Аналитичка геометрија

Предавање 7

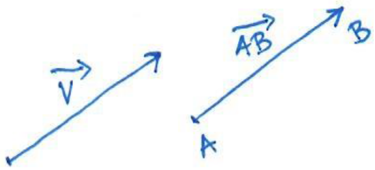
Вектори у равни
геометријски и алгебарски приступ

Нови Сад, 2022.

Вектори у равни – геометријски приступ

Дефиниција

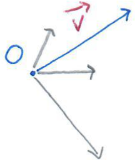
Вектор у равни је усмерена дуж. Два вектора су једнака ако имају исту дужину и усмерење (правац и смер).



Користићемо ознаке: $\vec{v}$ или $\overrightarrow{AB}$
Вектори $\vec{v}$ и $\overrightarrow{AB}$ су једнаки, што пишемо $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, јер

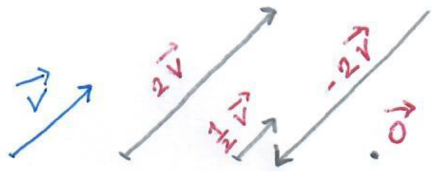
- имају исту дужину (*интензитет*)
- паралелни су (имају исти *правац*)
- показују у истом *смеру*

Напомена: Дакле, вектор у равни је **скуп** усмерених дужи у равни истог интензитета, правца и смера. За сваку тачку у равни привезан је по *један представник* од сваког вектора.



Вектори у равни – геометријски приступ

Множење вектора скаларом α, $\alpha \in \mathbb{R}$



Вектори $\vec{v}$ и $\alpha\vec{v}$ имају увек исти правац (паралелни су), с тим да за

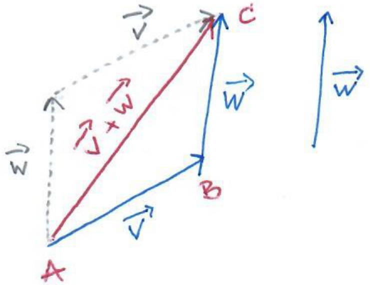
- $\alpha > 0$ имају и исти смер, а интензитет вектора $\alpha\vec{v}$ је α дужина вектора $\vec{v}$
- $\alpha < 0$ имају супротан смер, а интензитет вектора $\alpha\vec{v}$ је $|\alpha|$ дужина вектора $\vec{v}$
- $\alpha = 0$ добијамо да је $0\vec{v} = \vec{0}$ само тачка, без усмерења

Колинеарност (паралелност) вектора

За не-нула векторе $\vec{u}$ и $\vec{v}$ кажемо да су **колинеарни** ако постоји $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ тако да је $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ (*линеарно зависни*)
(дакле, *имају исти правац* (паралелни су) али могуће различит смер и интензитет)

Вектори у равни – геометријски приступ

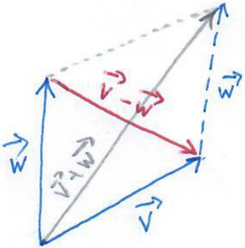
Сабирање вектора – правило паралелограма



- Нека су $\vec{v}$ и $\vec{w}$ два не-нула вектора
- Узмимо њихове представнике који се надовезују: $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$
- Онда је $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AC}$, односно дијагонала паралелограма одређеног векторима $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$
  ** правило паралелограма **
- На основу особина паралелограма, видимо да је сабирање вектора комутативно $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

Вектори у равни – геометријски приступ

Одузимање вектора



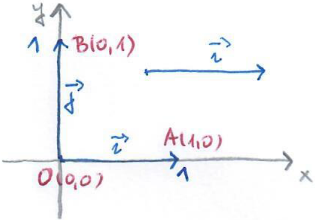
Одузимање вектора дефинишемо на природан начина: $\vec{v}-\vec{w}=\vec{v}+(-1)\vec{w}$

- Конструишимо паралелограм над векторима $\vec{v}$ и $\vec{w}$
- Користећи да су $\vec{w}$ и $-\vec{w}=(-1)\vec{w}$ паралелни вектори, исте дужине и супротног смера
- Добијамо да је $\vec{v}-\vec{w}$ дијагонала паралелограма конструисаног над векторима $\vec{v}$ и $\vec{w}$ тако да креће са краја вектора $\vec{w}$ ка крају вектора $\vec{v}$
- Приметимо, у паралелограму конструисаном над векторима $\vec{v}$ и $\vec{w}$ једна дијагонала је $\vec{v}+\vec{w}$ а друга $\vec{v}-\vec{w}$ (водити само рачуна о смеровима)

Компоненте вектора

Ако вектор у равни $\vec{u}$ изразимо у облику $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, где су $\vec{v}$ и $\vec{w}$ неколинеарни (нису паралелни, односно граде паралелограм), онда кажемо да су $\vec{v}$ и $\vec{w}$ **компоненте вектора** $\vec{u}$.

