Аналитичка геометрија

Предавање 10

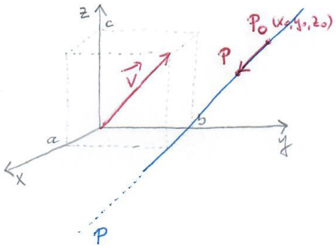
Једначина праве и једначина равни у простору

Нови Сад, 2022.

Једначине праве у простору

Посматрајмо праву p у простору која је паралелна вектору $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ и пролази кроз тачку $P_0(x_0, y_0, z_0)$

Тада за произвољну тачку $P(x, y, z)$ са праве p важи:



- да су вектори $\overrightarrow{P_0P}$ и $\vec{v}$ колинеарни, тј. $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, односно $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a, b, c)$, $t \in \mathbb{R}$, другим речима,

$$x = x_0 + at, \; y = y_0 + bt, \; z = z_0 + ct, \quad t \in \mathbb{R}$$

стандардна параметарска форма једначине праве у простору

- $$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (= t, \; t \in \mathbb{R})$$

канонична форма једначине праве у простору

Једначине праве у простору – напомене и примери

Напомене:

- Из обе форме једначине праве лако се издваја једна тачка која припада правој $P_0(x_0, y_0, z_0)$, као и **вектор правца праве** $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$.
- Приметимо да је канонична форма једначине праве у простору састављена од две једнакости, односно права у простору је дефинисана системом две линеарне једначине.
- Праву у простору можемо представити и векторском једначином $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = t\vec{v}$, односно $\vec{r} = \vec{r}_{P_0} + t\vec{v},\ t \in \mathbb{R}$, где је $\vec{r}$ вектор положаја произвољне тачке $P \in p$.

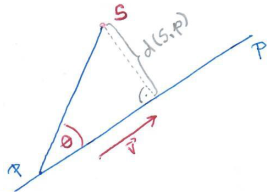
Пример 10.1 Одредити једначину праве у простору која пролази кроз тачку $P_0(-2, 0, 4)$ и паралелна је вектору $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

Пример 10.2 Одредити једначину праве у простору која пролази кроз тачке $P(-3, 2, -3)$ и $Q(1, -1, 4)$.

Пример 10.3 Одредити параметризацију дужи PQ, где је $P(-3, 2, -3)$ и $Q(1, -1, 4)$.

Пример 10.4 Одредити једначину праве у равни која пролази кроз тачку $P_0(x_0, y_0)$ и паралелна је вектору $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$

Растојање тачке од праве и пројекција

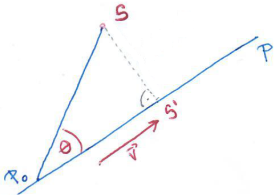


Растојање тачке S од праве p, у ознаци $d(S,p)$, дато је са

$$d(S,p) = |\overrightarrow{PS}|\sin\theta = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}|}|\overrightarrow{PS}|\sin\theta = \frac{|\vec{v}\times\overrightarrow{PS}|}{|\vec{v}|},$$

где је $P \in p$ произвољно изабрана тачка.

Пример 10.5 Одредити растојање тачке $S(1,1,5)$ од праве p дате једначинама у параметарској форми са $p:\ x = 1+t,\ y = 3-t,\ z = 2t,\ t \in \mathbb{R}$.



Пројекција тачке S на праву p, која је одређена тачком P_0 и вектором правца $\vec{v}$, $\mathrm{proj}_p S = S'$, из $\overrightarrow{P_0S'} = \mathrm{proj}_{\vec{v}}\,\overrightarrow{P_0S}$, односно $\overrightarrow{P_0S'} = \frac{\overrightarrow{P_0S}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}$, је

$$\vec{r}_{S'} = \vec{r}_{P_0} + \frac{(\vec{r}_S - \vec{r}_{P_0})\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}$$

Пример 10.6 Одредити темена A и B једнакостраничног троугла ABO, где тачке A и B припадају правој $\vec{r} = \vec{r}_{P_0} + t\vec{v}$ и $O(0,0,0) \notin p$.

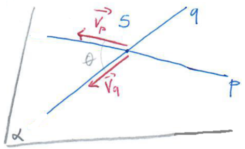
Однос правих у простору

Праве у простору могу да:

- су паралелне (специјално, да се поклапају) – ако су вектори праваца правих колинеарни
- се секу (ово, између осталог, значи да припадају истој равни)
- су мимоилазне (иначе)

Пример 10.7 Одредити међусобни однос следећих парова правих:

1. $p: \frac{x-5}{4} = \frac{2y+2}{6} = \frac{z+2}{-2}$ и $q: \frac{x+5}{-8} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+9}{4}$
2. $p: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{2z+1}{-3}$ и $q: \frac{x+5}{1} = \frac{y}{6} = \frac{z+1}{7}$
3. $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ и $q: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}$

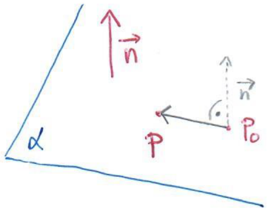


Праве p и q у простору, које се секу, одређују раван. Тада у тачки пресека можемо израчунати под којим углом се секу:

$$\measuredangle(p, q) = \measuredangle(\vec{v}_p, \vec{v}_q) = \arccos \frac{\vec{v}_p \cdot \vec{v}_q}{|\vec{v}_p||\vec{v}_q|}$$

Пример 10.8 Одредити угао под којим се секу праве p и q из Примера 10.7 под 3.

