|z - z_0| \geq r'$. Дакле, важи:

$$|\mathcal{T}_m(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{\xi \in \Gamma_1} |f(\xi)| \cdot \frac{1}{r' - r_1} \left(\frac{r_1}{r'}\right)^{m+1} 2\pi r_1.$$

Како је $r_1/r' < 1,\ \mathcal{T}_m(z) \to 0$ униформно за $|z - z_0| \geq r'$, те добијамо:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j}(z - z_0)^{-j}, \qquad |z - z_0| \geq r'.$$

До сада смо показали да се оба интеграла, која се појављују у формули 5.1, могу изразити као униформне границе редова који се помињу у формулацији теореме и да им је заједничка област конвергенције прстен $r' \leq |z - z_0| \leq R'$. Остало је још да утврдимо да ли су заиста коефицијенти $a_j,\ j \in \mathbb{Z}$ траженог облика. Када погледамо коју смо вредност добили за коефицијенте $a_j,\ j \in \mathbb{N}_0$, видимо да је једина разлика та да користимо позитивно оријентисану кружницу $\Gamma_2$ уместо произвољне просте позитивно оријентисане затворене контуре $\Gamma$. Међутим, знамо да интеграција унутар области аналитичности подинтегралне функције не зависи од избора контуре, те су та два интеграла једнака. На сличан начин добијамо да и коефицијенти $a_{-j},\ j \in \mathbb{N}$ задовољавају тражену форму, уз додатак да ћемо минус који се појављује испред интеграла искористити да променимо оријентацију негативно оријентисане кружнице $\Gamma_1$. $\square$

**Напомена 5.22.** Лоранов ред функције $f$ се најчешће наводи скраћено:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j}_{\text{аналитички део Лорановог реда}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} a_{-j} (z-z_0)^{-j}}_{\text{главни део Лорановог реда}} = \underbrace{\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-z_0)^j}_{\text{Лоранов ред}}.$$

Део реда са негативним степенима од $(z-z_0)$ се зове главни део Лорановог реда, а део са позитивним степенима се, као и до сад, назива Тејлоров ред или аналитички део Лорановог реда.

Лоранови редови су право уопштење Тејлорових редова. Наиме, ако је функција аналитичка на лопти $|z-z_0| < R$, онда су на основу Кошијеве интегралне теореме, коефицијенти $a_j = 0,\ j \in \{-1,-2,-3,\dots\}$, па Лоранов ред постаје Тејлоров ред, што се и очекује на основу Теореме 5.7.

За главни део Лорановог реда

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{-j} \left(\frac{1}{z-z_0}\right)^j$$

Теорема 5.14 тврди да постоји број $\frac{1}{r} \in [0,\infty]$ тако да овај степени ред конвергира за $\frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{r}$, односно на области $|z-z_0| > r$ (спољашњост кружнице $|z-z_0| = r$). Аналитички део Лорановог реда, на основу исте теореме, конвергира у отвореној лопти $|z-z_0| < R$, за неко $R \in [0,\infty]$. Управо на овај начин и долазимо до чињенице да Лоранов ред конвергира на прстену $r < |z-z_0| < R$. $\square$

Аналогно Теореми 5.20, можемо формулисати тврђење које каже да је сваки конвергентан ред облика $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$ једнак Лорановом реду неке аналитичке функције на одговарајућој области (прстену) конвергенције.

**Теорема 5.23.** *Нека су $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$ и $\sum_{j=1}^{\infty} a_{-j} (z-z_0)^{-j}$ два реда са следећим особинама:*

1. *ред $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$ конвергира на отвореној лопти $|z-z_0| < R$,*
2. *ред $\sum_{j=1}^{\infty} a_{-j} (z-z_0)^{-j}$ конвергира на $|z-z_0| > r$, спољашњост затворене лопте,*
3. *$r < R$.*

*Тада постоји функција $f$, аналитичка на прстену $r < |z-z_0| < R$, чији Лоранов ред на том прстену је баш дати ред $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$.*

**Пример 5.24.** Одредити Лоранов ред функције $f(z) = \dfrac{z^2-2z+3}{z-2}$ на области $|z-1| > 1$.

Посматрајмо функцију $f$ у следећем облику:

$$f(z) = \left(z^2-2z+3\right) \cdot \frac{1}{z-2} = \left((z-1)^2+2\right) \cdot \frac{1}{z-2}.$$

Овде смо први члан већ написали у форми Тејлоровог реда у околини тачке $z_0 = 1$,

$$z^2-2z+3 = 2 + 0\cdot(z-1) + 1\cdot(z-1)^2 + 0\cdot(z-1)^3 + \dots + 0\cdot(z-1)^j + \dots,$$

који конвергира за све $z \in \mathbb{C}$. Други члан можемо написати у облику:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}}$$

Имајући у виду да за геометријски ред важи: $\sum_{j=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w},\ |w| < 1$, добијамо да за $\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1$, односно за $|z-1| > 1$, важи:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^j}.$$

Коначно, за $|z-1| > 1$, јер ту оба реда конвергирају, добијамо:

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(z^2 - 2z + 3\right) \cdot \frac{1}{z-2} = \left((z-1)^2 + 2\right) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^j} \\ &= (z-1) + 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^j} + 2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^j} \\ &= (z-1) + 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{3}{(z-1)^j}. \end{aligned}$$

□

## 5.5 Нуле и изоловани сингуларитети функције

У овом одељку користићемо развој функције у Лоранов ред, да бисмо описали понашање функције у околини њене нуле или изолованог сингуларитета. Нулом функције називамо тачку $z_0 \in \mathbb{C}$ за коју важи $f(z_0) = 0$. Тачка $z_0$ је изоловани сингуларитет функције $f$ ако је $f$ аналитичка у некој околини тачке $z_0$ али није аналитичка у самој тачки $z_0$, односно ако је аналитичка на скупу $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ за неко $R > 0$. У наставку ћемо за ову област, лопту без центра или граничну верзију прстена, користити ознаку $B'(z_0, R) = B(z_0, R) \backslash \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$.

### 5.5.1 Нуле функције

**Дефиниција 5.25.** *Тачка $z_0$ се назива нула реда $m$ функције $f$ ако је $f$ аналитичка у $z_0$ и за првих $m-1$ извода важи: $f^{(k)}(z_0) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, m-1$ и $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.*

Другим речима, важи:

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \neq f^{(m)}(z_0).$$

Развој аналитичке функције $f$ у Тејлоров ред у околини тачке $z_0$ имплицира:

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + a_{m+2}(z - z_0)^{m+2} + \ldots,$$

односно

$$f(z) = (z - z_0)^m \left(a_m + a_{m+1}(z - z_0) + a_{m+2}(z - z_0)^2 + \ldots\right),$$

где је $a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$. Функција унутар заграде, означимо је са $g$, конвергира тамо где је конвергирао и ред функције $f$, те добијамо функцију $g$ аналитичку у околини тачке $z_0$ тако да је $g(z_0) \neq 0$. Важи, наравно и обрнуто, па можемо формулисати следећу теорему.

**Теорема 5.26.** *Нека је функција $f$ аналитичка у тачки $z_0$. Тада функција $f$ има нулу реда $m$ у тачки $z_0$ ако и само ако $f$ можемо написати у облику:*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

*где је функција $g$ аналитичка у $z_0$ и $g(z_0) \neq 0$.*

Директна последица ове теореме је наредни резултат.

**Последица 5.27.** *Ако је $f$ аналитичка функција таква да је $f(z_0) = 0$, тада или је $f$ идентички једнака нули у околини тачке $z_0$ или постоји $\delta > 0$ тако да је $z_0$ једина нула функције $f$ на $B(z_0, \delta)$.*

***Доказ.*** Нека је $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$, где је $a_j = f^{(j)}(z_0)/j!$, $j \in \mathbb{N}_0$, Тејлоров ред функције $f$ у околини тачке $z_0$. Тада на основу Теореме 5.7, овај ред конвергира ка функцији $f$ у некој (кружној) околини тачке $z_0$. Постоје две могућности: или су сви коефицијенти $a_j = 0,\ j \in \mathbb{N}_0$ или постоји $m \in \mathbb{N}$ тако да је $a_m \neq 0$. Ако су сви Тејлорови коефицијенти $a_j = 0,\ j \in \mathbb{N}_0$, онда функција $f$ мора бити идентички једнака нули у тој околини тачке $z_0$. Посматрајући други случај, нека је $m \geq 1$ најмањи индекс такав да је $a_m \neq 0$. То значи да је $z_0$ нула реда $m$ функције $f$ и $f$ може да се напише у облику: $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, где је $g(z_0) \neq 0$. Функција $g$ је непрекидна у околини тачке $z_0$ и важи $g(z_0) \neq 0$, те постоји околина тачке $z_0$, на пример $|z - z_0| < \delta,\ \delta > 0$, тако да је $g(z) \neq 0$ за $|z - z_0| < \delta$. Коначно, то имплицира да је и $f(z) \neq 0$, за $0 < |z - z_0| < \delta$. □

Важне последице овог тврђења су наредне две теореме које говоре о једнакости две комплексне функције.

**Теорема 5.28** (Теорема о једнакости комплексних функција)**.** *Нека су $f, g : D \to \mathbb{C}$ две аналитичке функције, дефинисане над области $D \neq \emptyset$. Тада су следећи искази еквивалентни:*

*(1) $f = g$ на целом $D$.*

*(2) Скуп $\{z \in D :\ f(z) = g(z)\}$ садржи бар једну тачку нагомилавања скупа $D$.*

*(3) Постоји тачка $z_0 \in D$ тако да је $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ за све $n \in \mathbb{N}_0$.*

***Доказ.*** Применимо претходну Последицу 5.27 на функцију $f - g$. □

**Теорема 5.29** (Теорема о јединственом аналитичком продужењу)**.** *Нека је $D \subset \mathbb{C}$ област, $M \subset D$ подскуп који садржи бар једну тачку нагомилавања скупа $D$ и нека је $f : M \to \mathbb{C}$ функција. Ако постоји аналитичка функција $\tilde{f} : D \to \mathbb{C}$ која продужава $f$, односно $f(z) = \tilde{f}(z)$, $z \in M$, онда је $\tilde{f}$ јединствена таква функција.*

### 5.5.2 Изоловани сингуларитети функције

У наставку овог поглавља своју пажњу ћемо окренути изолованим сингуларитетима функције $f$. Прво ћемо издвојити три карактеристичне класе изолованих сингуларитета. Подсетимо се, тачка $z_0$ је изоловани сингуларитет функције $f$ ако је функција $f$ аналитичка у некој околини тачке $z_0$ без саме тачке $z_0$, односно на скупу $B'(z_0, R)$ за неко $R > 0$. Тада на основу Лоранове теореме, Теорема 5.21, функција $f$ може да се развије у Лоранов ред на том прстену око тачке $z_0$, односно

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_0)^j, \qquad z \in B'(z_0, R).$$

**Дефиниција 5.30.** *Нека функција $f$ има изоловани сингуларитет у тачки $z_0$ и нека је развијена у Лоранов ред*

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_0)^j,$$

*за* $0 < |z - z_0| < R,\ R > 0$. *Тада:*

1. *ако је $a_j = 0$ за све $j < 0$, онда тачку $z_0$ зовемо отклоњиви или привидни сингуларитет функције $f$;*
2. *ако је $a_{-m} \neq 0$ за неко $m \in \mathbb{N}$, али је $a_j = 0$ за све $j < -m$ онда тачку $z_0$ зовемо пол реда $m$ функције $f$;*
3. *ако је $a_j \neq 0$ за бесконачно много негативних индекса $j$, онда кажемо да је $z_0$ есенцијални сингуларитет функције $f$.*

Циљ кретања кроз тему изолованих сингуларитета је да покажемо да ове три категорије изолованих сингуларитета имплицирају осетно различито понашање функције $f$ у околини тачке $z_0$, које може да се уочи и без развијања функције у Лоранов ред.

**Отклоњиви сингуларитети**

Ако функција $f$ има отклоњиви сингуларитет у тачки $z_0$, онда је њен Лоранов ред обика:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_j(z - z_0)^j + \ldots, \qquad 0 < |z - z_0| < R.$$

Дакле, видимо да је функција $f$, сем у самој тачки $z_0$, једнака функцији $h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_0)^j,\ |z - z_0| < R$, која је аналитичка и у тачки $z_0$. Другим речима, једини разлог да тачка $z_0$ буде сингуларитет функције $f$ је тај што функција $f$ није дефинисана у тој тачки.

На пример, функција $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ има отклоњиви сингуларитет у $z_0 = 0$, заиста:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \ldots, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Функција $f$ може да се развије у Тејлоров ред у околини тачке $z_0 = 0$, иако није дефинисана у самој тачки $z_0 = 0$.

С обзиром да је функција $h$ аналитичка у $z_0$, она је и ограничена у некој околини тачке $z_0$, те је ограничена и функција $f$. Одавде директно добијамо три критеријума, која наводимо у наредној леми, на основу којих можемо да препознамо отклоњиви сингуларитет.

**Лема 5.31.** *Нека функција $f$ има отклоњиви сингуларитет у тачки $z_0$, тада:*

1. *$f$ је ограничена на $B'(z_0, r)$ за неко $r > 0$,*
2. *$f$ има коначну граничну вредност у тачки $z_0$, и*
3. *$f$ може да се додефинише у тачки $z_0$, тако да новодобијена функција буде аналитичка у $z_0$.*

Може се показати и обрат ове леме тако што се покаже да је $a_{-j} = 0,\ j \in \mathbb{N}$, на основу формула за коефицијенте Лорановог реда датих преко интеграла у Лорановој теореми, Теорема 5.21.

**Полови**

Лоранов ред функције $f$ у околини тачке $z_0$, која је пол реда $m$, је облика:

$$f(z) = \sum_{j=-m}^{\infty} a_j (z-z_0)^j = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots,$$

где је $a_{-m} \neq 0$, а развој важи на $B'(z_0, r)$ за неко $r > 0$. На пример, функција

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{j-3}}{j!} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \ldots, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

има пол реда 3 у тачки $z_0 = 0$.

Наредне две леме дају карактеризацију полова.

**Лема 5.32.** *Ако функција $f$ има пол реда $m$ у тачки $z_0$, онда за све $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ важи:*

$$\lim_{z \to z_0} |(z-z_0)^l f(z)| = \infty,$$

*док функција $(z-z_0)^m f(z)$ има отклоњив сингуларитет у $z_0$. Посебно, важи $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.*

***Доказ.*** Важи:

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \ldots, \quad 0 < |z-z_0| < R,$$

што је Тејлоров ред, те је $z_0$ отклоњив сингуларитет функције $(z-z_0)^m f(z)$. Додатно,

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) = a_{-m} \neq 0.$$

Одавде директно добијамо да за све $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ важи:

$$\lim_{z \to z_0} \left| (z-z_0)^l f(z) \right| = \lim_{z \to z_0} \left| \frac{1}{(z-z_0)^{m-l}} \cdot (z-z_0)^m f(z) \right| = \infty,$$

јер је $(z-z_0)^{m-l} \to 0$ и $a_{-m} \neq 0$. □

Опет, може се показати и обрнути правац ове леме директним израчунавањем да је $a_{-j} = 0,\ j > m$, употребом интегралних формула за коефицијенте Лорановог реда датих у Лорановој теореми, Теорема 5.21.

