Аналитичка геометрија

Предавање 11

Цилиндри и квадратне површи

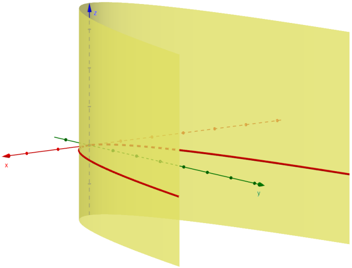
Нови Сад, 2022.

Цилиндар – дефиниција

Цилиндар је површ у простору сачињена од правих које:

- су паралелне датој прави p у простору
- пролазе кроз дату криву у равни (која је нормална на праву p)

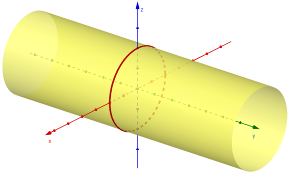
Пример 11.1 Одредити једначину цилиндра генерисаног кривом $y = x^2$ у $xy-$равни и правама паралелним $z-$оси.



- За произвољну тачку $P(x, y, z)$ са датог цилиндра координата z може да буде било која вредност, док x и y морају да задовољавају једначину $y = x^2$;
- дакле, тачке са цилиндра су облика $P(x, x^2, z),\ x, z \in \mathbb{R}$;
- одговарајућа једначина цилиндра је облика $y = x^2$, ако ништа додатно не пише претпоставља се да је $x \in \mathbb{R}$; такође променљиву z не пишемо јер за њу нема никаквих ограничења и подразумевамо $z \in \mathbb{R}$.

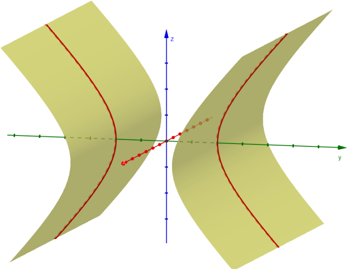
Цилиндар – примери

Пример 11.2 Одредити једначину кружног цилиндра генерисаног кружницом $x^2 + z^2 = 1$.



- Тачке са цилиндра су облика $P(x, y, \pm\sqrt{1 - x^2}),\ x \in [-1, 1],\ y \in \mathbb{R}$;
- одговарајућа једначина кружног цилиндра је $x^2 + z^2 = 1$; и то је цилиндар дуж $y-$осе.

Пример 11.3 Одредити једначину цилиндра генерисаног хиперболом $y^2 - z^2 = 1$.



- Тачке са цилиндра су облика $P(x, y, \pm\sqrt{y^2 - 1}),\ |y| \geq 1,\ x \in \mathbb{R}$;
- одговарајућа једначина цилиндра је $y^2 - z^2 = 1$; и то је цилиндар дуж $x-$осе.

GeoGebra 3D

Квадратне површи у простору – дефиниција

У најопштијем облику **квадратна површ у простору** је скуп решења квадратне једначине са три непознате, дате са

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0,$$

где коефицијенти A, B, C, D, E и F нису истовремено једнаки нули.

Међутим, видели смо да мешовити чланови $Dxy + Eyz + Fxz$ настају од ротације, а линеарни $Gx + Hy + Jz$ од транслације; те ћемо ми, углавном, посматрати само оне квадратне површи облика

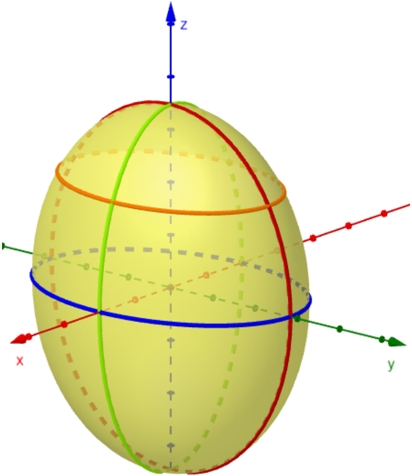
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + K = 0,$$

где коефицијенти A, B и C нису истовремено једнаки нули.

Пресеци површи са равнима паралелним са координатним равнима се називају **линије нивоа или трагови**.

Квадратне површи у простору – примери

Пример 11.4 Нацртати **елипсоид** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0.$

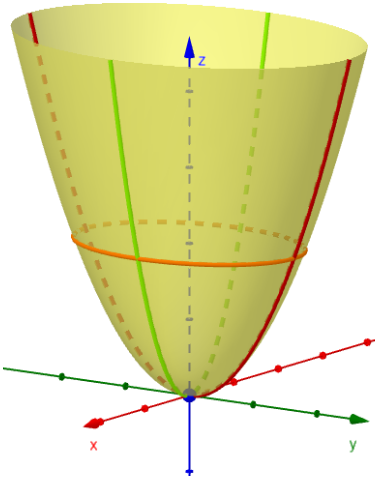


Линије нивоа добијамо у пресеку са равнима:

- $z = 0$ (тј. пресек са $xy-$равни): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **елипса**;
- $y = 0$ (пресек са $xz-$равни) је $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ **елипса**;
- $x = 0$ (пресек са $yz-$равни) је $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ **елипса**;
- $z = z_0$, за $|z_0| < c$: $$\frac{x^2}{a^2(1 - \frac{z_0^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1 - \frac{z_0^2}{c^2})} = 1$$ **елипса**.