Базни вектори у правоуглом координатном систему



Ако раван координатизујемо, као и до сад, *правоуглим координатим системом*, истичу се **базни вектори**:

- $\vec{\imath}$ – паралелан са $x-$осом у позитивном смеру, дужине 1
- $\vec{\jmath}$ – паралелан са $y-$осом у позитивном смеру, дужине 1
- Ако је $O(0,0)$, $A(1,0)$ и $B(0,1)$, онда је

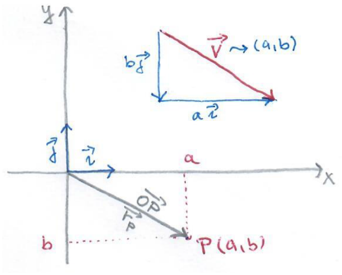
$$\vec{\imath} = \overrightarrow{OA} \quad \text{и} \quad \vec{\jmath} = \overrightarrow{OB},$$

те су то представници базних вектора привезани за координатни почетак

Компоненте вектора

Дефиниција

Ако је $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$, кажемо да су $a\vec{\imath}$ и $b\vec{\jmath}$ **компоненте** вектора $\vec{v}$ *у односу на базне векторе* $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$, а бројеви $a, b \in \mathbb{R}$ су **скаларне компоненте** вектора $\vec{v}$ *у односу на базне векторе* $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$.



- Приметимо да у равни сваки вектор $\vec{v}$ можемо на јединствен начина изразити као $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$, конструишући одговарајући правоугли троугао. Скаларне компоненте вектора $\vec{v}$ су a и b, те му придружујемо јединствено одређен уређени пар (a, b)
- Ако у равни посматрамо тачку $P(a, b)$, онда је, јасно, $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$. Вектор $\overrightarrow{OP}$, који обележавамо и са $\vec{r}_P$, зовемо вектор положаја тачке P
- Дакле, $\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}$ је репрезент вектора $\vec{v}$ који је привезан за координатни почетак. Сваки вектор има *тачно једног представника* који је везан за координатни почетак, облика $\overrightarrow{OP}$

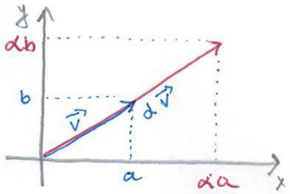
Вектори у равни – алгебарски приступ

Дакле, **алгебарски приступ векторима** се темељи на увођењу правоуглог координатног система у раван и фиксирању базних вектора $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$, те на чињеници да се сада *сваки вектор $\vec{v}$ на јединствен начин разлаже у облику* $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$. Можемо користити и запис $\vec{v} = (a, b)$, ако је јасно у односу на које базне векторе смо разложили вектор $\vec{v}$; или $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \vec{r}_P$, где је $P(a, b)$.

Алгебарска дефиниција једнакости вектора

Вектори $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ и $\vec{v'} = a'\vec{\imath} + b'\vec{\jmath}$ су **једнаки** (што пишемо $\vec{v} = \vec{v'}$) ако је $a = a'$ и $b = b'$.

Алгебарска дефиниција множења вектора скаларом α, $\alpha \in \mathbb{R}$

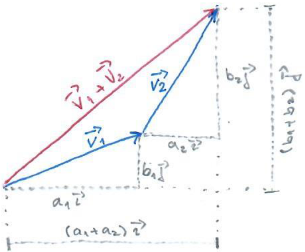


Из сличности троуглова добијамо:

- ако је вектор $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$, онда је $\alpha\vec{v} = (\alpha a)\vec{\imath} + (\alpha b)\vec{\jmath}$
- Односно, ако је вектор $\vec{v} = (a, b)$, онда је
$$\alpha\vec{v} = \alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$$

Вектори у равни – алгебарски приступ

Алгебарска дефиниција сабирања вектора



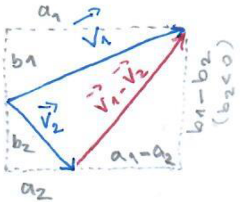
- Нека je $\vec{v}_1 = a_1\vec{\imath} + b_1\vec{\jmath}$ и $\vec{v}_2 = a_2\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath}$. Тада je $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_1 + a_2)\vec{\imath} + (b_1 + b_2)\vec{\jmath}$
- Односно, ако користимо запис преко уређених парова, за $\vec{v}_1 = (a_1, b_1)$ и $\vec{v}_2 = (a_2, b_2)$ важи да je

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Пример 7.1 Нацртати векторе $\vec{u} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ и $\vec{v} = (5, 3)$ и одредити (и нацртати) $\vec{u} + \vec{v}$

Вектори у равни – алгебарски приступ

Алгебарска дефиниција одузимања вектора



- Нека je $\vec{v}_1 = a_1\vec{\imath} + b_1\vec{\jmath}$ и $\vec{v}_2 = a_2\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath}$. Тада je $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (a_1 - a_2)\vec{\imath} + (b_1 - b_2)\vec{\jmath}$
- Односно, ако су вектори дати у облику $\vec{v}_1 = (a_1, b_1)$ и $\vec{v}_2 = (a_2, b_2)$, онда je

