Аналитичка геометрија

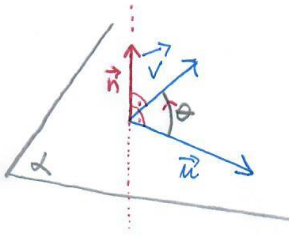
Предавање 9

Векторски и мешовити производ вектора

Нови Сад, 2022.

Векторски производ вектора – дефиниција

је операција која пару вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ додељује вектор, $\vec{u} \times \vec{v}$



Нека важи:

- $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су два неколинеарна не-нула вектора у простору, која одређују раван α
- $\theta \in [0, \pi]$ је неусмерени угао између $\vec{u}$ и $\vec{v}$
- $\vec{n}$ је јединични вектор, $|\vec{n}| = 1$, нормалан на раван α у смеру одређеном "*правилом десне руке*," - тј. у смеру палца десне шаке ако прсти прате смер угла θ од вектора $\vec{u}$ ка вектору $\vec{v}$

Дефиниција

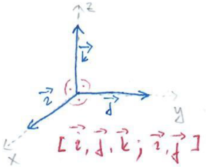
Векторски производ вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ је вектор

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = (|\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta)\, \vec{n}}$$

Напомена: Приметимо да је смер угла θ код векторског производа вектора важан, али се крије у смеру вектора нормале $\vec{n}$. Такође, смер вектора $\vec{u} \times \vec{v}$ је исти као и смер вектора нормале $\vec{n}$, јер је $|\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta \geq 0$ за $\theta \in [0, \pi]$.

Векторски производ вектора – особине

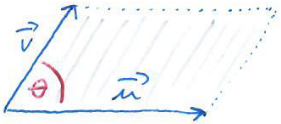
- Важи: $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \quad \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$
  (јер је вектор $\vec{u} \times \vec{v}$ нормалан на раван α, па и на сваки вектор равни α)
- Ако је $\vec{u} \parallel \vec{v}$, онда је $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, те је $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$; па важи $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
- Ако је $\vec{u} = \vec{0}$ или $\vec{v} = \vec{0}$, онда је $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$
  Коначно, ако су $\vec{u}$ и $\vec{v}$ не-нула вектори, онда: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$.
- Важи $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$, јер се једино смер вектора $\vec{n}$ промени



Важи:

- $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = -(\vec{\jmath} \times \vec{\imath}) = \vec{k}$
- $\vec{\jmath} \times \vec{k} = -(\vec{k} \times \vec{\jmath}) = \vec{\imath}$
- $\vec{k} \times \vec{\imath} = -(\vec{\imath} \times \vec{k}) = \vec{\jmath}$

- Важи:



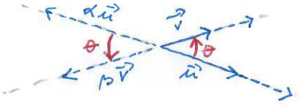
$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(|\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta)\, \vec{n}| = ||\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta|\, |\vec{n}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta$$

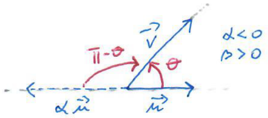
површина паралелограма одређеног векторима $\vec{u}$ и $\vec{v}$

Векторски производ вектора – особине

- Векторски производ вектора **није** асоцијативан: ... јер $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$ припада равни $r(\vec{u},\vec{v})$, док $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ припада равни $r(\vec{v},\vec{w})$, ... или, за $\vec{u}=\vec{\imath}$, $\vec{v}=\vec{\jmath}$ и $\vec{w}=\vec{\jmath}$ видимо да: $-\vec{\imath}=(\vec{\imath}\times\vec{\jmath})\times\vec{\jmath}\neq\vec{\imath}\times(\vec{\jmath}\times\vec{\jmath})=\vec{0}$
- Компатибилан је са множењем скаларом: $(\alpha\vec{u})\times(\beta\vec{v})=(\alpha\beta)(\vec{u}\times\vec{v})$
- Векторски производ вектора **јесте** дистрибутиван, у смислу:
  $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$
  $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}=\vec{u}\times\vec{w}+\vec{v}\times\vec{w}$

Покажимо да је $(\alpha\vec{u})\times(\beta\vec{v})=(\alpha\beta)(\vec{u}\times\vec{v})$.
Важи $(\alpha\vec{u})\times(\beta\vec{v})=(|\alpha\vec{u}||\beta\vec{v}|\sin\theta')\,\vec{n}'=(|\alpha||\beta||\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta')\,\vec{n}'$, где је θ' угао између $\alpha\vec{u}$ и $\beta\vec{v}$, а $\vec{n}'$ одговарајућа нормала за $\alpha\vec{u}$ и $\beta\vec{v}$





- ако је $\alpha\beta>0$, онда је $\theta'=\theta$ и $\vec{n}'=\vec{n}$, па је $(\alpha\vec{u})\times(\beta\vec{v})=(\alpha\beta)\,(|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta)\,\vec{n}=(\alpha\beta)\vec{u}\times\vec{v}$
- ако је $\alpha\beta<0$, онда је $\theta'=\pi-\theta$ (те је $\sin\theta'=\sin\theta$) и $\vec{n}'=-\vec{n}$, па је $(\alpha\vec{u})\times(\beta\vec{v})=(-\alpha\beta)\,(|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta)\,(-\vec{n})=(\alpha\beta)(\vec{u}\times\vec{v})$