**Лема 5.33.** *Функција $f$ има пол реда $m$ у тачки $z_0$ ако и само ако постоји $R > 0$ тако да за $z \in B'(z_0, R)$ важи:*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m},$$

*где је функција $g$ аналитичка у $z_0$ и $g(z_0) \neq 0$.*

***Доказ.*** Ако је $z_0$ пол реда $m$ функције $f$, онда важи:

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + a_{-m+2}(z-z_0)^2 + \dots, \quad 0 < |z-z_0| < R.$$

Ако обележимо са $g(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots,\ 0 < |z-z_0| < R$ и дефинишемо $g(z_0) = a_{-m} \neq 0$, видимо да је $g$ аналитичка на $|z-z_0| < R$ и да је $g(z_0) \neq 0$.

Обрнуто, ако је $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, $0 < |z-z_0| < R$, и ако је Тејлоров ред функције $g$ :

$$g(z) = b_0 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2 + \dots, \quad |z-z_0| < R,$$

онда је Лоранов ред функције $f$ дат са:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{b_0}{(z-z_0)^m} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \frac{b_2}{(z-z_0)^{m-2}} + \dots, \quad 0 < |z-z_0| < R,$$

и, додатно, важи $b_0 = g(z_0) \neq 0$, што смо и хтели да покажемо. □

На аналоган начин може да се покаже и наредна лема, те је наводимо без доказа.

**Лема 5.34.** *Ако је тачка $z_0$ нула реда $m$ функције $f$, онда је $z_0$ пол реда $m$ функције $1/f$. Обрнуто, ако је $z_0$ пол реда $m$ функције $f$, онда функција $1/f$ има отклоњив сингуларитет у $z_0$ и ако дефинишемо $(1/f)(z_0) = 0$, добијамо да је $z_0$ нула реда $m$ функције $1/f$.*

### Есенцијални сингуларитети

У наставку ћемо се окренути есенцијалним сингуларитетима и формулисати чувену Пикарову[5] теорему. Пикарова теорема описује понашање функције у околини есенцијалног сингуларитета, која ту не може да буде нити ограничена, јер је таква у околини отклоњивог сингуларитета, нити да тежи у бесконачно, јер је то понашање функције у околини пола.

**Теорема 5.35** (Пикарова теорема)**.** *Нека је $z_0$ есенцијални сингуларитет функције $f$. Тада је слика сваке околине тачке $z_0$ цела комплексна раван, сем можда једне тачке.*

Пикарову теорему овде нећемо доказивати, али ћемо је ислустровати примером, а доказаћемо нешто слабији резултат, Теорему Казорати[6]-Вајерштраса.

**Теорема 5.36** (Теорема Казорати-Вајерштраса)**.** *Тачка $z_0$ је есенцијални сингуларитет функције $f$ ако и само ако је слика сваке области $B'(z_0, r),\ r > 0$ свуда густ скуп у $\mathbb{C}$, односно за свако $c \in \mathbb{C}$ и свако $\rho > 0$ важи $f(B'(z_0, r)) \cap B(c, \rho) \neq \emptyset$.*

***Доказ.*** Теорема даје потребан и довољан услов за есенцијални сингуларитет, тако да ћемо доказ дати у оба правца.

($\Rightarrow$) Доказ у овом смеру ћемо извршити контрапозицијом, односно показаћемо да ако постоји $r > 0$ тако да слика $f(B'(z_0, r))$ није свугде густ скуп у $\mathbb{C}$, онда $z_0$ није есенцијални сингуларитет.

Нека је $r > 0$ такво да $f(B'(z_0, r))$ није свугде густ скуп у $\mathbb{C}$. Тада постоји $c \in \mathbb{C}$ и $\rho > 0$ тако да је $f(B'(z_0, r)) \cap B(c, \rho) = \emptyset$. Одавде добијамо да је функција $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - c}$ аналитичка

[5]Шарл Емил Пикар (Charles Émile Picard, 1856–1941) - француски математичар

[6]Фелиће Казорати (Felice Casorati, 1835-1890) - италијански математичар

на $B'(z_0,r)$ и $g(z) \neq 0,\ z \in B'(z_0,r)$. Сада је, јасно, $f(z) = \dfrac{1}{g(z)} + c$ аналитичка функција на $B'(z_0,r)$, те је $z_0$ изоловани сингуларитет.

Како је $f(B'(z_0,r)) \cap B(c,\rho) = \emptyset$, имамо да важи $|f(z) - c| > \rho,\ z \in B'(z_0,r)$. Одавде добијамо да је функција $g$ ограничена у околини тачке $z_0$, јер је $|g(z)| < 1/\rho,\ z \in B'(z_0,r)$. На основу обрата Леме 5.31 закључујемо да је $z_0$ отклоњиви сингуларитет функције $g$ и да је $\lim_{z\to z_0} g(z) = L,\ L \in \mathbb{C}$.

Е сад, могуће је да је $L \neq 0$, па је онда $\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{g(z)} + c\right) = \frac{1}{L} + c$. На основу обрата Леме 5.31 добијамо да је $z_0$ отклоњиви сингуларитет и функције $f$.

Друга могућност је да је $L = 0$, а онда ће $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, па на основу обрата Леме 5.32 добијамо да је $z_0$ пол функције $f$.

($\Leftarrow$) Претпоставимо сада да је слика сваке области $B'(z_0,r),\ r > 0$ свугде густ скуп у $\mathbb{C}$. Ако покажемо да не важи ни $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$, за неко $L \in \mathbb{C}$, ни $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, онда је $z_0$ есенцијални сингуларитет.

Претпоставимо прво да је $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ за неко $L \in \mathbb{C}$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $r > 0$ тако да за све $z \in B'(z_0,r)$ важи $|f(z) - L| < \varepsilon$. Дакле, $f(B'(z_0,r)) \subseteq B(L,\varepsilon)$ што није свугде густ скуп у $\mathbb{C}$, те претпоставка не важи.

Претпоставимо затим да је $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Тада за свако $M > 0$ постоји $r > 0$ тако да за све $z \in B'(z_0,r)$ важи $|f(z)| > M$, односно $f(B(z_0,r)) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{B(0,M)}$. Ни у овом случају не добијамо свугде густ скуп, те ни ова претпоставка не важи. Коначно, тачка $z_0$ није ни отклоњиви сингуларитет, ни пол, па закључујемо да је $z_0$ есенцијални сингуларитет. □

**Пример 5.37.** Посматрајмо функцију $f(z) = e^{1/z}$ у тачки $z_0 = 0$.

Развијањем функције $f$ у Лоранов ред у околини тачке $z_0 = 0$ добијамо:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1/z)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!\,z^j} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \ldots, \qquad \text{за све} \quad \frac{1}{z} \in \mathbb{C} \ \Leftrightarrow\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Видимо да се у Лорановом развоју појављују сви негативни степени од $z$, те је, према дефиницији, $z_0 = 0$ есенцијални сингуларитет функције $f$. Јасно, $e^{1/z} \neq 0$ за све $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Међутим, покажимо да за свако $c \neq 0$ и свако $\varepsilon > 0$ постоји $\tilde{z}$ такво да је $|\tilde{z}| < \varepsilon$ и $e^{1/\tilde{z}} = c$, као што тврди теорема Пикара.

Дакле, за дате $c \neq 0$ и $\varepsilon > 0$ хоћемо да одредимо $\tilde{z}$ тако да је $|\tilde{z}| < \varepsilon$ и

$$\frac{1}{\tilde{z}} = \ln|c| + i\arg c + 2k\pi i, \quad \text{за неко } k \in \mathbb{Z}.$$

За довољно велико $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$, тако да је $\left|\ln|c| + i\arg c + 2\tilde{k}\pi i\right| > 1/\varepsilon$ добијамо да је

$$\tilde{z} = \frac{1}{\ln|c| + i\arg c + 2\tilde{k}\pi i}$$

такво да је $|\tilde{z}| < \varepsilon$ и $e^{1/\tilde{z}} = c$. □

У наредној теореми ћемо објединити све информације о изолованим сингуларитетима које смо до сад показали.

**Теорема 5.38.** *Ако је $z_0$ изоловани сингуларитет функције $f$, тада важе следеће еквиваленције:*

1. *$z_0$ је отклоњив сингуларитет $\Leftrightarrow$ $|f|$ је ограничена у околини $z_0$ $\Leftrightarrow$ $f$ има граничну вредност када $z \to z_0$ $\Leftrightarrow$ $f$ може да се додефинише у $z_0$ тако да постане аналитичка у $z_0$.*

2. *$z_0$ је пол $\Leftrightarrow$ $|f(z)| \to \infty$ када $z \to z_0$ $\Leftrightarrow$ $f$ може да се напише у облику $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$ за неко $m \in \mathbb{N}$ и неку функцију $g$ која је аналитичка у $z_0$ и $g(z_0) \neq 0$.*

3. *$z_0$ је есенцијални сингуларитет $\Leftrightarrow$ $|f|$ није нити ограничена у околини $z_0$ нити тежи у бесконачно када $z \to z_0$ $\Leftrightarrow$ сваку околину тачке $z_0$ функција $f$ слика на целу комплексну раван, изостављајући можда једну тачку.*

### 5.5.3 Тачка $\infty$

Када смо говорили о стереографској пројекцији, видели смо да се тачка $N(0, 0, 1)$ са Риманове сфере слика у "$\infty$" у комплексној равни $\mathbb{C}$. Увођењем тачке $\infty$ у комплексну раван добијамо проширену комплексну раван $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Комплексна раван $\mathbb{C}$ се слика на Риманову сферу без тачке $N$, док је слика целе Риманове сфере проширена комплексна раван $\hat{\mathbb{C}}$. Околина тачке $\infty$ на Римановој сфери је, природно, калота око тачке $N$, а њена слика у проширеној комплексној равни $\hat{\mathbb{C}}$ је спољашњост кружнице $|z| = M,\ M > 0$, заједно са самом тачком $\infty$, те ћемо такве скупове звати околинама тачке $\infty$. Подсетимо се да низ $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ тежи у $\infty$ ако за свако $M > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $|z_n| > M$ за $n > n_0$, што би била дефиниција конвергенције низа ка $\infty$ и у $\hat{\mathbb{C}}$.

Рећи ћемо да је $f(z_0) = \infty$ ако је $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$. Слично, $f(\infty) = w_0$ ако је $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$. На пример, за функцију

$$f(z) = \frac{2z + 1}{z - 1}$$

је $f(1) = \infty$, а $f(\infty) = 2$.

Сада можемо говорити и о "аналитичности" функције у $\infty$. Тачка $\infty$ се увек посебно испитује и то тако што се уместо функције $f(z)$ у тачки $z = \infty$ посматра функција $f(1/w)$ у тачки $w = 0$. Важи:

1. $f$ је аналитичка у $\infty$ ако је $f(1/w)$ аналитичка (или има отклоњиви сингуларитет) у $w_0 = 0$,

2. $f$ има пол реда $m$ у $\infty$ ако $f(1/w)$ има пол реда $m$ у $w_0 = 0$, и

3. $f$ има есенцијални сингуларитет у $\infty$ ако $f(1/w)$ има есенцијални сингуларитет у $w_0 = 0$.

Кажемо и да је $z_0 = \infty$ нула реда $m$ функције $f(z)$ ако је $w_0 = 0$ нула реда $m$ функције $f(1/w)$.

Такође, као у Теореми 5.38, важи:

1. $f$ је аналитичка у $\infty$ ако је $|f(z)|$ ограничена за довољно велике $|z|$,

2. $f$ има пол у $\infty$ ако $f(z) \to \infty$ за $z \to \infty$, и

3. $f$ има есенцијални сингуларитет у $\infty$ ако $|f|$ није нити ограничена за довољно велике $|z|$ нити тежи у бесконачно када $z \to \infty$.

# Глава 6

# Теорија остатака

Теорија комплексне интеграције нам је расветлила важне карактеристике аналитичких функција. У овом поглављу ћемо формулисати теорију остатака повезујући теорију интеграције и Лоранове редове. Теорија остатака има велику могућност примене на решавање реалних интеграла, који нису били решиви класичним методама реалне анализе. Такође, као последице ове теорије, појављују се и Теорема аргумента и Рушеова теорема, којима ћемо завршити ово поглавље.

## 6.1 Остатак (резидуум) функције у изолованом сингуларитету

Посматрајмо интеграл

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz,$$

где је $\Gamma$ проста позитивно оријентисана затворена контура и $f$ аналитичка функција на контури и унутар ње, сем у тачки $z_0$, која је њен изоловани сингуларитет и лежи у унутрашњости контуре $\Gamma$. Као што знамо, функција $f$ може да се развије у Лоранов ред у околини тачке $z_0$,

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_0)^j, \qquad z \in B'(z_0, r).$$

Овај развој важи и на $S(z_0, \varepsilon)$ за $\varepsilon < r$ и нека је додатно $\varepsilon$ такво да $B(z_0, \varepsilon)$ лежи у унутрашњости контуре $\Gamma$. Као и у доказу Кошијеве интегралне формуле, Теорема 4.29, добијамо да је

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \oint_{S(z_0,\varepsilon)} f(z)\,dz.$$

Како Лоранов ред униформно конвергира, интеграцију можемо вршити члан по члан, те добијамо

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \oint_{S(z_0,\varepsilon)} \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_0)^j \right) dz = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \oint_{S(z_0,\varepsilon)} (z - z_0)^j\,dz.$$

Коначно, користећи да је

$$\oint_{S(z_0,\varepsilon)} (z - z_0)^j = \begin{cases} 2\pi i, & j = -1 \\ 0, & j \neq -1, \end{cases}$$

добијамо

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = a_{-1}\cdot 2\pi i.$$

**Дефиниција 6.1.** *Нека је $z_0$ изоловани сингуларитет функције $f$, тада се коефицијент $a_{-1}$, који стоји уз $\dfrac{1}{z-z_0}$ у Лорановом развоју функције $f$ око $z_0$, назива остатак (резидуум) функције $f$ у тачки $z_0$ и обележава са* $\operatorname{Res}(f, z_0)$.

**Пример 6.2.** Одредити вредност интеграла $I = \displaystyle\oint_{|z|=4} ze^{3/z}\,dz$.

Приметимо да је једини сингуларитет, и то изоловани, подинтегралне функције $f(z) = ze^{3/z}$ тачка $z_0 = 0$ која се налази унутар сфере $|z| = 4$. Дакле, $I = 2\pi i\cdot \operatorname{Res}(f, 0)$. Да бисмо одредили остатак функције $f$ морамо је развити у Лоранов ред. Важи:

$$f(z) = ze^{3/z} = z\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(3/z)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{3^j}{z^{j-1}\,j!} = z + 3 + \frac{3^2}{z\,2!} + \frac{3^3}{z^2\,3!} + \dots.$$

Коначно, $I = 2\pi i\cdot \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i\cdot a_{-1} = 2\pi i\cdot\dfrac{3^2}{2!} = 9\pi i.$ □

Ако је $z_0$ отклоњиви сингуларитет функције $f$, онда се она у околини тачке $z_0$ може развити у Тејлоров ред, односно сви коефицијенти уз негативне степене од $(z - z_0)$ су једнаки нули, па је и $a_{-1} = 0$. Дакле,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = 0, \qquad \text{ако је } z_0 \text{ отклоњиви сингуларитет функције } f.$$

У наставку ћемо размотрити случај када је $z_0$ пол функције $f$ и видети да ни у том случају не морамо функцију развијати у Лоранов ред да бисмо одредили њен резидуум. За израчунавање остатка функције $f$ у есенцијалном сингуларитету не постоји посебна формула.