Једначине равни у простору



Посматрајмо раван α у простору која пролази кроз тачку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и нормална је на вектор $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$

Тада за произвољну тачку $P(x, y, z)$ из равни α важи:

- $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$, односно $\boxed{\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0}$

векторска једначина равни у простору

- Расписујући векторску једначину равни добијамо да је $\left((x - x_0)\vec{\imath} + (y - y_0)\vec{\jmath} + (z - z_0)\vec{k}\right) \cdot (a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}) = 0$, односно $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, тј.

  $\boxed{ax + by + cz = d}$ где је $d = ax_0 + by_0 + cz_0$

  координатна једначина равни у простору

Једначине равни у простору – напомене и примери

Напомена:

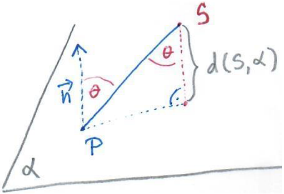
- Приметимо да је из координатне једначине равни у простору, $ax + by + cz = d$, увек једноставно уочити **вектор нормале равани** $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$.
- Векторску једначину равни можемо записати и у форми $(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) \cdot \vec{n} = 0$, односно $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_{P_0} \cdot \vec{n}$, где је $\vec{r}$ вектор положја произвољне тачке $P \in \alpha$.

Пример 10.9 Одредити једначину равни у простору која пролази кроз тачку $P_0(-3, 0, 7)$ и нормална је вектор $\vec{n} = 5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$.

Пример 10.10 Одредити једначину равни у простору која пролази кроз тачке $P(0, 0, 1),\ Q(2, 0, 0)$ и $R(0, 3, 0)$.

Пример 10.11 Одредити пресек равни $\alpha :\ 3x + 2y + 6z = 6$ и праве $p :\ x = \frac{8}{3} + 2t,\ y = -2t,\ z = 1 + t,\ t \in \mathbb{R}$.

Растојање тачке од равни и пројекција

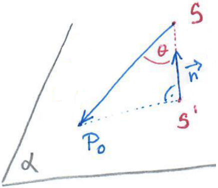


Растојање тачке S од равни α, у ознаци $d(S,\alpha)$, је дато са

$$d(S,\alpha) = |\overrightarrow{PS}|\cos\theta = \frac{|\vec{n}|}{|\vec{n}|}|\overrightarrow{PS}|\cos\theta = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PS}|}{|\vec{n}|},$$

где је $P \in \alpha$ произвољно изабрана тачка.

Пример 10.12 Одредити растојање тачке $S(1,1,3)$ од равни α дате координатном једначином $\alpha:\ 3x + 2y + 6z = 6$.



Пројекција тачке S на раван α, која је одређена тачком P_0 и вектором нормале $\vec{n}$, $\mathrm{proj}_\alpha S = S'$, из $\overrightarrow{SS'} = \mathrm{proj}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{SP_0}$, односно $\overrightarrow{SS'} = \frac{\overrightarrow{SP_0}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\,\vec{n}$, је

$$\vec{r}_{S'} = \vec{r}_S + \frac{(\vec{r}_{P_0} - \vec{r}_S)\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n}$$

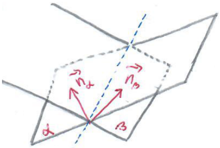
Пример 10.13 Нека је дата раван α, одређена тачком A и јединичним вектором нормале $\vec{n}$, и у њој квадрат $ABCD$. У функцији од $\vec{r}_A$ и $\vec{n}$ одредити $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ и $\vec{r}_D$, ако је тачка C тачка равни α најближа координатном почетку.

Однос равни у простору

Равни у простору могу да:

- су паралелне (специјално, да се поклапају) – колинеарни вектори нормале или
- се секу.

Пример 10.14 Одредити у ком су међусобном односу равни дате једначинама $\alpha:\ 3x + y - z + 12 = 0$ и $\beta:\ -6x - 2y + 2z = 1$.



Угао између равни α и β у простору је, заправо, угао између одговарајућих нормала:

$$\measuredangle(\alpha,\beta) = \measuredangle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta) = \arccos\frac{\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}$$

Пример 10.15 Одредити угао између равни $\alpha:\ 3x - 6y - 2z = 15$ и $\beta:\ 2x + y - 2z = 5$.

Пример 10.16 Одредити вектор паралелан вектору правца праве пресека равни $\alpha:\ 3x - 6y - 2z = 15$ и $\beta:\ 2x + y - 2z = 5$.

Пример 10.17 Одредити једначину праве у пресеку равни $\alpha:\ 3x - 6y - 2z = 15$ и $\beta:\ 2x + y - 2z = 5$.