Квадратне површи у простору – примери

Пример 11.5 Нацртати **елиптични параболоид** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$, $\quad a, b, c > 0.$

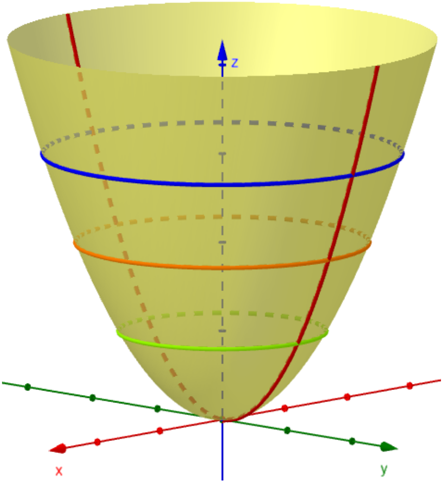


Линије нивоа добијамо у пресеку са равнима:

- $z = 0$ $(xy-$раван$)$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$; односно **тачка** $(0, 0, 0)$;
- $y = 0$ $(xz-$раван$)$: $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{z}{c}$ **парабола**;
- $x = 0$ $(yz-$раван$)$: $\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$ **парабола**;
- $z = z_0,\ z_0 \geq 0$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z_0}{c}$ **елипса**;

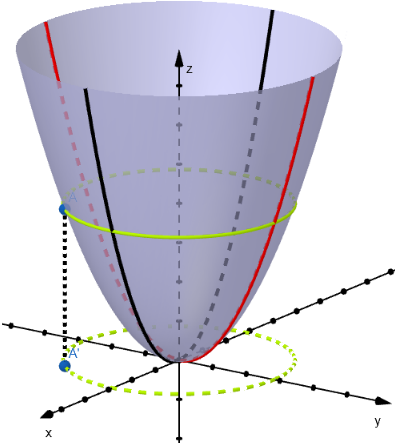
Квадратне површи у простору – примери

Пример 11.6 Нацртати **кружни параболоид** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{z}{c}$ $(a = b)$, $\quad a, c > 0.$



- у $yz-$равни то је парабола $\dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{z}{c}$, која је ротирана око $z-$осе;
- дакле, **линије нивоа** паралелне са $xy-$равни су **кружнице**.
- Приметимо, једначина кружног параболоида се добија тако што се у једначину параболе $\dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{z}{c}$, која се ротира око $z-$осе, замени $y \to \pm\sqrt{x^2 + y^2}$; и добија $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} = \dfrac{z}{c}$

Квадратне површи у простору – обртне површи



Нека је у yz−равни дата крива $z = f(y)$
заротирајмо ту криву око z−осе
свака тачка A са кружнице $x^2 + y^2 = t^2$ ће се сликати у $z = f(t)$,
односно, важи ће $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$;
исто би важило и да смо кренули од криве у xz−равни $z = f(x)$.
Дакле, једначина површи која настаје ротацијом криве $z = f(y)$ око z−осе, добија се тако што се у једначину криве замени

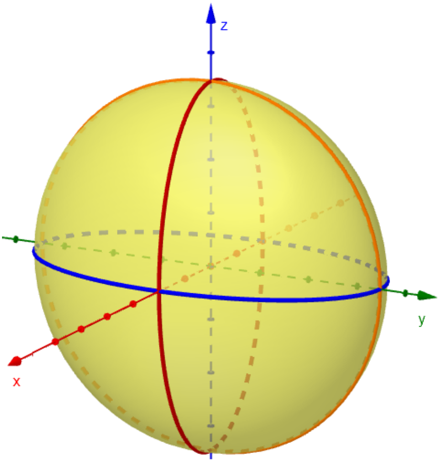
$$y \mapsto \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

те једначина обртне површи постаје

$$z = f(y) \mapsto z = f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

Квадратне површи у простору – примери

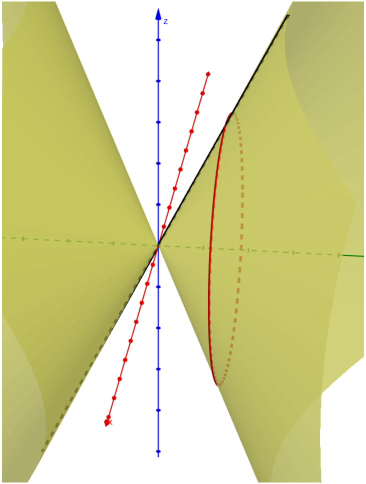
Пример 11.7 Одредити једначину **кружног елипсоида** који у $xz-$равни пролази кроз елипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,\ a, c > 0$ и ротиран је око $x-$осе.