**Теорема 6.3.** *Нека је $z_0 \in \mathbb{C}$ пол реда $m$ функције $f$. Тада је*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right).$$

***Доказ.*** Полазећи од Лорановог реда функције $f$ у тачки $z_0$,

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots,$$

помножимо га са $(z - z_0)^m$,

$$\begin{aligned}(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1}\\ + a_0(z-z_0)^m + a_1(z-z_0)^{m+1} + \dots,\end{aligned}$$

и на крају диференцирајмо $m - 1$ пута по променљивој $z$

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right) = (m-1)!\,a_{-1} + m!\,a_0(z-z_0) + \frac{(m+1)!}{2!}\,a_1(z-z_0)^2 + \dots.$$

Коначно,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right).$$ □

**Пример 6.4.** Одредити резидуум функције $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z-\pi)^3}$ у њеном изолованом сингуларитету.

Једини сингуларитет функције $f$ је тачка $z = \pi$ и то је пол трећег реда (јер $\cos \pi \neq 0$). Важи:

$$\operatorname{Res}(f, \pi) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to \pi} \frac{d^2}{dz^2} \left( (z-\pi)^3 \cdot \frac{\cos z}{(z-\pi)^3} \right) = \frac{1}{2} \lim_{z \to \pi} (\cos z)'' = -\frac{1}{2} \cos \pi = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Следећа последица се односи на одређивање резидуума у случају када је $z_0$ пол првог реда функције $f$ која може да се напише у облику количника две аналитичке функције.

**Последица 6.5.** *Нека је функција $f$ облика $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ у некој околини тачке $z_0$ и нека су функције $g$ и $h$ аналитичке у $z_0$, где је $z_0$ нула првог реда функције $h$ и није нула функције $g$. Тада је*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

***Доказ.*** Из услова задатка следи да је $z_0$ пол првог реда функције $f$. Користећи да је $h(z_0) = 0$, добијамо:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{\dfrac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \qquad \square$$

**Пример 6.6.** Одредити остатке функције $f(z) = \operatorname{ctg} z$ у свим њеним изолованим сингуларитетима.

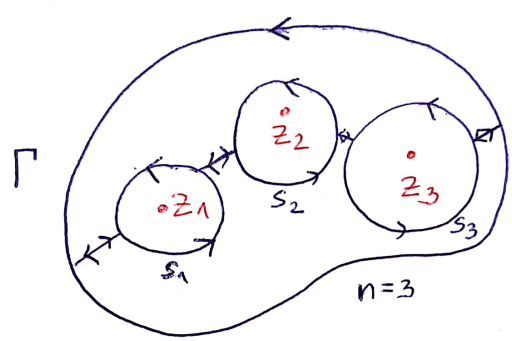
Функција $f$ је облика $f(z) = \dfrac{\cos z}{\sin z}$, те су нуле (првог реда) функције $\sin$ истовремено и полови првог реда функције $f$. Дакле, полови првог реда функције $f$ су тачке $z_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Важи:

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \operatorname{Res}(f, k\pi) = \left. \frac{\cos z}{(\sin z)'} \right|_{z = k\pi} = \frac{\cos(k\pi)}{\cos(k\pi)} = 1, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad \square$$

До сада смо претпостављали да је $z_0$ једини сингуларитет у унутрашњости контуре $\Gamma$. Овај одељак ћемо завршити општијим случајем, односно Кошијевом теоремом о остатку. Нека је $\Gamma$ проста затворена позитивно оријентисана контура и функција $f$ аналитичка на самој контури и у њеној унутрашњости сем у коначно много тачака $z_1, z_2, \ldots, z_n$ у унутрашњости контуре $\Gamma$. Тачке $z_i,\ i = 1, \ldots, n$ су, дакле, изоловани сингуларитети функције $f$.

Као и у доказу Кошијеве интегралне формуле, интеграл по контури $\Gamma$ можемо трансформисати на интеграле по сферама $S_i = S(z_i, r_i),\ i = 1, \ldots, n$, тако да је једини сингуларитет унутар сфере $S_i$ тачка $z_i$. Важи:

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{S_i} f(z)\, dz.$$




Како су $z_i$ једини сингуларитети унутар $S_i,\ i = 1, \ldots, n$, одавде добијамо:

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_i).$$

**Теорема 6.7** (Кошијева теорема о остатку)**.** *Нека је* $\Gamma$ *проста затворена позитивно оријентисана контура и функција* $f$ *аналитичка унутар и на контури* $\Gamma$ *сем у коначно много тачака* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *унутар контуре* $\Gamma$. *Тада важи:*

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_i).$$

Посебно значајну примену Теорија остатака има у одређивању вредности реалних интеграла и редова, који не могу да се реше класичним методама реалне анализе.

### 6.1.1 Тачка $\infty$

Када смо говорили о изолованим сингуларитетима, рекли смо да и тачка $\infty$ може бити изоловани сингуларитет. То смо најједноставније проверавали тако што, уместо да проверавамо да ли је тачка $z_0 = \infty$ сингуларитет функције $f(z)$, испитивали смо природу тачке $w_0 = 0$ функције $f(1/w)$.

**Дефиниција 6.8.** *Нека је тачка* $\infty$ *једини изоловани сингуларитет функције* $f$ *у спољашњости просте затворене негативно оријентисане контуре* $\Gamma$. *Тада је*

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma f(z)\,dz.$$

У наставку ћемо формулисати две теореме које се доказују директно по дефиницији.

**Теорема 6.9.** *Нека је* $\infty$ *изоловани сингуларитет функције* $f$. *Тада ако је* $a_{-1}$ *коефицијент уз* $\dfrac{1}{z}$ *у Лорановом развоју у ред функције* $f$ *у околини бесконачности, онда је*

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -a_{-1} = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right).$$

**Теорема 6.10.** *Нека су* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *и* $\infty$ *изоловани сингуларитети функције* $f$ *и нека функција* $f$ *нема других сингуларитета. Тада важи:*

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0.$$

## 6.2 Примена теорије остатака на решавање реалних интеграла и редова

### 6.2.1 Тригонометријски интеграли

Интеграли облика

$$\int_0^{2\pi} f(\sin t, \cos t)\,dt,$$

где је $f$ рационална функција по $\sin t$ и $\cos t$, могу да се изразе као комплексни криволинијски интеграли дуж јединичне кружнице. Наиме, користећи да је

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \qquad \text{и} \qquad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

и уводећи смену $z = e^{it}$, добијамо да је

$$\sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i} \qquad \text{и} \qquad \cos t = \frac{z + z^{-1}}{2},$$

те функција $f(t),\ t \in [0, 2\pi]$ постаје комплексна рационална функција $g(z),\ |z| = 1$. Даље, важи $dz = ie^{it}dt$, односно $dt = (iz)^{-1}dz$, те је коначно

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = \int_\Gamma \frac{g(z)}{iz}\, dz,$$

где је $\Gamma$ јединична кружница. Последњи интеграл можемо да израчунамо употребом Кошијеве теореме о остатку, Теорема 6.7, ако рационална функција $g$ нема сингуларитете на јединичној кружници $|z| = 1$.

### 6.2.2 Несвојствени интеграли

Несвојствени интеграли облика

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \tag{6.1}$$

често могу да се израчунају употребом Кошијеве теореме о остатку, Теореме 6.7. Претпоставимо да је $f$ Риман интеграбилна над сваким интервалом $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Постоје два основна типа конвергенције несвојствених интеграла. За несвојствени интеграл (6.1) кажемо да конвергира ако постоји

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \int_{-y}^{x} f(t)\, dt.$$

Док за несвојсвени интеграл (6.1) кажемо да конвергира у смислу главне вредности, и то зовемо главна вредност интеграла и пишемо $p.v.\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$, ако постоји

$$\lim_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} f(t)\, dt.$$

Конвергенција у смислу главне вредности је слабија од обичне конвергенције, те сваки конвергентни несвојствени интеграл облика (6.1) има и своју главну вредност. За интеграл (6.1) кажемо да апсолутно конвергира ако конвергира интеграл функције $|f|$. Апсолутна конвергенција имплицира обичну конвергенцију. За функцију $f$ кажемо да је апсолутно интеграбилна ако је Риман интеграбилна на сваком коначном интервалу реалне праве и ако њен несвојствени интеграл над $\mathbb{R}$ конвергира апсолутно. Важи и следећа теорема из реалне анализе, те је остављамо без доказа, која је уопштење упоредног критеријума конвергенције.

**Теорема 6.11.** *Нека су $f$ и $g$ непрекидне функције на $\mathbb{R}$, где је $g(t) \geq 0$ и $|f(t)| \leq g(t)$ за све $t \in \mathbb{R}$. Тада интеграл функције $f$ над $\mathbb{R}$ постоји и важи*

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt,$$

*ако последњи несвојствени интеграл функције $g$ конвергира над $\mathbb{R}$.*

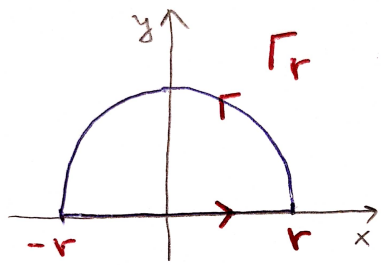
Често је реална подинтегрална функција $f$ несвојственог интеграла (6.1) рестрикција неке комплексне функције, која је, сем можда у пребројиво много тачака, аналитичка на отвореном скупу који садржи или затворену горњу полураван $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ или затворену доњу полураван $\{z : \operatorname{Im} z \leq 0\}$. Ако овако добијена комплексна функција нема сингуларитете на реалној оси и ако довољно брзо опада када $z \to \infty$, онда интеграл (6.1) може да се произвољно прецизно апроксимира интегралом функције $f$ дуж затворене полукружнице у одговарајућој полуравни. Овај интеграл може да се израчуна помоћу Кошијеве теореме о остатку.

Специјално, претпоставимо да је $f$ аналитичка функција на $U$, сем у пребројиво много тачака, где је $U$ отворен скуп који садржи затворену горњу полураван. Претпоставимо да постоје $p, R, C$ позитивни бројеви, где је $p > 1$, тако да је за $\operatorname{Im} z \geq 0$

$$|f(z)| \leq C|z|^{-p} \qquad \text{за} \quad |z| > R. \tag{6.2}$$

Подсетимо се, из реалне анализе, овај услов обезбеђује да несвојствени интеграл (6.1) конвергира.

Нека је $\Gamma_r$ контура која креће из $-r$ на реалној оси, иде дуж интервала $[-r, r]$ и затим се враћа у $-r$ дуж полукружнице у горњој полуравни, $|z| = r$.




Важи

$$\int_{\Gamma_r} f(z)\, dz = \int_{-r}^{r} f(x)\, dx + \int_0^{\pi} f(re^{it}) ire^{it}\, dt. \tag{6.3}$$

Ако је $r > R$ онда (6.2) имплицира да је $|f(re^{it})ire^{it}| \leq Cr^{1-p}$, па је

$$\left| \int_0^{\pi} f(re^{it}) ire^{it}\, dt \right| \leq \pi C r^{1-p}.$$

Како је $p > 1$, десна страна неједнакости тежи у 0 када $r \to \infty$. Одавде и из (6.3) закључујемо да је

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r} f(z)\, dz = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$

Са друге стране, на основу Кошијеве теореме о остатку, интеграл $\int_{\Gamma_r} f(z)\, dz$ је $2\pi i$ пута сума резидуума функције $f$ у сингуларитетима унутар контуре $\Gamma_r$. Услов (6.2) обезбеђује да нема сингуларитета у горњој полуравни ван полукруга полупречника $R$. То даље имплицира да има само коначно много сингуларитета унутар контуре $\Gamma_r$, па и у самој горњој полуравни. На основу овога добијамо да вредност комплексног интеграла не зависи од $r$, када је $r > R$, и једнак је $2\pi i$ пута коначна сума свих резидуума функције $f$ у горњој полуравни.

Ако је функција $f$ аналитичка на отвореном скупу који садржи затворену доњу полураван, онда исти овај поступак може да се спроведе у доњој полуравни, тако што се контура $\Gamma_r$ замени својом симетричном сликом у односу на $x-$осу. На тај начин ћемо добити негативно оријентисану контуру, па ће једина разлика бити то што је решење комплексног интеграла $-2\pi i$ пута коначна сума свих резидуума функције $f$ у тачкама из доње полуравни.

Овим је уједно доказана наредна теорема.

**Теорема 6.12.** *Нека је $H$ или горња или доња затворена полураван. Ако је функција $f$ аналитичка, сем у пребројиво много тачака, на отвореном скупу који садржи $H$, нема сингуларитета на реалној оси и постоје позитивне константе $R, C$ и $p > 1$ тако да је задовољено* (6.2) *за све $z \in H$, онда је*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \sigma(H) 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f, z_j),$$

*где су $z_1, z_2, \ldots, z_m$ сви сингуларитети функције $f$ у полуравни $H$, и важи да је $\sigma(H) = 1$ ако је $H$ горња полураван, а $\sigma(H) = -1$ ако је $H$ доња полураван.*

### 6.2.3 Фуријеова трансформација

Технике израчунавања интеграла употребом теорије остатака су посебно корисне за израчунавање интегралних трансформација као што су Фуријеова[1], Лапласова, Мелинова[2] и друге. Обично интеграле који се појављују у овим трансформацијама није могуће израчунати техникама реалне анализе.

#### Фуријеова трансформација

Фуријеова трансформација има широку употребу у решавању проблема диференцијалних једначина, физике и инжењерства. Уопштења Фуријеова трансформације су предмет изучавања многих математичких области, а ако узмемо у обзир и њене примене, онда можемо рећи и свих грана математике.

**Дефиниција 6.13.** *Нека је функција $f$ дефинисана на реалној оси и нека је $t \in \mathbb{R}$. Пишемо*

$$\mathcal{F}(f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx,$$

*кад овај несвојствени интеграл конвергира и добијену функцију $\mathcal{F}(f)(t),\ t \in \mathbb{R}$ зовемо Фуријеова трансформација функције $f$.*

Приметимо да ако је $f(x)$ апсолутно интеграбилна функција по $x$ на $(-\infty, \infty)$, онда је то и функција $e^{-itx} f(x)$ за свако фиксирано $t$, с обзиром да ове две функције имају исту апсолутну вредност. Дакле, за сваку апсолутно интеграбилну функцију $f$ постоји њена Фуријеова трансформација $\mathcal{F}(f)(t)$ за све $t \in \mathbb{R}$.

У наставку ћемо показати како да употребимо теорију остатака за одређивање Фуријеове трансформације функције која је аналитичка на $\mathbb{C}$, сем у пребројиво много тачака, и која тежи у нулу када $z \to \infty$. Кључна чињеница је да $|e^{-itz}| = e^{ty}$ брзо опада када $y = \operatorname{Im} z \to \infty$ за $t < 0$, док исти израз брзо опада када $y \to -\infty$ за $t > 0$. У првом случају интеграл којим дефинишемо Фуријеову трансформацију можемо да изразимо као суму остатака функције $f$ у горњој полуравни, док у другом случају можемо да га изразимо као суму остатака у доњој полуравни. Коначно, то ћемо и доказати у наредној теореми.