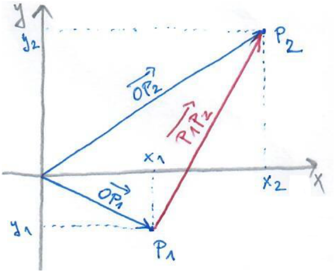
$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2)$$

Приметимо да бисмо исти резултат добили и да смо користили до сада дефинисане операције множења скаларом и сабирања вектора. Наиме,

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 - \vec{v}_2 &= (a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1, b_1) + (-1)(a_2, b_2)\\ &= (a_1, b_1) + (-a_2, -b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2)\end{aligned}$$

Пример 7.2 Нацртати векторе $\vec{u} = 6\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ и $\vec{v} = 3\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$ и одредити (и нацртати) $\vec{u} - \vec{v}$

Вектори у равни – алгебарски приступ



Нека су дате тачке $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$.

Тада важи $\boxed{\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}}$

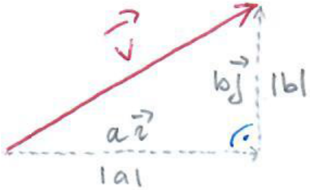
Дакле, из $\overrightarrow{OP_1} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$ и $\overrightarrow{OP_2} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}$ добијамо да је
$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath}$, односно

$$\boxed{\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$$

Пример 7.3 Нека је $P_1(3, 4)$ и $P_2(5, 1)$. Нацртати и одредити вектор $\overrightarrow{P_1P_2}$

Вектори у равни – алгебарски приступ

Алгебарска дефиниција интензитета (дужине) вектора



- Нека је $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} = (a, b)$
- Тада је $|\vec{v}| = |a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}| = |(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Пример 7.4 Примењена је сила од $90N$ (Њутна) наниже, која гради угао од 30° са хоризонталном осом. Одредити хоризонталну и вертикалну компоненту те силе.

Приметимо да се интензитет вектора добро слаже са множењем вектора скаларом, односно важи $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Заиста,

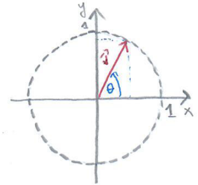
$$|\alpha\vec{v}| = |\alpha a\vec{\imath} + \alpha b\vec{\jmath}| = \sqrt{(\alpha a)^2 + (\alpha b)^2} = \sqrt{\alpha^2(a^2 + b^2)} = |\alpha|\sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha||\vec{v}|$$

Пример 7.5 Директном провером показати да је $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$, ако је $\vec{v} = -3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ и $\alpha = -2$.

Вектори у равни – алгебарски приступ

* За вектор $\vec{v}$ кажемо да је **јединични вектор** ако је $|\vec{v}| = 1$.

Базни вектори су јединични: $|\vec{\imath}| = |1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ и, слично, $|\vec{\jmath}| = 1$.



- Сви вектори облика $\vec{v} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$ су јединични, заиста $|\vec{v}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

* **Нула вектор** је $\vec{0} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} = (0, 0)$

Вектори у равни – алгебарски приступ

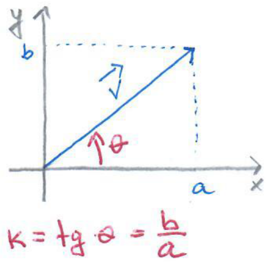
За сваки не-нула вектор $\vec{v} \neq \vec{0}$ важи:

- Вектор $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ је јединични вектор (овај процес називамо нормирање вектора $\vec{v}$). Заиста, $\left|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}\right| = \frac{1}{|\vec{v}|}|\vec{v}| = 1$
- Приметимо да $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ има исто усмерење (правац и смер) као вектор $\vec{v}$, јер је $\frac{1}{|\vec{v}|} > 0$, само је интензитет промењен и износи 1. Зовемо га и јединични вектор правца вектора $\vec{v}$
- Дакле, вектор $\vec{v}$ можемо записати $\vec{v} = |\vec{v}|\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, чиме му истичемо интензитет и усмерење.
- Приметимо, ако је $\vec{v} = (a, b)$ онда је

$$\vec{v} = |(a,b)|\left(\frac{a}{|(a,b)|}, \frac{b}{|(a,b)|}\right) = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{интензитет}}\underbrace{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}_{\text{јединични вектор правца}}$$

Пример 7.6 Нормирати вектор $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, а затим га написати тако да му се истакне интензитет и јединични вектор правца.

Вектори у равни – алгебарски приступ



За вектор $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$, коефицијент правца је $\frac{b}{a}$. Дакле, вектори $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ и $\vec{v}' = a'\vec{\imath} + b'\vec{\jmath}$ су

- паралелни ако је $\dfrac{b}{a} = \dfrac{b'}{a'}$
- нормални ако је $\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{\frac{b'}{a'}} = -\dfrac{a'}{b'}$

Пример 7.7 За вектор $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ одредити бар по један пример вектора који му је паралелан и један пример вектора који му је нормалан.