- У једначину $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ заменимо $z \to \pm\sqrt{y^2 + z^2}$
- и добијамо једначину кружног елипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{c^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$
- Приметимо, исти поступак смо могли спровести и да смо кренули од елипсе у $xy-$равни, наиме $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{c^2} = 1$, и затим заменити $y \to \pm\sqrt{y^2 + z^2}$.

Квадратне површи у простору – примери

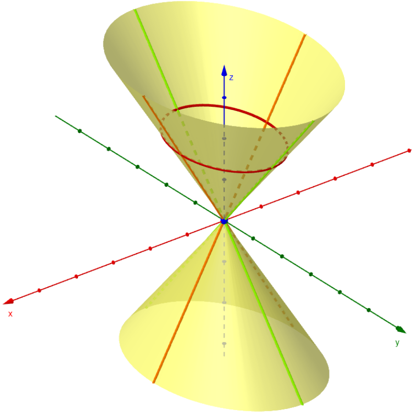
Пример 11.8 Одредити једначину **конуса** који настаје ротацијом праве $z = 2y$ око $y-$осе.



- Дакле, заменимо $z \to \pm\sqrt{x^2 + z^2}$
- и добијамо одговарајућу једначину конуса $\pm\sqrt{x^2 + z^2} = 2y$ или $x^2 + z^2 = 4y^2$

Квадратне површи у простору – примери

Пример 11.9 Нацртати **елиптични конус** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}, \quad a, b, c > 0.$



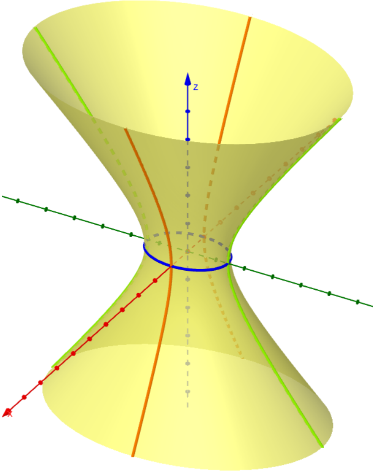
Линије нивоа су:

- за $x = 0$ то су **праве** $y = \pm \dfrac{b}{c} z$
- за $y = 0$ то су **праве** $x = \pm \dfrac{a}{c} z$
- за $z = 0$ то је **тачка** $(x, y) = (0, 0)$
- за $z = z_0$ то је **елипса**
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2}$$

Квадратне површи у простору – примери

Пример 11.10 Нацртати **једнограни (једноделни) хиперболоид**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0.$$



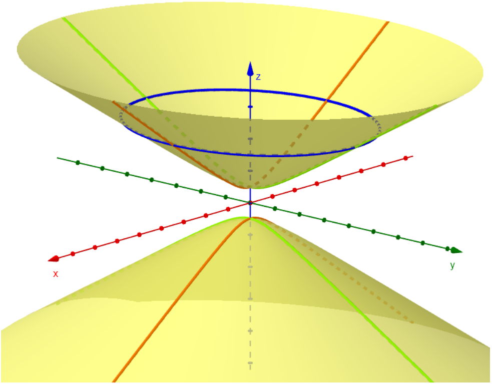
Линије нивоа су:

- за $x = 0$ је **хипербола** $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- за $y = 0$ је **хипербола** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- за $z = 0$ је **елипса** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

Квадратне површи у простору – примери

Пример 11.11 Нацртати **двограни (дводелни) хиперболоид**

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b, c > 0.$$

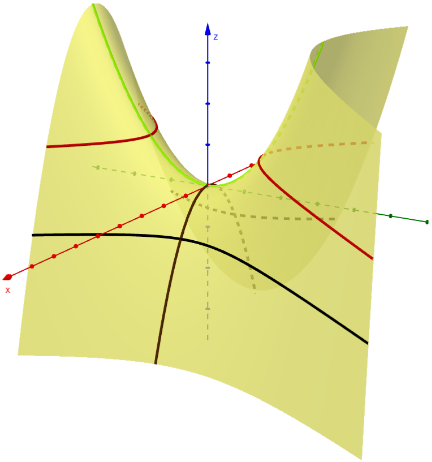


Линије нивоа су:

- за $x = 0$ је **хипербола** $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
- за $y = 0$ је **хипербола** $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$
- за $z = 0$ је **празан скуп** јер $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$
- за $z = z_0 > c$ $(z_0 < -c)$ је **елипса** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z_0^2}{c^2} - 1$

Квадратне површи у простору – примери

Пример 11.12 Нацртати **хиперболични параболоид (седло)**
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}, \quad a, b, c > 0.$$



Линије нивоа су:

- за $x = 0$ је **парабола** $\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$
- за $y = 0$ је **парабола** $-\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{z}{c}$
- за $z = 0$ су **праве** $\dfrac{x}{a} = \pm\dfrac{y}{b}$
- за $z = z_0$ **хиперболе** $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{z_0}{c}$ и то око $y-$осе за $z_0 > 0$; и око $x-$осе за $z_0 < 0$