[1] Жан Батист Жозеф Фурије (Jean-Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830) - француски математичар и физичар

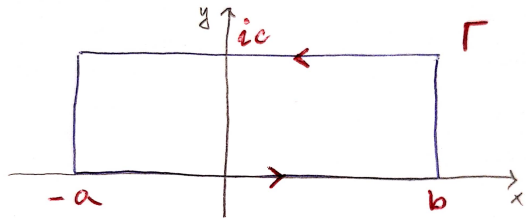
[2] Роберт Јалмар Мелин (Robert Hjalmar Mellin, 1854–1933) - фински математичар

**Теорема 6.14.** *Нека је $f$ функција која је аналитичка на $\mathbb{C}$, сем у пребројиво много тачака, тако да нема сингуларитете на реалној оси и да је $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Тада постоји $\mathcal{F}(f)(t)$ за $t \neq 0$. Фуријеова трансформација функције $f$ је једнака $\sqrt{2\pi}i$ пута сума остатака функције $f(z)e^{-izt}$ у горњој полуравни за $t < 0$, и једнака је $-\sqrt{2\pi}i$ пута сума остатака функције $f(z)e^{-izt}$ у тачкама доње полуравни за $t > 0$.*

***Доказ.*** Доказаћемо случај када је $t < 0$. Када је $t > 0$, доказ се изводи аналогно, при чему се уместо горње полуравни, користи доња полураван.

С обзиром да је $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, функција $f$ има коначно много сингуларитета.

Нека су $a, b$ и $c$ позитивни реални бројеви и нека је $\Gamma$ позитивно оријентисана контура која је граница правоугаоника са теменима $-a, b, b + ic$ и $-a + ic$, као на слици. Ако су $a, b$ и $c$ довољно велики, сви сингуларитети функције $f$ ће се налазити унутар контуре $\Gamma$.




Тада, користећи параметризацију контуре $\Gamma$, добијамо да је

$$\int_\Gamma f(z)e^{-izt}\,dz = \int_{-a}^{b} f(x)e^{-itx}\,dx + i\int_0^c f(b+iy)e^{-it(b+iy)}\,dy$$
$$- \int_{-a}^{b} f(x+ic)e^{-it(x+ic)}\,dx - i\int_0^c f(-a+iy)e^{-it(-a+iy)}\,dy. \tag{6.4}$$

Пустићемо лимит када $c \to \infty$, а затим и за $a$ и $b$ независно, и показати да тада последња три интеграла која се појављују у (6.4) теже у нулу.

Како је функција $|f|$ непрекидна на скупу где је функција $f$ аналитичка (цела комплексна раван $\mathbb{C}$ без коначно много тачака) и како $|f(z)| \to 0,\ z \to \infty$, закључујемо да $|f|$ достиже свој максимум дуж сваке праве која не пролази кроз сингуларитет функције $f$. Нека је $M_1$ максимум функције $|f|$ дуж вертикалне линије $\operatorname{Re} z = b$, $M_2$ максимум дуж хоризонталне линије $\operatorname{Im} z = c$, и $M_3$ максимум дуж вертикалне линије $\operatorname{Re} z = -a$. Ове вредности су функције по $b, c$ и $a$, респективно, и све теже у нулу када $a, b$ и $c$ теже у бесконачно, јер је $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$.

За трећи интеграл на десној страни једначине (6.4) важи

$$\left|\int_{-a}^{b} f(x+ic)e^{-it(x+ic)}\,dx\right| \le M_2\int_{-a}^{b} e^{tc}\,dx = M_2e^{tc}(b+a).$$

Како је $t < 0$, овај интеграл тежи у нулу када $c \to \infty$, за свако фиксирано $a, b > 0$.

За други интеграл са десне стране једнакости (6.4) важи

$$\left|\int_0^c f(b+iy)e^{-it(b+iy)}\,dy\right| \le M_1\int_0^c e^{ty}\,dy = \frac{M_1}{t}(e^{tc}-1).$$

Када $c \to \infty$ овај интеграл тежи у $-M_1/t$. Даље, како $M_1 \to 0,\ b \to \infty$ и цео интеграл тежи у нулу када $b, c \to \infty$. Аналогно се показује да и четврти интеграл са десне стране једнакости (6.4) тежи у нулу када $a, c \to \infty$.

Са друге стране, интеграл са леве стране једнакости (6.4) не мења своју вредност од оног момента када су $a$, $b$ и $c$ довољно велики тако да се сви сингуларитети функције $f$ нађу у унутрашњости контуре $\Gamma$. Тада је вредност посматраног интеграла једнака $2\pi i$ пута сума свих остатака подинтегралне функције. Дакле, када пустимо да $c \to \infty$, а затим и $a, b \to \infty$, добијамо да је

$$2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(fe^{-it\cdot}, z_j) = \lim_{(a,b)\to(\infty,\infty)} \int_{-a}^{b} f(x)e^{-itx}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}\,dx = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(t), \quad (6.5)$$

где су $z_1, \ldots, z_n$ сви сингуларитети функције $f$ у горњој полуравни. Коначно, када све поделимо са $\sqrt{2\pi}$ добијамо тврђење теореме за $t < 0$.

Приметимо да је постојање граничне вредности која се појављује (6.5), управо оно што се подразумева под конвергенцијом несвојственог интеграла којим је дефинисана Фуријеова трансформација $\mathcal{F}(f)(t)$.

Доказ за $t > 0$ је скоро идентичан. Разлика је што се користи да је $c < 0$. Тада контура $\Gamma$ лежи у доњој полуравни и негативно је оријентисана. Лева страна једнакости (6.5) сада почиње са $-2\pi i$ пута сума остатака функције $fe^{-it\cdot}$ у доњој полуравни, што смо и хтели да добијемо. □

### Инверзна Фуријеова трансформација

Инверзна Фуријеова трансформација $\mathcal{F}^{-1}(f)$ функције $f$ на $\mathbb{R}$ је композиција Фуријеове трансформације и симетрије у односу на координатни почетак, односно

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(t)\,dt.$$

Под одређеним условима, у тачки $x$ у којој је функција $f$ непрекидна, може се показати да је на овај начин заиста дефинисана инверзна трансформација Фуријеовој трансформацији, односно

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \mathcal{F}(f)(t)\,dt.$$

Доказ је прилично технички захтеван и може да се нађе у великом броју књига, те га ми изостављамо. Најчешће се претпоставља да су $f$ и $\mathcal{F}(f)$ апсолутно интеграбилне на $\mathbb{R}$, како би се обезбедило да сви несвојствени интеграли конвергирају.

### Полови првог реда на контури

Потпоглавље ћемо завршити теоремом која омогућава решавање интеграла код којих се полови првог реда налазе на контури.

**Теорема 6.15.** *Нека је функција $f$ аналитичка на $B'(0, R)$. Нека је тачка $0$ пол првог реда функције $f$ и нека је $\Gamma$ контура дата параметризацијом $z(t) = re^{it}$, $t \in [\theta_1, \theta_2]$, $r < R$. Тада је*

$$\lim_{r\to 0} \int_{\Gamma} f(z)\,dz = i(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{Res}(f, 0).$$

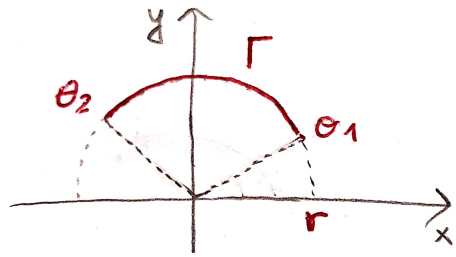
***Доказ.*** Како је $0$ пол првог реда функције $f$, она се у околини тачке $0$ може развити у Лоранов ред на следећи начин

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \ldots,$$

где је $a_{-1} = \operatorname{Res}(f, 0)$.

Интеграл дуж кружног лука $\Gamma$ првог сабирка у Лорановом развоју је једнак

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} ia_{-1}\, dt = i(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{Res}(f, 0),$$




док је за остале сабирке, $n \geq 0$, једнак

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} ia_n r^{n+1} e^{i(n+1)t}\, dt,$$

и има апсолутну вредност мању или једнаку од $|a_n| r^{n+1}(\theta_2 - \theta_1)$. Како интеграли за $n \geq 0$ теже у нулу када $r \to 0$, доказ је завршен. $\square$

### 6.2.4 Лапласова и Мелинова трансформација

У наставку ћемо се упознати и са друге две важне интегралне трансформације, Лапласовом и Мелиновом трансформацијом.

#### Лапласова трансформација

Лапласова трансформација функције $f$ над $[0, \infty)$, дефинише се на следећи начин

$$\mathcal{L}(f)(\lambda) = \int_0^\infty e^{-x\lambda} f(x)\, dx \tag{6.6}$$

за све комплексне бројеве $\lambda$ за које овај интеграл конвергира. Ако је $\omega$ такав реалан број да је функција $e^{-x\omega} f(x)$ апсолутно интеграбилна по $x$ над $[0, \infty)$, онда је и функција $e^{-x\lambda} f(x)$ интеграбилна по $x$ за све $\lambda$ такве да је $\operatorname{Re}\lambda \geq \omega$. Интеграл $\mathcal{L}(f)$ је аналитичка функција по $\lambda$ у отвореној полуравни $\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re}\lambda > \omega\}$ и то таква да јој је у овој полуравни гранична вредност 0 када $\lambda \to \infty$. Приметимо, како је

$$\mathcal{L}(f)(s + it) = \int_0^\infty e^{-ixt} e^{-xs} f(x)\, dx,$$

Лапласова трансформација функције $f$ у тачки $s + it$ је $\sqrt{2\pi}$ пута Фуријеова трансформација функције $g$ која је једнака $e^{-xs} f(x)$ за $x \geq 0$ и 0 за $x < 0$. Ако је могуће применити инверзну Фуријеову трансформацију на $\mathcal{F}(g)$, онда се $f$ може реконструисати из своје Лапласове трансформације. Специјално, за $\lambda = s + it$

$$f(x) = \frac{e^{xs}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(f)(s + it) e^{ixt}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \mathcal{L}(f)(\lambda) e^{x\lambda}\, d\lambda. \tag{6.7}$$

Ово ћемо називати инверзном Лапласовом трансформацијом.

На отвореној полуравни где је $\mathcal{L}(f)$ дефинисана и аналитичка, интеграл у (6.7) не зависи од $s$ и, ако је $x < 0$, тежи у нулу када $s \to \infty$. Ако се $\mathcal{L}(f)$ може продужити лево од $\operatorname{Re}\lambda = \omega$, тако да добијена функција буде аналитичка на $\mathbb{C}$ сем у коначно много сингуларитета, онда интеграл у (6.7) можемо израчунати употребом Кошијеве теореме о остацима. Тачније, треба израчунати

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\mathcal{L}(f)(\lambda)e^{x\lambda}\,d\lambda,$$

где је $\Gamma$ руб правоугаоника чија унутрашњост садржи све сингуларитете и чија је фиксна ивица, десна ивица, која лежи на вертикалној правој $\operatorname{Re}\lambda = \omega$. Као и у доказу теореме о Фуријеовој трансформацији, Теорема 6.14, интеграл не зависи од избора правоугаоника и, са једне стране је једнак интегралу датом у (6.7), а са друге стране је једнак суми остатака функције $\mathcal{L}(f)(\lambda)e^{x\lambda}$. Дакле, ако је $f$ непрекидна на $(0,\infty)$ и ако има Лапласову трансформацију која је аналитичка, сем у коначно много сингуларитета, онда је

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}\left(\mathcal{L}(f)(\lambda)e^{x\lambda}, \lambda_i\right),$$

где су $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ сви сингуларитети функције $\mathcal{L}(f)$.

### Мелинова трансформација

Нека је функција $f$ дефинисана за позитивне реалне бројеве. Тада се функција по $t$

$$\int_0^{\infty} f(x)x^{t-1}\,dx, \tag{6.8}$$

за $t > 0$, назива Мелинова трансформација функције $f$. Овај несвојствени интеграл може да дивергира за све $t > 0$ или да конвергира само за неке вредности параметра $t$. Користећи теорију остатака, навешћемо неке услове за $f$ и $t$ под којим ће овај интеграл конвергирати и дати формулу за његово израчунавање.

Претпоставимо да је функција $f$ аналитичка на $\mathbb{C}$ сем у коначно много сингуларитета, од којих ни један није на позитивном делу реалне осе. Дефинишимо функцију $z^{t-1}$, аналитичку на $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$, на следећи начин: Поставићемо засек на позитивном делу реалне осе и означити са $\ln_0 z$, $z \neq 0$ главну грану логаритамске функције, тако да $\arg z$ припада интервалу $[0, 2\pi]$. Приметимо да смо за тачке са позитивног дела реалне осе дозволили две вредности, односно да је $\arg z = 0$ и $\arg z = 2\pi$. Можемо то замислити као две копије позитивне реалне полуправе $(0,\infty)$, тако да је на горњој $\arg z = 0$, а на доњој $\arg z = 2\pi$. Наша логаритамска функција $\ln_0 z$ је уобичајена логаритамска функција дуж горње копије, а плус $2\pi i$ дуж доње копије позитивне реалне полуосе. Дефинишимо сад

$$z^{t-1} = e^{(t-1)\ln_0 z}, \qquad z \neq 0.$$

У наредној теореми ћемо израчунати вредност интеграла (6.8) користећи криволинијски интеграл.

**Теорема 6.16.** *Нека је функција $f$ аналитичка на $\mathbb{C}$, сем у коначно много сингуларитета, од којих ни један није на позитивном делу реалне осе, и нека су $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ненула сингуларитети функције $f$. Претпоставимо да $t$ није цео број и да функција $|f(z)||z|^t$ тежи у нулу када $z \to 0$ и $z \to \infty$. Тада Мелинова трансформација функције $f$ постоји у тачки $t$ и једнака је*

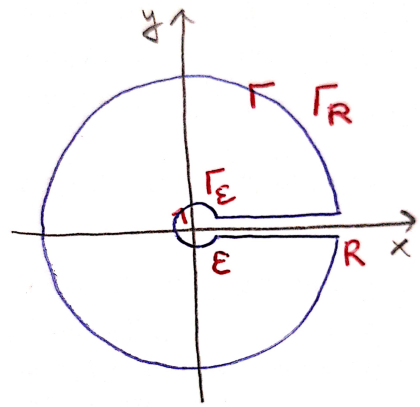
$$\int_0^{\infty} f(x)x^{t-1}\,dx = -\pi\frac{e^{-\pi t i}}{\sin(\pi t)}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}(g, z_j), \tag{6.9}$$

*где је $g(z) = f(z)z^{t-1}$ на $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ и функција $z^{t-1}$ је дефинисана као што је горе наведено.*

***Доказ.*** Нека крива $\Gamma$ иде дуж горње копије позитивног дела реалне осе од $\varepsilon > 0$ до $R > 0$, затим дуж централне кружнице полупречника $R$, $\Gamma_R$, па дуж доње копије позитивног дела реалне осе од $R$ до $\varepsilon$ и на крају дуж централне кружнице полупречника $\varepsilon$, $\Gamma_\varepsilon$.