Векторски производ вектора – израчунавање

Користећи дистрибутивност векторског производа у односу на множење скаларом и сабирање, затим користећи да је $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ и векторске производе базних вектора, добијамо да је за $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= (u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}) \times (v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}) \\
&= u_1 v_1\, \vec{\imath} \times \vec{\imath} + u_1 v_2\, \vec{\imath} \times \vec{\jmath} + u_1 v_3\, \vec{\imath} \times \vec{k} \\
&+ u_2 v_1\, \vec{\jmath} \times \vec{\imath} + u_2 v_2\, \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} + u_2 v_3\, \vec{\jmath} \times \vec{k} \\
&+ u_3 v_1\, \vec{k} \times \vec{\imath} + u_3 v_2\, \vec{k} \times \vec{\jmath} + u_3 v_3\, \vec{k} \times \vec{k}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\, \vec{\imath} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\, \vec{\jmath} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\, \vec{k}}$$

Односно,

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}$$

Векторски производ вектора – примери

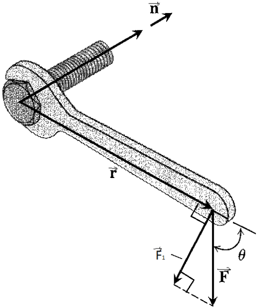
Пример 9.1 Одредити векторске производе $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{b} \times \vec{a}$ вектора $\vec{a} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ и $\vec{b} = -4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}$.

Пример 9.2 Одредити вектор нормалан на раван одређену тачкама $P(1,-1,0)$, $Q(2,1,-1)$ и $R(-1,1,2)$.

Пример 9.3 Одредити површину троугла са теменима у тачкама $P(1,-1,0)$, $Q(2,1,-1)$ и $R(-1,1,2)$.

Пример 9.4 Одредити јединични вектор нормале на раван одређену тачкама $P(1,-1,0)$, $Q(2,1,-1)$ и $R(-1,1,2)$.

Момент силе или обртни момент, $\overrightarrow{M}$

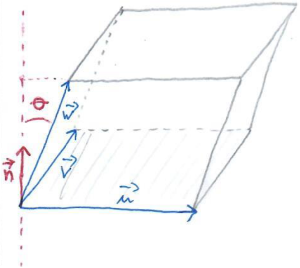


- Интензитет (јачина) момента силе зависи од удаљености, $|\vec{r}|$, завртња од места на француском кључу где примењујемо силу $\vec{F}$, и интензитета оне компоненте силе $\vec{F}$ која је нормална на $\vec{r}$, $\left|\vec{F}_1\right|$;
- Дакле, интензитет момента силе је $M = |\vec{r}|\left|\vec{F}_1\right| = |\vec{r}|\left|\vec{F}\right|\sin\theta = \left|\vec{r}\times\vec{F}\right|$

- Ако је $\vec{n}$ јединични вектор са усмерењем кретања завртња при примени силе $\vec{F}$, онда је момент силе $\overrightarrow{M} = M\,\vec{n} = \left(|\vec{r}|\left|\vec{F}\right|\sin\theta\right)\vec{n} = \vec{r}\times\vec{F}$

Мешовити производ вектора - дефиниција

је комбинација скаларног и векторског производа вектора, $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$, те се на крају као резултат добија скалар



Посматрајмо паралелепипед одређен векторима $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$. Нека је θ угао између вектора $\vec{u} \times \vec{v}$ и $\vec{w}$. Површина основе је $|\vec{u} \times \vec{v}|$, а висина је $\big||\vec{w}|\cos\theta\big|$.
Дакле, запремина посматраног паралелепипеда је
$V = \big||\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}|\cos\theta\big| = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$

Напомена:

- Мешовити производ вектора је $\underbrace{(\vec{u} \times \vec{v})}_{\text{вектор}} \cdot \underbrace{\vec{w}}_{\text{вектор}} \in \mathbb{R}$ број (скалар)
- Нека вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ одређују раван α. Тада је $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \geq 0$, ако се вектор $\vec{w}$ налази у истом полупростору, у односу на раван α, као и вектор $\vec{u} \times \vec{v}$; односно, $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \leq 0$, ако су $\vec{w}$ и $\vec{u} \times \vec{v}$ у разним полупросторима

Мешовити производ вектора - израчунавање

Нека су дати вектори $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Тада је

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot (w_1, w_2, w_3)$$

$$\boxed{(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) w_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) w_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) w_3}$$

или, развијањем детерминанте по трећој врсти добијамо да је

$$\boxed{(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}}$$

Мешовити производ вектора - особине

- Директном провером се показује: $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v}$; то се види и из чињенице да су одговарајуће детерминанте за ове идентитете једнаке.
- Користећи додатно и комутативност скаларног производа добијамо да је: $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.

Напомена:

- Дакле, ког мешовитог производа није важан распоред операција множења, важно је само да се сачува циклични распоред вектора $\vec{u}, \vec{v}$ и $\vec{w}$. Због тога се понекад користи и ознака $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$
- Ако дође до пермутације неких вектора онда ће се производ разликовати само до на знак, нпр. $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = -(\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w}$

Пример 9.5 Одредити мешовити производ вектора $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (-2, 0, 3)$ и $\vec{c} = 7\vec{\jmath} - 4\vec{k}$; као и запремину одговарајућег паралелепипеда. Да ли се вектор $\vec{c}$ налази у истом полупростору, у односу на раван $r(\vec{a}, \vec{b})$, као и вектор $\vec{a} \times \vec{b}$?