Нека су $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ненула сингуларитети функције $f$ и нека је $R$ довољно велико и $\varepsilon$ довољно мало тако да се сви сингуларитети налазе унутар контуре $\Gamma$. Нека је

$$g(z) = f(z)z^{t-1}, \qquad z \notin [0, \infty).$$




Тада на основу Кошијеве теореме о остатку имамо

$$2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(g, z_j) = \int_\Gamma f(z)z^{t-1}\,dz = \int_\varepsilon^R f(x)x^{t-1}\,dx + \int_{\Gamma_R} f(z)z^{t-1}\,dz$$
$$- e^{2\pi i(t-1)} \int_\varepsilon^R f(x)x^{t-1}\,dx - \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)z^{t-1}\,dz. \tag{6.10}$$

Ако интеграли дуж $\Gamma_R$ и $\Gamma_\varepsilon$ теже у нулу када $R \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$, онда је

$$2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(g, z_j) = (1 - e^{2\pi i(t-1)}) \int_0^\infty f(x)x^{t-1}\,dx.$$

Како $t$ није цео број можемо поделити са $1 - e^{2\pi i(t-1)}$, те добијамо

$$\int_0^\infty f(x)x^{t-1}\,dx = -\pi \frac{e^{-\pi i t}}{\sin(\pi t)} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(g, z_j).$$

Остаје још да се покаже да интеграли дуж $\Gamma_R$ и $\Gamma_\varepsilon$ у (6.10) теже у нулу када $R \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$. Нека је $M(R)$ максимум функције $|f|$ на $\Gamma_R$. Тада је

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)z^{t-1}\,dz \right| \leq 2\pi M(R) R^t,$$

па интеграл по $\Gamma_R$ тежи у нулу када $R \to \infty$ јер је $\lim_{z\to\infty} |f(z)||z|^t = 0$. Слично, нека је $M(\varepsilon)$ максимум функције $|f|$ на $\Gamma_\varepsilon$. Тада је

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)z^{t-1}\,dz \right| \leq 2\pi M(\varepsilon) \varepsilon^t,$$

па и интеграл по $\Gamma_\varepsilon$ тежи у нулу када $\varepsilon \to 0$ јер је $\lim_{z\to 0} |f(z)||z|^t = 0$. Овим је доказ завршен. $\square$

### 6.2.5 Бројни редови

У овом поглављу ћемо показати како може да се користи Кошијева теорема о остатку за сумирање редова облика

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n), \tag{6.11}$$

где је функција $f$ аналитичка на $\mathbb{C}$ сем у изолованим сингуларитетима.

Идеја је следећа: Нека је функција $g$ аналитичка на $\mathbb{C}$ сем у целим бројевима где има полове првог реда, тако да је остатак у њима једнак 1, онда ће функција $fg$ имати полове првог реда у целим бројевима тако да је остатак $f(n)$. Ако можемо да изаберемо растући низ простих затворених контура $\{\Gamma_N\}$, тако да се сваки сингуларитет функције $fg$ налази унутар неке од контура $\Gamma_N$ за довољно велико $N$ и тако да интеграл од $fg$ дуж $\Gamma_N$ тежи у нулу када $N \to \infty$, онда на основу Кошијеве теореме о остатку можемо да тврдимо да сума остатака функције $fg$ чини конвергентан ред који тежи у нулу. Ако $f$ има само коначно много сингуларитета и ни један од њих није цео број, онда је ред (6.11) конвергентан и конвергира ка негативној вредности суме остатака функције $fg$ у сингуларитетима функције $f$. Ако функција $f$ има сингуларитет и у неком од целих бројева, онда се ова техника мора томе прилагодити на одговарајућ начин, као што ћемо у наставку показати.

Ова процедура може да се спроведе за одговарајуће функције $f$ и $g$. Један од најчешћих избора за функцију $g$ је $g(z) = \pi \operatorname{ctg}(\pi z)$.

Како функција $\sin(\pi z)$ има само нуле првог реда у целим бројевима и нема других нула, мероморфна функција

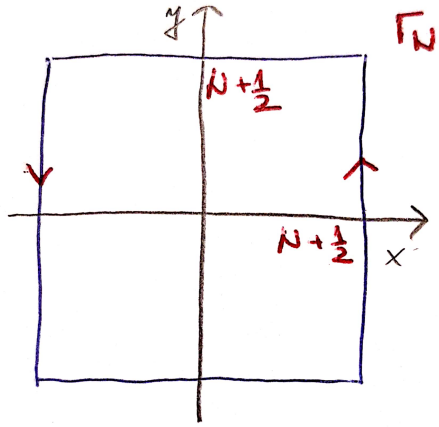
$$\operatorname{ctg}(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

има само полове првог реда у целим бројевима и нема других сингуларитета. Остатак ове функције је $1/\pi$ у свакој тачки $n \in \mathbb{Z}$. Дакле, важи следећа лема.

**Лема 6.17.** *Функција $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ има полове првог реда у сваком целом броју, тако да је остатак 1 и нема других полова.*

Функција $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ није ограничена у околини бесконачности, јер има полове у свим целим бројевима. Међутим, постоји низ затворених контура, које конвергирају у $\infty$, дуж којих је ова функција ограничена.

Те контуре $\Gamma_N$, где је $N$ природан број, су позитивно оријентисане контуре које представљају границу квадрата са теменима у тачкама $(N + 1/2)(1+i)$, $(N+1/2)(-1+i)$, $(N+1/2)(-1-i)$ и $(N + 1/2)(1 - i)$.



**Лема 6.18.** *Постоји позитиван број $R$ тако да је $|\operatorname{ctg}(\pi z)| \leq 2$ за $z \in \Gamma_N$ за свако $N > R$.*

***Доказ.*** Важи

$$\operatorname{ctg}(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = i\,\frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} = i\,\frac{e^{2\pi i z} + 1}{e^{2\pi i z} - 1} = i\,\frac{e^{2\pi i x}e^{-2\pi y} + 1}{e^{2\pi i x}e^{-2\pi y} - 1},$$

где је $z = x + iy$. Дакле,

$$|\operatorname{ctg}(\pi z)| = \left|\frac{e^{2\pi i x}e^{-2\pi y} + 1}{e^{2\pi i x}e^{-2\pi y} - 1}\right|.$$

Ако је $x = N + 1/2$ за $N \in \mathbb{Z}$, онда је $e^{2\pi i x} = -1$ и $|\operatorname{ctg}(\pi z)| \leq 1$. Дакле, $|\operatorname{ctg}(\pi z)| \leq 1$ дуж вертикалних страна контуре $\Gamma_N$. На хоризонталним странама, где је $y$ фиксирано и износи $\pm(N + 1/2)$, $N \in \mathbb{N}$, функција $|\operatorname{ctg}(\pi z)|$ достиже максимум када је $e^{2\pi i x} = 1$, а то је када су $x$ цели бројеви. Дакле, тада је максимум

$$\left|\frac{e^{\pm(2N+1)\pi} + 1}{e^{\pm(2N+1)\pi} - 1}\right|.$$

Како овај израз тежи у 1 када $N \to \infty$, онда постоји $M$ тако да је он мањи од 2 када је $N > M$. □

**Лема 6.19.** *Нека је $\Gamma_N$ као што је горе дефинисано. Тада је за свако $N \in \mathbb{N}$*

$$\int_{\Gamma_N} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z}\, dz = 0.$$

***Доказ.*** Функција $h(z) = \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z}$ је аналитичка у унутрашњости контуре $\Gamma_N$ сем у целим бројевима, где има полове. На основу Кошијеве теореме о остатку

$$\int_{\Gamma_N} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z} = 2\pi i \sum_{n=-N}^{N} \operatorname{Res}(h, n).$$

Како је $h$ парна функција, њен остатак у 0 је 0. У ненула целим бројевима, функција $h$ има полове првог реда и остаци у тим тачкама $n$ су $1/n$, $n = -N, -N+1, \ldots, N-1, N$. Коначно ово све имплицира да је тражени интеграл једнак 0. □

Користећи особине ове функције $g(z) = \pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ сада можемо да докажемо теорему о сумирању редова.

**Теорема 6.20.** *Нека је функција $f$ аналитичка на $\mathbb{C}$ сем у коначно много тачака*

$$E = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\},$$

*које су њени изоловани сингуларитети. Претпоставимо да постоје позитивни реални бројеви $R$ и $M$ такви да је*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|}, \qquad |z| \geq R. \tag{6.12}$$

*Тада је*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}_N} f(n) = -\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(\pi f(z) \operatorname{ctg}(\pi z), z_j),$$

*где је $\mathbb{Z}_N$ скуп целих бројева из $[-N, N]$ који не припадају $E$.*

***Доказ.*** Сингуларитети функције $\pi f(z)\operatorname{ctg}(\pi z)$ су сви цели бројеви и тачке из скупа $E$. У тачки $n \in \mathbb{Z}$ која није у $E$, ова функција има остатак $f(n)$, јер функција $\operatorname{ctg}(\pi z)$ има пол првог реда са остатком 1 у тачки $n$, док функција $f$ нема сингуларитет у $n$. Ако је $N$ довољно велико тако да се цео скуп $E$ налази унутар контуре $\Gamma_N$, Кошијева теорема о остатку имплицира да је

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} \pi f(z)\operatorname{ctg}(\pi z)\,dz = \sum_{n\in\mathbb{Z}_N} f(n) + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\pi f(z)\operatorname{ctg}(\pi z), z_j\right).$$

Дакле, остало је још да покажемо да интеграл на левој страни једнакости конвергира у нулу када $N \to \infty$.

Нека су позитивни реални бројеви $M$ и $R$ такви да важи (6.12), Лема 6.18 и да је $|z_j| \leq R$ за све $z_j \in E$. Тада је функција $f$ аналитичка на прстену $A = \{z \,:\, R < |z| < \infty\}$ и тежи у нулу када $z \to \infty$. Функција $f$ се дакле на овом прстену може развити у Лоранов ред само са негативним степенима од $z$ и нека је

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \ldots, \qquad z \in A.$$

Користећи Лему 6.19, имамо да је

$$\int_{\Gamma_N} \frac{\pi\operatorname{ctg}(\pi z)}{z}\,dz = 0,$$

те је

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} \pi f(z)\operatorname{ctg}(\pi z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} \pi\left(f(z) - \frac{c_{-1}}{z}\right)\operatorname{ctg}(\pi z)\,dz. \tag{6.13}$$

Даље, функција

$$f(z) - \frac{c_{-1}}{z} = \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \ldots$$

је облика $q(z)/z^2$ на $A$, где је функција $q$ аналитичка на $A$ и тежи у $c_{-2}$ када $z \to \infty$. Ово имплицира да је, за неко $R_1 > R$, функција $|q|$ ограничена позитивном константом $M_1$ на $\{z \,:\, |z| \geq R_1\}$. Тада је, на основу Леме 6.18, подинтегрална функција са десне стране једнакости (6.13) ограничена одозго са $2\pi M_1/|z|^2$. Како је $|z| > N$ на $\Gamma_N$ и како је дужина $\Gamma_N$ једнака $8N+4$, добијамо да је

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} \pi f(z)\operatorname{ctg}(\pi z)\,dz\right| \leq \frac{M_1(8N+4)}{N^2},$$

те посматрани интеграл конвергира у нулу када $N \to \infty$, што смо и хтели да докажемо. □

## 6.3 Принцип аргумента и Рушеова теорема

На основу Кошијеве теореме о остатку, у овом одељку ћемо извести два веома примењива теоријска резултата: Принцип аргумента и Рушеову[3] теорему. Ови резултати се односе на функције којима су полови једини сингуларитети, те ћемо прво дефинисати ту класу функција.

[3]Ежен Руше (Eugéne Rouché, 1832–1910) - француски математичар

**Дефиниција 6.21.** *Функција $f$ се назива мероморфна на домену $D$ ако је у свакој тачки скупа $D$ или аналитичка или има пол.*

Функције које су аналитичке на неком домену $D$ су, свакако, примери мероморфних функција. Такође, можемо одмах навести и рационалне функције као пример функција које су мероморфне на целој комплексној равни $\mathbb{C}$.

Нека је дата функција $f$ која је аналитичка и ненула у свим тачкама контуре $\Gamma$ и мероморфна унутар контуре $\Gamma$. Приметимо прво да функција $f$ може имати само коначно много полова унутар контуре $\Gamma$. Наиме, контура $\Gamma$ са својом унутрашњошћу чини компактан скуп, означимо тај скуп са $G$, те ако би било бесконачно много полова, они би морали да се нагомилавају око неке тачке $z_0 \in G$ која је тада тачка нагомилавања сингуларитета, па није чак ни изоловани сингуларитет.

Број нула мероморфне функције $f$ унутар контуре $\Gamma$, која је аналитичка и ненула на самој контури $\Gamma$, такође мора бити коначан. Наиме, претпоставимо супротно да је скуп нула функције $f$ бесконачан. Тада би оне морале да се нагомилавају око неке тачке $z_0$. Ако би функција $f$ била аналитичка у тачки $z_0$, онда би на основу непрекидности функције $f$, тачка $z_0$ била нула функције $f$. Одавде на основу Последице 5.27, следи да је функција $f$ идентички једнака нули на некој околини тачке $z_0$. Аналитичким продужењем, као рубу области унутар контуре $\Gamma$, вредност функције $f$ би била нула и на самој контури $\Gamma$, што смо претпоставили да није. Друга могућност је да функција $f$ није аналитичка у $z_0$, односно да је $z_0$ неки изоловани сингуларитет. Међутим, у том случају гранична вредност $\lim_{z\to z_0} f(z)$ не може бити ни неки коначан број (различит од нуле), ни бесконачно (јер постоји подниз који конвергира у нулу), те остаје само могућност да је есенцијални сингуларитет, али и то је у контрадикцији са претпоставком да је $f$ мероморфна.

**Лема 6.22.** *Нека је функција $f$ аналитичка и ненула дуж контуре $\Gamma$ и нека је $\Gamma$ проста затворена позитивно оријентисана контура. Тада је*

$$\oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = i\,\Delta_\Gamma \arg f,$$

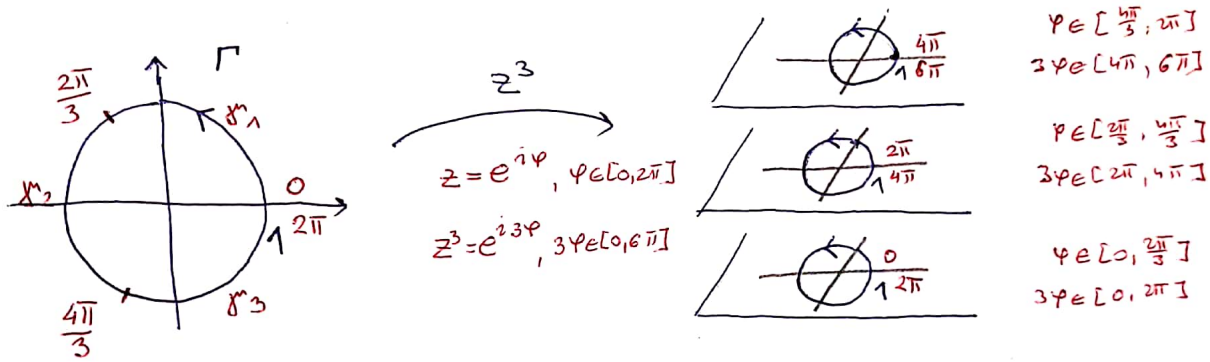
*где је са $\Delta_\Gamma \arg f$ означена промена аргумента вредности функције $f$ дуж контуре $\Gamma$.*

***Доказ.*** Нека је контура $\Gamma$ параметризована пресликавањем $z(t),\ t \in [0,1]$. Идеја је да применимо смену променљиве $s = f(z)$. Тада ћемо требати да интегралимо по контури $f[\Gamma]$, која је параметризована пресликавањем $f(z(t)),\ t \in [0,1]$. Међутим, добијена контура $f[\Gamma]$ можда више није проста, односно можда неколико пута обилази око координатног почетка. Ово за последицу има да, иако су прва $f(z(0))$ и последња $f(z(1))$ тачка на контури једнаке, оне могу да буду представљене различитим аргументима, тј. да припадају разним Римановим површима. Због тога ћемо поделити интервал $[0,1]$ на $n$ подинтервала $[t_{j-1}, t_j],\ j = 1,2,\ldots,n$, где је $t_0 = 0$ и $t_n = 1$, тако да су $f(z(t_{j-1}))$ и $f(z(t_j)),\ i = 1,2,\ldots,n$ у истој Римановој површи. Обележимо са $\gamma_j$ део контуре $\Gamma$ тако да је $\gamma_j = \{z(t) \mid t \in [t_{j-1}, t_j]\},\ j = 1,2,\ldots,n$. Важи:

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \oint_{f[\Gamma]} \frac{ds}{s} = \sum_{j=1}^{n} \int_{f[\gamma_j]} \frac{ds}{s} = \sum_{j=1}^{n} \left(\ln f(z(t_j)) - \ln f(z(t_{j-1}))\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\ln |f(z(t_j))| + i \arg f(z(t_j)) - \ln |f(z(t_{j-1}))| - i \arg f(z(t_{j-1}))\right) \\
&= i\,[\arg f(z(1)) - \arg f(z(0))] = i\,\Delta_\Gamma \arg f,
\end{aligned}$$

што смо и хтели да докажемо. □

**Пример 6.23.** Функција $f(z) = z^3$ пресликава кружницу $\Gamma : \ z = e^{i\varphi}, \ \varphi \in [0, 2\pi]$ на кружницу $f[\Gamma] : \ w = f(z) = e^{i\varphi}, \ \varphi \in [0, 6\pi]$ која три пута обилази око координатоног почетка. Да бисмо добили делове контуре $f[\Gamma]$ који се налазе у истој Римановој површи, почетни интервал делимо на три дела $[0, 2\pi/3], \ [2\pi/3, 4\pi/3]$ и $[4\pi/3, 2\pi]$. Овим смо и почетну контуру $\Gamma$ поделили на три $\gamma_j$ : $z = e^{i\varphi}, \ \varphi \in [2(j-1)\pi/3, 2j\pi/3], \ j = 1, 2, 3$. Сада, јасно, важи: $f(\gamma_j) : \ w = z^3 = e^{i\varphi}, \ \varphi \in [2(j-1)\pi, 2j\pi], \ j = 1, 2, 3$, што су три целе кружнице у различитим Римановим површима.




Дакле, промена аргумента вредности функције $f$ дуж контуре $\Gamma$ је:

$$\Delta_\Gamma \arg f = \arg f(z(2\pi)) - \arg f(z(0)) = \arg f(e^{2\pi i}) - \arg f(e^{0i}) = \arg e^{6\pi i} - \arg e^{0i} = 6\pi. \qquad \square$$

**Теорема 6.24** (Принцип аргумента)**.** *Нека је контура $\Gamma$ проста затворена и позитивно оријентисана. Нека је функција $f$ аналитичка и ненула у свакој тачки контуре $\Gamma$ и мероморфна унутар контуре $\Gamma$. Тада је*

$$N_\Gamma(f) - P_\Gamma(f) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f,$$

*где је са $N_\Gamma(f)$ и $P_\Gamma(f)$ обележен број нула и полова функције $f$ унутар контуре $\Gamma$, редом, рачунајући и њихову вишеструкост.*

***Доказ.*** Доказаћемо да, под условима теореме, важи:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = N_\Gamma(f) - P_\Gamma(f),$$

одакле ће, на основу Леме 6.22, директно следити тврђење теореме.

Идеја доказа је да одредимо све сингуларитете подинтегралне функције

$$G(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad z \in \overline{int\,\Gamma},$$

и израчунамо остатак у свакој од тих тачака. Приметимо да је функција $G$ аналитичка у свим тачкама са контуре $\Gamma$, јер је ту функција $f$ аналитичка и ненула. Сингуларитети унутар контуре $\Gamma$ функције $G$ настају у оним тачкама где је функција $f$ једнака нули или има пол.

Нека је $z_N \in int\,\Gamma$ нула реда $m$ функције $f$. Тада се, на основу Леме 5.26, она може написати у облику:

$$f(z) = (z - z_N)^m h(z),$$

где је функција $h$ аналитичка и ненула у тачки $z = z_N$. Тада за неко $r > 0$ важи:

$$G(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_N} + \frac{h'(z)}{h(z)}, \quad B'(z_N, r).$$

С обзиром да је функција $h'/h$ аналитичка у тачки $z = z_N$, видимо да функција $G$ има пол првог реда у тачки $z_N$ и важи $\operatorname{Res}(G, z_N) = m$. Дакле, остатак функције $G$ у тачки $z_N$ која је нула функције $f$ је једнак вишеструкости те нуле $z_N$ за функцију $f$.

Са друге стране, ако је тачка $z_P \in int\,\Gamma$ пол реда $k$ функције $f$, онда, на основу Леме 5.33, важи:

$$f(z) = \frac{H(z)}{(z - z_P)^k},$$

где је функција $H$ аналитичка и ненула у тачки $z = z_P$. Тада постоји $R > 0$ тако да

$$G(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{H'(z)}{H(z)} - \frac{k}{z - z_P}, \quad B'(z_P, R).$$

Користећи аналитичност функције $H'/H$ у тачки $z = z_P$, закључујемо да је $z_P$ пол првог реда функције $G$ и да је $\operatorname{Res}(G, z_P) = -k$. Остатак функције $G$ у тачки $z_P$ која је пол функције $f$ је минус вишеструкост тог пола $z_P$ за функцију $f$.

Коначно, на основу Кошијеве теореме о остатку, добијамо

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma G(z)\,dz &= \sum_{\underbrace{z_S \in int\,\Gamma}_{\text{сингуларитети функције } G}} \operatorname{Res}(G, z_S) \\ &= \sum_{\underbrace{z_N \in int\,\Gamma}_{\text{нуле функције } f}} \operatorname{Res}(G, z_N) + \sum_{\underbrace{z_P \in int\,\Gamma}_{\text{полови функције } f}} \operatorname{Res}(G, z_P) = N_\Gamma(f) - P_\Gamma(f),\end{aligned}$$

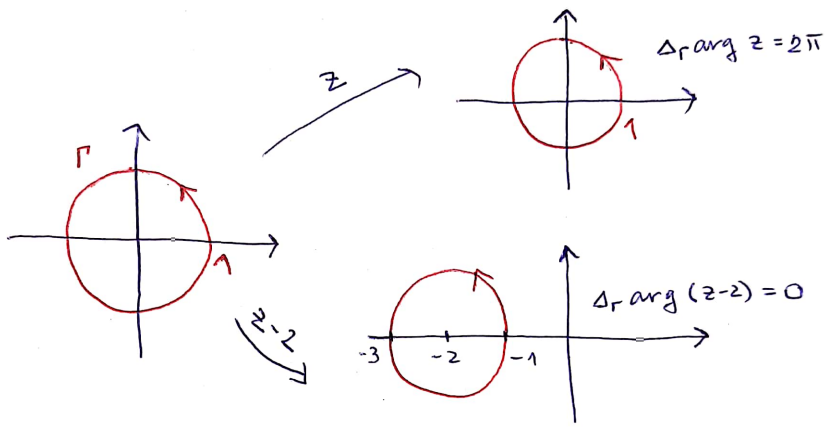
што смо и хтели да покажемо. □

**Последица 6.25.** *Нека је функција $f$ аналитичка унутар и на простој затвореној позитивно оријентисаној контури $\Gamma$ и нека је $f$ ненула на $\Gamma$. Тада је*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N_\Gamma(f) = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_\Gamma \arg f,$$

*где је $N_\Gamma(f)$ број нула функције $f$ унутар контуре $\Gamma$, рачунајући и њихову вишеструкост, а $\Delta_\Gamma \arg f$ промена аргумента вредности функције $f$ дуж контуре $\Gamma$.*

**Пример 6.26.** Функција $f(z) = z^2 - 2z = z(z-2)$ има само једну нулу унутар кружнице $\Gamma : |z| = 1$, те је промена аргумента $\Delta_\Gamma \arg f = 2\pi$. Међутим, с обзиром да је у питању квадратна функција, могли бисмо мислити да је промена аргумента једнака $4\pi$. То би и било тачно да је контура $\Gamma$ била нека већа кружница која обухвата обе нуле ове квадратне једначине, овако је промена аргумента ипак $2\pi$.




Заиста,

$$\Delta_\Gamma \arg f(z) = \Delta_{|z|=1} \arg z(z-2) = \Delta_{|z|=1} \arg z + \Delta_{|z|=1} \arg(z-2) = 2\pi + 0 = 2\pi. \qquad \square$$

Дакле, израчунавање промене аргумента вредности функције $f$ дуж контуре $\Gamma$ се своди на одређивање колико пута контура $f(\Gamma)$ обиђе око координатног почетка, а Принцип аргумента ту вредност повезује са бројем нула мероморфне функције $f$ унутар контуре $\Gamma$. У наставку ћемо видети колико можемо да променимо, пертурбујемо, функцију $f$, а да се број нула или промена аргумента не измене.

**Теорема 6.27** (Рушеова теорема)**.** *Нека су функције $f$ и $g$ аналитичке дуж и унутар контуре $\Gamma$, која је проста затворена и позитивно оријентисана. Нека важи строга неједнакост:*

$$|g(z)| < |f(z)|, \qquad z \in \Gamma. \tag{6.14}$$

*Тада је $N_\Gamma(f) = N_\Gamma(f+g)$.*

***Доказ.*** Пре него што пређемо на сам доказ, приметимо да се неједнакост (6.14) односи само на тачке са контуре $\Gamma$, а не и на тачке из унутрашњости. Такође, иста неједнакост имплицира да за $z \in \Gamma$ важи:

$$|f(z)| > 0, \quad |(f+g)(z)| \geq ||f(z)| - |g(z)|| > 0, \quad \left|\left(1 + \frac{g}{f}\right)(z)\right| \geq \left|1 - \frac{|g(z)|}{|f(z)|}\right| > 0$$

те су све три поменуте функције ненула на контури $\Gamma$. Јасно, функције $f$, и $f+g$ су аналитичке унутар и на контури $\Gamma$, а функција $1 + \frac{g}{f}$ је сигурно аналитичка у тачкама са контуре $\Gamma$. Сада су испуњени услови Последице 6.25 и Леме 6.22, те важи:

$$\begin{aligned}
N_\Gamma(f+g) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{(f+g)'(z)}{(f+g)(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{\left(f\left(1+\frac{g}{f}\right)\right)'(z)}{f\left(1+\frac{g}{f}\right)(z)}\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f'\left(1+\frac{g}{f}\right)(z) + f\left(1+\frac{g}{f}\right)'(z)}{f\left(1+\frac{g}{f}\right)(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{\left(1+\frac{g}{f}\right)'(z)}{\left(1+\frac{g}{f}\right)(z)}\, dz \\
&= N_\Gamma(f) + \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg\left(1 + \frac{g}{f}\right).
\end{aligned}$$

Коначно, доказ завршавамо примедбом да је промена аргумента вредности функције $1+\frac{g}{f}$ дуж контуре $\Gamma$ једнака нули. Заиста, за $z \in \Gamma$ је задовољено $\left|\left(1+\frac{g}{f}(z)\right)-1\right| < 1$, па важи

$$\left\{1+\frac{g(z)}{f(z)},\ z \in \Gamma\right\} \subseteq S(1,1),$$

односно слика контуре $\Gamma$ добијена функцијом $1+\frac{g}{f}$ ни једном не обилази око координатног почетка, јер је унутар кружнице $S(1,1)$. □

**Пример 6.28.** Покажимо да се свих пет нула полинома $p(z) = z^5+3z+1$ налазе унутар лопте $|z| < 2$.

Означимо са $f(z) = z^5$ и $g(z) = 3z+1$, тада је $p = f+g$. Руб лопте $|z| < 2$ је кружница $|z| = 2$. Покажимо да је $|g(z)| < |f(z)|$, на рубу $|z| = 2$.

$$|g(z)| = |3z+1| \leq 3|z|+1 \leq 3\cdot 2+1 = 7 < 32 = 2^5 = |z^5| = |f(z)|, \qquad |z| = 2.$$

На основу Рушеове теореме добијамо да је $N_{|z|=2}(f) = N_{|z|=2}(f+g) = N_{|z|=2}(p)$. Како је $z = 0$ нула петог реда функције $f$ и припада унутрашњости лопте $|z| < 2$, добијамо да је $N_{|z|=2}(p) = 5$. □

Важна последица Рушеове теореме је чињеница да су аналитичке функције увек отворена пресликавања.

**Теорема 6.29** (Теорема о отвореном пресликавању)**.** *Нека је функција $f$ аналитичка и неконстантна на области $D$. Тада је слика*

$$f[D] = \{w \mid w = f(z),\ z \in D\}$$

*отворен скуп.*

***Доказ.*** Нека је функција $f$ аналитичка у некој околини тачке $z_0 \in D$ и нека је $f(z_0) = 0$. Тада, с обзиром да функција $f$ није константна, постоји $\delta > 0$ тако да је $f(z) \neq 0$ за $z \in S(z_0,\delta)$ на основу Последице 5.27. Нека је $\sigma$ минимална вредност $|f(z)|$ за $z \in S(z_0,\delta)$. Нека је $w \in \mathbb{C}$ такво да је $|w| < \sigma$. Тада је функција $f(z)-w$ аналитичка на $B(z_0,\delta)$ и ненула на рубу $S(z_0,\delta)$, па на основу Рушеове теореме важи:

$$|-w| < |f(z)|, \quad z \in S(z_0,\delta) \quad \Rightarrow \quad N_{S(z_0,\delta)}(f) = N_{S(z_0,\delta)}(f-w).$$

Дакле, за свако $w \in B(0,\sigma)$ постоји $z \in B(z_0,\delta)$ тако да је $f(z) = w$, односно слика сваке отворене околине тачке $z_0$ садржи отворену околину нуле. Другим речима, ако је $0 \in f[D]$, за добро изабране $\delta,\sigma > 0$, важи да је $B(0,\sigma) \subseteq f[B(z_0,\delta)] \subseteq f[D]$, тј. $f[D]$ је околина тачке 0.

Слично се показује да је и за тачке $z_0 \in D$ такве да је $f(z_0) = w_0 \neq 0$, примењујући описани поступак на функцију $f(z)-w_0$, слика сваке њене околине таква да садржи отворену околину тачке $w_0$ у кодомену. Односно, $f[D]$ је околина сваке своје тачке, па је отворен скуп. □

# Глава 7

# Аналитичко продужење

При решавању одређених проблема, често се дешава да решење добијемо у облику степеног реда. Показали смо да степени ред униформно конвергира ка функцији $f$ која је аналитичка, при чему та конвергенција важи на неком отвореном скупу $\Omega$. С друге стране, може да се догоди да добијена аналитичка функција $f$ буде дефинисана на много већем отвореном скупу. На пример, степени ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

униформно конвергира на јединичној лопти $B(0,1)$, и његова сума је функција која је аналитичка на тој лопти. Тачније, познато је да је сума овог реда аналитичка функција $f$, чији је алгебарски облик

$$f(z) = \frac{1}{1-z},$$

те је она сигурно аналитичка на $B(0,1)$. Међутим, ми знамо да је она аналитичка и на много већем отвореном скупу $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Даље, према теореми о инверзној функцији, аналитичка функција $f$, чији је извод у тачки $z_0 \in \Omega$ различит од нуле, има инверзну функцију која је такође аналитичка и која је дефинисана у некој околини $W$ тачке $f(z_0)$. Теорема гарантује постојање инверзне функције у некој, потенцијално врло малој околини течке $f(z_0)$, па је природно запитати се колико се тај скуп може проширити, а да функција и даље остане аналитичка.

Постоје многе ситуације овакве природе, где је решење дато као аналитичка функција локално, или само у околини неке тачке. Одавде се природно намеће питање колико се домен дефинисаности може проширити тако да је функција на њему аналитичка и да је решење полазног проблема. Питања овог типа су питања аналитичког продужења.

Један метод аналитичког продужења је Шварцов[1] принцип рефлексије. Други начин аналитичког продужења је, такозвано, продужење дуж криве $\gamma$. У наставку ћемо ближе представити ове две методе.

## 7.1 Шварцов принцип рефлексије

Један од начина да се аналитичка функција продужи на шири домен, је да се искористи њена унутрашња особина симетричности. Шварцов принцип рефлексије користи операцију коњугације $z \mapsto \bar{z}$,

[1] Карл Херман Амандус Шварц (Karl Hermann Amandus Schwarz, 1843–1921) - немачки математичар

која тачку слика у њој симетричну тачку у односу на $x-$осу.

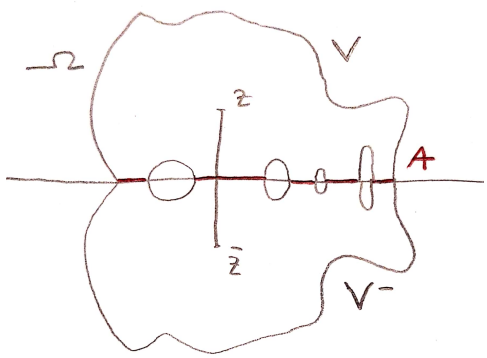
У наставку, ако је $V$ подскуп од $\mathbb{C}$, онда је $V^-$ ознака за скуп $\{\bar{z} : z \in V\}$.

**Теорема 7.1** (Шварцов принцип рефлексије)**.** *Нека је $\Omega$ отворен скуп, симетричан у односу на реалну, $x-$осу. Нека је $A = \Omega \cap \mathbb{R}$ и нека је $V$ део скупа $\Omega$ који је у горњој полуравни. Ако је функција $f$ непрекидна на $V \cup A$, аналитичка на $V$ и ако скуп $A$ слика у скуп реалних бројева, онда се $f$ може продужити до функције која је аналитичка на целом $\Omega$, узимајући да је на скуп $V^-$ продужена функцијом $g$, која је дефинисана са $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$, $z \in V^-$.*

***Доказ.*** Приметимо прво да је функција $g$, дефинисана са

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})},$$

аналитичка на скупу $V^-$. Заиста, ако је $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$, $z = x+iy \in V$, онда је функција $g(x,y) = u(x,-y) - iv(x,-y)$, $z = x+iy \in V^-$. Сада се лако добија да и функција $g$ задовољава Коши-Риманове диференцијалне једначине.




Даље, скуп $V^-$ је онај део скупа $\Omega$ који лежи у доњој полуравни. Функција $g$ је непрекидна на $V^- \cup A$, јер је $f$ непрекидна на $V \cup A$.
Чињеница да је $f$ реалнозначна на $A$ имплицира да се $f$ и $g$ поклапају на $A$, те да заједно формирају једну функцију која је непрекидна на $\Omega = V \cup A \cup V^-$. Приметимо, ова функција је и аналитичка, сем можда у тачкама скупа $A$.

Погледајмо шта се дешава у тачкама скупа $A$. Скуп $A$ је отворен скуп у $\mathbb{R}$, па је унија отворених интервала. Нека је $L$ један од тих отворених интервала. Тада је скуп $W = V \cup L \cup V^-$ отворен у $\Omega$ и функција $f$ је непрекидна на $W$ и аналитичка на $W$ сем можда у тачкама са $L$. Међутим, теорема Морере, Теорема 4.35, имплицира да функција, која је непрекидна на $W$ и аналитичка на $W$, сем можда у тачкама једне дужи, мора бити аналитичка на целом $W$. Коначно, како је функција $f$ аналитичка на свим отвореним скуповима $W = V \cup L \cup V^-$, где су $L$ отворени интервали који чине скуп $A$, она је аналитичка и на њиховој унији, а то је баш скуп $\Omega$. Овим је доказ завршен. $\square$

Може да се покаже и општија верзија Шварцовог принципа рефлексије, тако што ће се функција "симетрично" продужити преко криве, уместо преко $x-$осе. За то нам је потребно пресликавање које ће играти улогу коњугације и назваћемо га рефлексија. Нека је $\Omega$ област и $\gamma \subset \Omega$ глатка крива таква да дели област $\Omega \setminus \gamma$ на две повезане компоненте $V$ и $W$. Нека је $\rho$ аналитичка функција на $\Omega$ таква да су $\rho$ и $\bar{\rho}$ аналитичке, где је $\bar{\rho}(z) = \overline{\rho(z)}$, $z \in \Omega$. Тада се функција $\rho$ зове рефлексија у односу на криву $\gamma$ ако је $\rho$ идентичко пресликавање на $\gamma$, пресликава $V$ у $W$, и обрнуто, и важи $\rho \circ \rho(z) = z$ за све $z \in \Omega$.

**Теорема 7.2.** *Нека је $\Omega$ област, $\gamma \subset \Omega$ глатка крива таква да дели $\Omega \setminus \gamma$ на две дисјунктне повезане компоненте $V$ и $W$ и да је функција $\rho$, дефинисана на $\Omega$, рефлексија у односу на криву $\gamma$. Тада се свака функција $f$ која је непрекидна на $V \cup \gamma$, аналитичка на $V$ и реалнозначна на $\gamma$ може аналитички продужити на цело $\Omega$, узимајући да је продужена функцијом $\overline{f(\rho(z))}$, $z \in W$.*

**Пример 7.3.** Одредити рефлексију у односу на јединичну кружницу, а затим применити претходну теорему.

Пресликавање

$$\rho(z) = \frac{1}{\bar{z}}, \quad \text{односно} \quad \rho(re^{i\theta}) = \frac{1}{r}e^{i\theta}$$

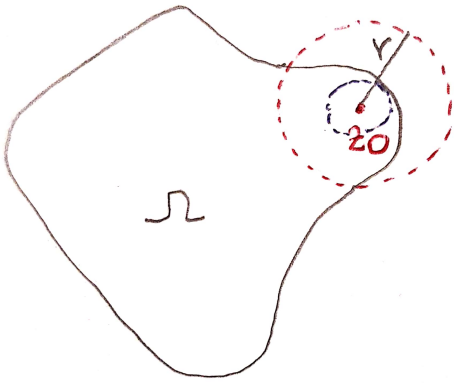
је дефинисано на $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ и обе функције $\rho$ и $\bar{\rho}$ су аналитичке на $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Такође, важи и да је $\rho\circ\rho(z) = z$, а тачке са јединичне кружнице се сликају саме на себе. Дакле, било која област $\Omega$ која сече део, кружни лук, јединичне кружнице $\gamma$ и пресликава се сама у себе пресликавањем $\rho$, је рефлексивна у односу на криву $\gamma$, посредством баш овог пресликавања $\rho$.

За овако изабране $\Omega$ и $\gamma$, претходна теорема тврда да се аналитичка функција $f$, која је дефинисана на делу $V$ области $\Omega$, позиционираној на једној од страна криве $\gamma$, а која је непрекидна на $V \cup \gamma$ и реалнозначна на $\gamma$ може аналитички продужити до функције која је аналитичка на целом $\Omega$. $\square$

## 7.2 Аналитичко продужење дуж криве

Претпоставимо да је $f$ аналитичка функција на области $\Omega$. Један од начина да се функција $f$ продужи на већу област је да се посматра њен развој у Тејлоров степени ред у околини тачке $z_0$ која се налази близу руба области $\Omega$.

Претпоставимо да тај ред конвергира на лопти $B(z_0, r)$. Тада он дефинише аналитичку функцију $g$ на $B(z_0, r)$. Претпоставимо, даље, да је $r$ веће него што је растојање тачке $z_0$ од руба области $\Omega$, тако да $B(z_0, r)$ прелази преко руба области $\Omega$ и претпоставимо да је $\Omega \cap B(z_0, r)$ повезан скуп. Знамо да посматрани ред конвергира ка функцији $f$ на било којој лопти са центром у $z_0$ која је садржана у $\Omega$, па је дакле $f = g$ на овој лопти. Даље, користећи јединственост развоја у Тејлоров ред, Теорема 5.29, ово имплицира да је $f = g$ на целом $\Omega \cap B(z_0, r)$. Дакле, на овај начин бисмо аналитички продужили функцију $f$ на већу област $\Omega \cup B(z_0, r)$ изједначавајући је са $g$ на $B(z_0, r)$.




Ову процедуру је могуће примењивати на функцију $f$ у разним правцима, све док се нешто не нађе на том путу. То би могао бити изоловани сингуларитет функције $f$, где функција расте у бесконачно или то може бити место на ком је функција већ одређена, али је након продужења дефинисано на другачији начин него што је то почетно била. Слично, може да се догоди да након аналитичког продужавања дуж два различита правца, на њиховом евентуалном пресеку добијемо функције дефинисане на различите начине. Оваква ситуација може да постане веома компликована, па чак и нерешива.

У наставку ћемо прецизно дефинисати принцип аналитичког продужења дуж криве и теорему о монодромији. Пре тога ћемо увести неколико појмова, који ће се користити у наставку.

**Дефиниција 7.4.** *Аналитички елемент је уређени пар $(f, B)$, где је $f$ аналитичка функција дефинисана на отвореној лопти $B$. Кажемо да је $(f, B)$ аналитички елемент у тачки $w$ ако је $w \in B$. Два аналитичка елемента $(f_1, B_1)$ и $(f_2, B_2)$ у тачки $w$ су еквивалентна у $w$ ако је $f_1 = f_2$ на $B_1 \cap B_2$.*

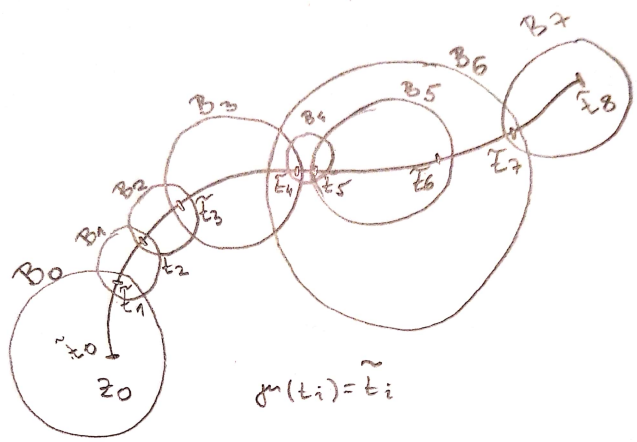
На пример, аналитички елемент $(f, B)$ у $w$ је еквивалентан са сваким аналитичким елементром $(f_1, B_1)$, таквим да је $w \in B_1 \subset B$ и да је $f_1$ рестрикција функције $f$ на $B_1$. Другим речима, за лопту

$B$ аналитичког елемента у тачки $w$ је важно само да садржи тачку $w$, и да је функција $f$ аналитичка на њој.

**Дефиниција 7.5.** *Нека је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ глатка крива и $(f_0, B_0)$ аналитички елемент у тачки $z_0 = \gamma(0)$. Претпоставимо да постоји*

1. *партиција $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = 1$ интервала $[0,1]$ и*
2. *низ аналитичких елемената $(f_1, B_1), (f_2, B_2), \ldots, (f_n, B_n)$ тако да је $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset B_j$ за $j = 0, \ldots, n$ и $f_j = f_{j+1}$ на $B_j \cap B_{j+1}$ за $j = 0, \ldots, n-1$.*

*Тада кажемо да је $(f_n, B_n)$ аналитичко продужење $(f_0, B_0)$ дуж криве $\gamma$.*




Иако делује да аналитички елемент $(f_n, B_n)$, из претходне дефиниције, зависи од избора партиције и низа аналитичких елемената, наредном теоремом ћемо показати да, до на еквивалентност, то није случај.

**Теорема 7.6.** *Нека је дата крива $\gamma$ која почиње у $z_0$ и завршава у $w$ и аналитички елемент $(f_0, B_0)$ у $z_0$. Тада су било која два аналитичка продужења $(f_0, B_0)$ дуж криве $\gamma$ еквивалентни аналитички елементи у тачки $w$.*

***Доказ.*** Приметимо прво, да дато аналитичко продужење елемента $(f_0, B_0)$ дуж криве $\gamma$, које одговара партицији $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = 1$ и низу аналитичких елемената $(f_1, B_1), \ldots, (f_n, B_n)$, може да се модификује тако да одговара произвољној финијој партицији $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_{m+1} = 1$, а тако да се на крају добије исто аналитичко продужење. Наиме, ако је $[t_j, t_{j+1}]$ подељено на $k$ подинтервала у новој партицији, онда можемо једноставно сваком од тих подинтервала доделити исти елемент $(f_j, B_j)$. Овакав поступак, јасно, неће променити крајњи елемент аналитичког продужења.

Нека су дата два аналитичка продужења елемента $(f_0, B_0)$ дуж криве $\gamma$. Како профињење датих партиција не утиче на крајњи исход аналитичког продужења, можемо претпоставити да оба аналитичка продужења користе исту партицију

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m+1} = 1.$$

Претпоставимо да је једно аналитичко продужење дато низом аналитичких елемената

$$(f_1, B_1), \ldots, (f_m, B_m),$$

а друго низом елемената

$$(\tilde{f}_1, \tilde{B}_1), \ldots, (\tilde{f}_m, \tilde{B}_m),$$

где ћемо, из техничких разлога, почетни елемент, $(f_0, B_0)$, означити са $(\tilde{f}_0, \tilde{B}_0) = (f_0, B_0)$. Ако обележимо $V_j = B_j \cap \tilde{B}_j$, $j = 1, \ldots, m$, онда је за свако $j$, скуп $V_j$ повезан отворен скуп који садржи $\gamma(t_j)$ и $\gamma(t_{j+1})$. Остаје још да се покаже да је $f_m = \tilde{f}_m$ на $V_m$. Тачније, доказаћемо индукцијом да је $f_j = \tilde{f}_j$ на $V_j$ за свако $j$.

По претпоставци имамо да је $f_0 = \tilde{f}_0$ на $V_0$. Претпоставимо да је $f_j = \tilde{f}_j$ на $V_j$ за $j < m$. Имамо да је $f_j = f_{j+1}$ на $B_j \cap B_{j+1}$ и да је $\tilde{f}_j = \tilde{f}_{j+1}$ на $\tilde{B}_j \cap \tilde{B}_{j+1}$. Како је $\gamma(t_{j+1})$ у оба ова отворена скупа, добијамо да је $f_{j+1} = \tilde{f}_{j+1}$ у некој околини тачке $\gamma(t_{j+1})$, па и на целом $V_{j+1}$, јер је повезан скуп. Овим је доказ завршен. □

Тврђење следеће теореме је доста очигледно, иако би формално захтевало доказ, али га остављамо читаоцу.

**Теорема 7.7.** *Претпоставимо да је $(f_0, B_0)$ аналитички елемент у тачки $z_0$ и да крива $\gamma$ повезује тачке $z_0$ и $w$. Ако постоји отворен скуп $\Omega$, који садржи $B_0$ и $\gamma$, и функција $f$ која је аналитичка на $\Omega$ такава да је $f = f_0$ на $B_0$, онда се $(f_0, B_0)$ може аналитички продужити дуж $\gamma$.*

Ипак, обрат ове теореме не важи. Могло би да делује да важи, јер је унија низа отворених лопти, које се користе при продужењу, дуж криве $\gamma$ отворен скуп $\Omega$ који садржи криву $\gamma$ и делује да се аналитичке функције $f_j$ уклапају тако да чине једну јединствену аналитичку функцију на $\Omega$, такву да је једнака $f_0$ на $B_0$. Међутим, ово није увек тачно. На пример, ако крива $\gamma$ има самопресечну тачку, која је садржана у две различите лопте $B_j$ и $B_k$, одговарајуће функције $f_j$ и $f_k$ не морају бити еквивалентне као аналитички елементи у тој тачки. Крива може бити затворена, тако да је $z_0 = \gamma(0) = \gamma(1) = w$. На овај начин елемент $(f_0, B_0)$ у $z_0$ можемо продужити до $(f_n, B_n)$, такође у тачки $w = z_0$, тако да ова два елемента нису еквивалентна.

**Пример 7.8.** Погледајмо један пример оваквог продужења.

Нека је $\log$ главна грана логаритамске функције. Посматрајмо аналитички елемент $(\log, B(1,1))$. Нека је $\gamma$ позитивно орјентисана јединична кружница која почиње и завршава у $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$. Тада се $(\log, B(1,1))$ може аналитички продужити дуж криве $\gamma$, али ће се крајњи елемент аналитичке функције, на последњој лопти, разликовати од прве за $2\pi i$.

Не постоји област која садржи јединичну лопту, а унутар које би се могао продужити елемент $(\log, B(1,1))$. Ако би постојала таква област $\Omega$ и аналитичко продужење $f$ елемента $(\log, B(1,1))$ на $\Omega$, онда би се $f$ поклапала са главном граном логаритамске функције $\log$ на $\Omega \setminus (-\infty, 0]$, али логаритамска функција дуж полуправе $(-\infty, 0]$ има скок од $2\pi i$, те не може чак ни непрекидно да се повеже. □

Претходни пример је повезан са следећим питањем: Ако су $\gamma_1$ и $\gamma_2$ две различите криве које спајају $z_0$ и $w$, $(f_0, B_0)$ аналитички елемент у тачки $z_0$ и ако $(f_0, B_0)$ може да се аналитички продужи дуж обе криве $\gamma_1$ и $\gamma_2$, да ли су резултујући елементи еквивалентни у $w$. Одговор је не увек, као што показује следећи пример.

**Пример 7.9.** Да ли аналитичко продужење аналитичког елемента у тачки $z_0$ дуж две различите криве које спајају $z_0$ и $w$ може да буде не-еквивалентно у $w$?

Нека је почетни елемент опет $(\log, B(1,1))$, где је $\log$ главна грана логаритма, $z_0 = 1$ и $w = -1$. Јасно је да се овај елемент може аналитички продужити дуж криве $\gamma_1$ која је горња јединична полукружница и дуж криве $\gamma_2$ која је доња полукружница од 1 до $-1$. Међутим, резултујуће аналитичке функције у $-1 = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ се разликују за $2\pi i$. □

Следећа теорема, Теорема о монодромији, даје одговор под којим условима ће аналитичко продужење дуж две различите криве које спајају $z_0$ и $w$ дати еквивалентне крајње елементе. Пре него што формулишемо теорему, дефинисаћемо појам хомотопних кривих.

**Дефиниција 7.10.** *Нека су $\gamma_0$ и $\gamma_1$ криве у $\Omega$, параметризоване над интервалом $I = [0,1]$, такве да је $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$ и да је $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = w$. Тада кажемо да су криве $\gamma_0$ и $\gamma_1$ хомотопне криве које спајају $z_0$ и $w$, ако постоји непрекидна функција, коју називамо хомотопија,*

$$h : I \times I \to \Omega$$

*таква да је*

$$\begin{aligned} h(0,t) &= \gamma_0(t), \qquad t \in I, \\ h(1,t) &= \gamma_1(t), \qquad t \in I, \\ h(s,0) &= z_0, \qquad s \in I, \\ h(s,1) &= w, \qquad s \in I. \end{aligned}$$

Према горњој дефиницији, хомотопија генерише непрекидну једно-параметарску фамилију кривих $\{\gamma_s\}_{s\in I}$, где је $\gamma_s(t) = h(s,t),\ (s,t) \in I \times I$, које спајају тачке $z_0$ и $w$. Непрекидност функције $h$ на $I \times I$ имплицира

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0) \quad |s - r| < \delta \ \Rightarrow \|\gamma_s - \gamma_r\| = \sup_{t\in I} |\gamma_s(t) - \gamma_r(t)| < \varepsilon.$$

Напоменимо, просто повезана област, Дефиниција 4.20, може да се дефинише и као она област у којој је свака затворена крива хомотопна са тачком (константна крива). У наставку ћемо користити следећу чињеницу, која може да се докаже: Област је просто повезана ако и само ако су сваке две криве које спајају две тачке унутар те области хомотопне (видети [13, поглавље 4.5]).

**Теорема 7.11** (Теореме о монодромији)**.** *Нека је $\Omega$ област у $\mathbb{C}$, тачке $z_0$ и $w$ из $\Omega$ и $(f_0, B_0)$ аналитички елемент у $z_0$, где је $B_0 \subset \Omega$. Претпоставимо*

1. *да $(f_0, B_0)$ можемо аналитички продужити дуж сваке криве у $\Omega$, и*
2. *да су $\gamma_0$ и $\gamma_1$ хомотопне криве у $\Omega$ које спајају $z_0$ и $w$.*

*Тада су аналитичка продужења функције $f_0$ дуж $\gamma_0$ и $\gamma_1$ еквивалентни елементи у $w$.*

***Доказ.*** Хомотопија од $\gamma_0$ до $\gamma_1$ у $\Omega$ генерише непрекидну једно-параметарску фамилију кривих $\{\gamma_s\}_{s\in[0,1]}$ које спајају $z_0$ и $w$ и налазе се унутар $\Omega$. Непрекидност ове фамилије имплицира да, за дато $\varepsilon > 0$, постоји $\delta > 0$ тако да

$$|s - r| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \|\gamma_s - \gamma_r\| < \varepsilon.$$

Аналитички елемент $(f_0, B_0)$ има аналитичко продужење дуж сваке од кривих $\gamma_s,\ s \in [0,1]$, по претпоставци. Означимо са $\phi_s$ крајњи аналитички елемент, који настаје аналитичким продужењем дуж криве $\gamma_s,\ s \in [0,1]$. Тврдимо да, за свако $r \in [0,1]$, постоји $\delta > 0$ тако да је $\phi_s$ еквивалентно са $\phi_r$ за све $s$ такве да $|s - r| < \delta$.

Нека је $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = 1$ партиција и нека је $(f_1, B_1), \ldots, (f_n, B_n)$ низ аналитичких елемената који дефинишу аналитичко продужење $\phi_r = (f_n, B_n)$ дуж криве $\gamma_r$. Тада је

$$\gamma_r([t_j, t_{j+1}]) \subset B_j, \qquad j = 0, \ldots, n.$$

За свако $j = 0, \ldots, n$, нека је $\varepsilon_j$ растојање од компактног скупа $\gamma_r([t_j, t_{j+1}])$ до руба лопте $B_j$. Ако је $\|\gamma_s - \gamma_r\| < \varepsilon_j$, онда ће и $\gamma_s([t_j, t_{j+1}]) \subset B_j$. Дакле, ако узмемо да је $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n\}$, и да је $\delta > 0$ такво да

$$|s - r| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \|\gamma_s - \gamma_r\| < \varepsilon.$$

Тада за свако $s \in [0, 1]$ такво да $|s - r| < \delta$, партиција $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = 1$ и низ аналитичких елемената $(f_1, B_1), \ldots, (f_n, B_n)$ дефинишу и аналитичко продужење елемента $(f_0, B_0)$ дуж криве $\gamma_s$, те је оно $(f_n, B_n) = \phi_r$. Како је, на основу претходне теореме, свако друго продужење елемента $(f_0, B_0)$ дуж $\gamma_s$, па и $\phi_s$, еквивалнетно са овим, закључујемо да су $\phi_r$ и $\phi_s$ еквивалентни. Овим је доказано да су $\phi_r$ и $\phi_s$ еквивалентни кад год је $|r - s| < \delta$.

Доказ се завршава употребом повезаности области $\Omega$. Дефинишимо функцију $\chi$ на $[0, 1]$ тако да је $\chi(s) = 0$, ако је $\phi_s$ еквивалентно са $\phi_0$, а $\chi(s) = 1$, иначе. Тада је на основу претходног параграфа, функција $\chi$ непрекидна на $[0, 1]$. Ако је $\chi(1) = 1$, онда с обзирно да је $\chi(0) = 0$, на основу Теореме средње вредности, функција $\chi$ мора узимати све вредности између 0 и 1. Како то није случај, закључујемо да је $\chi(1) = 0$, односно $\phi_0$ и $\phi_1$ су еквивалентни. □

**Пример 7.12.** Посматрајмо елемент функције $\phi$ који чине главна грана логаритамске функције и лопта $B(1, 1)$. Нека је

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0, -\pi/2 < \arg z < 3\pi/2\}.$$

Покажимо да аналитичка продужења дуж две произвољне криве које спајају 1 и $-1$ у $A$ имају еквивалентне крање аналитичке елементе у $-1$.

Грана логаритамске функције, која је дефинисана тако да је $\arg z$ у интервалу $(-\pi/2, 3\pi/2)$, се поклапа са главном граном логаритамске функције (засек на негативном делу реалне осе) на лопти $B(1, 1)$. Тада се, на основу Теореме 7.7, аналитички елемент $\phi$ може аналитички продужити дуж било које криве у $A$. Скуп $A$ је просто повезан, па су све криве које спајају 1 и $-1$ унутар $A$ хомотопне. На основу Теореме о монодромији, аналитичка продужење од $\phi$ дуж било које две криве у $A$ су еквивалненти аналитички елементи у крајњој тачки $-1$. □

Теорема о монодромији нам омогућава да докажемо да се аналитички елемент може аналитички продужити дуж сваке криве која лежи у области $\Omega$, а додатно, ако је та област $\Omega$ и просто повезана, онда постоји аналитичко продужење функције $f_0$ на цео скуп $\Omega$.

**Теорема 7.13.** *Претпоставимо да је $\Omega$ просто повезана област и да је $(f_0, B_0)$ аналитички елемент у $z_0 \in \Omega$, где је $B_0 \subset \Omega$. Ако се $(f_0, B_0)$ може аналитички продужити дуж сваке криве у $\Omega$, онда постоји функција $f$ која је аналитичка на целом $\Omega$ и једнаке је $f_0$ на $B_0$.*

***Доказ.*** Нека је $z \in \Omega$. С обзиром да су свака два пута од $z_0$ до $z$ у $\Omega$ хомотопна, тада су, на основу Теореме о монодромији, свака два аналитичка продужења дуж ових кривих еквивалентни елементи у $z$, те ће одређивати исту аналитичку функцију у некој околини тачке $z$. На аналоган начин можемо дати аналитички елемент $(f_0, B_0)$ продужити до свих тачака $z \in \Omega$. Дефинисаћемо да је $f(z)$, $z \in \Omega$ баш та вредност, која се добије овим поступком аналитичког продужења.

Јасно $f_0(z) = f(z)$ за $z \in B_0$. Остаје да покажемо да је функција $f$ аналитичка на целом $\Omega$. Нека је $w$ тачка у $\Omega$, нека крива $\gamma$ у $\Omega$ спаја тачке $z_0$ и $w$ и нека је $(f_n, B_n)$ крајњи елемент аналитичког продужења $(f_0, B_0)$ дуж криве $\gamma$. Ако је $z \in B_n$, онда је $(f_n, B_n)$ аналитичко продужење елемента $(f_0, B_0)$ и дуж криве $\gamma_1$ која спаја $z_0$ и $z$ унутар $\Omega$ (једноставно узмемо да се крива $\gamma_1$ састоји од криве $\gamma$ и дужи која спаја $w$ и $z$). Одавде је $f(z) = f_n(z)$ за све $z \in B_n$, а не само за $z = w$. Како је $f_n$ аналитичка функција на $B_n$, закључујемо да је и функција $f$ аналитичка на $B_n$. Тачка $w \in \Omega$ је била произвољна, па је функција $f$ аналитичка на целом $\Omega$. □

# Литература


[1] L. V. Ahlfors, *Complex analysis.* Third edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1979.

[2] D. Đorđević, *Kompleksna analiza* (skripta)

[3] E. Freitag, R. Busam, *Complex Analysis*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[4] H. Kraljević, S. Kurepa, *Matematička analiza funkcija kompleksne varijable, 4/I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.

[5] M. Mateljević, *Kompleksne funkcije 1 & 2*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2006.

[6] D. S. Mitrinović, J. D. Kečkić, *Kompleksna analiza, zbornik zadataka i problema*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.

[7] D. Nikolić-Despotović, M. Budinčević, *Zbirka rešenih zadataka iz Kompleksne analize*, Univerzitet u Novom Sau, PMF, Novi Sad, 1998.

[8] D. Perišić, *Predavanja iz kompleksne analize* (skripta)

[9] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.

[10] E. B. Saff, A. D. Snider, *Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering, Science, and Mathematics*. 3rd ed, Upper Saddle River: Pearson Education, 2003.

[11] B. Stanković, *Teorija funkcija kompleksne promenljive*, Naučna knjiga, Beograd, 1972.

[12] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex analysis*, Princeton Lectures in Analysis 2, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[13] J. Taylor, *Complex variables*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2011.