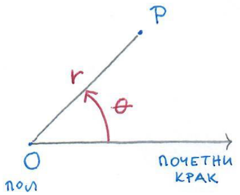
Аналитичка геометрија

Предавање 6

Поларне координате

Нови Сад, 2022.

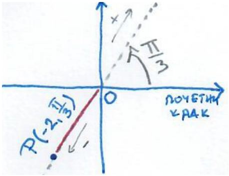
Поларне координате



$P \longmapsto$ пар поларних координата (r, θ), где је

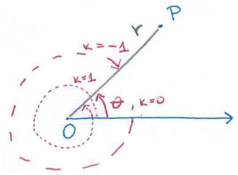
- $r = d(O, P)$ удаљеност тачке P од **пола** O
- θ је угао од **почетног крака** до полуправе $p(OP)$ супротно од смера казаљке на сату (*позитиван смер*)
- приметимо, $r \geq 0$ и $\theta \in \mathbb{R}$

Напомена: Понекад се дозвољава и да је $r < 0$; на пример $(r, \theta) = (-2, \dfrac{\pi}{3})$
Ако није другачије наглашено, ми ћемо увек претпостављати да је $r \geq 0$



Особине поларних координата

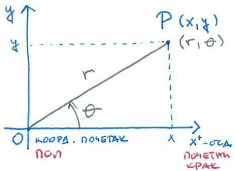
- Пол O нема добро дефинисане поларне координате; $O(0, \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$
- Свака тачка у равни P има бесконачно много презентација



$$P(r, \theta) = P(r, \theta + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z}$$

представљање тачке у поларним координатама није јединствено

- правоугли координатни систем $\longleftrightarrow$ поларни координатни систем



$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\theta \qquad "\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}"$$

Пример 6.1 Одредити једначину кружнице $x^2 + (y-3)^2 = 9$ у поларним координатама

Особине поларних координата

Пример 6.2 Одредити следеће геометријске фигуре и написати њихове једначине у правоуглим координатама

$$r\cos\theta = -4, \qquad r^2 = 4r\cos\theta, \qquad r = \frac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$$

Пример 6.3 и **Напомена:** понекад је једноставније користити поларне а понекад правоугле координате. На пример, одредити:

поларне координате	*правоугле координате*
$r\cos\theta = 2$	$x = 2$
$r = 1 - \cos\theta$	$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$

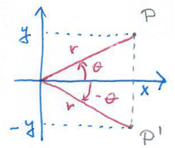
Пример 6.4 Нацртати следеће геометријске објекте:

$$r = 1; \qquad \theta = \theta_0; \qquad 1 \le r \le 2 \ \wedge \ 0 \le \theta \le \pi/2;$$

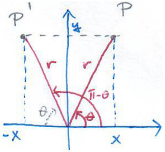
$$r \in [0, 2] \ \wedge \ \theta = \pi/4; \qquad 2\pi/3 \le \theta \le 5\pi/6$$

Особине поларних координата

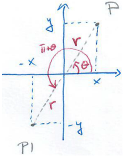
- Поларне и правоугле координате и симетрије у равни



симетрија у односу на $x-$*осу*
једначину криве морају задовољити:
правоугле координате: (x, y) и $(x, -y)$
поларне координате: (r, θ) и $(r, -\theta)$



симетрија у односу на $y-$*осу*
једначину криве морају задовољити:
правоугле координате: (x, y) и $(-x, y)$
поларне координате: (r, θ) и $(r, \pi - \theta)$

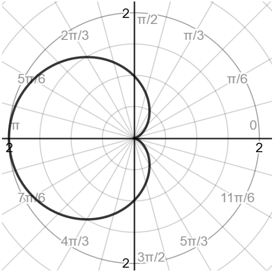


симетрија у односу на $(0, 0)$
једначину криве морају задовољити:
правоугле координате: (x, y) и $(-x, -y)$
поларне координате: (r, θ) и $(r, \pi + \theta)$

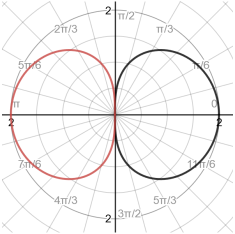
Напомена: Постојање две симетрије имплицира постојање треће

Особине поларних координата

Пример 6.5 (**Кардиоид**) Нацртати криву $r = 1 - \cos\theta,\ \theta \in [0, 2\pi)$



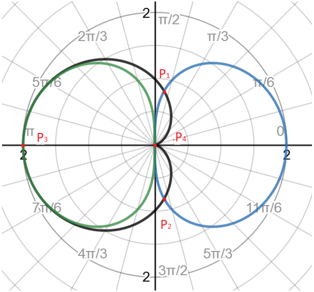
Пример 6.6 Нацртати криву $r^2 = 4\cos\theta,\ \ \theta \in [-\pi/2, \pi/2)$, користити да је $r \in \mathbb{R}$



Особине поларних координата

- Због нејединствености презентације у поланим координатама, понекад није једноставно одредити **тачке пресека** геометријских објеката датих једначинама у поларним координатама

Пример 6.7 Одредити тачке пресека кривих $r = 1 - \cos\theta$ и $r^2 = 4\cos\theta$.



Из датог система једначина следи:

$$r = 1 - \frac{r^2}{4} \Leftrightarrow r^2 + 4r - 4 = 0 \Leftrightarrow r = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

С обзиром на кардиоид, за тачку у пресеку важи $r \geq 0 \Rightarrow \theta = \arccos(3 - 2\sqrt{2}) = \pm 80^\circ$

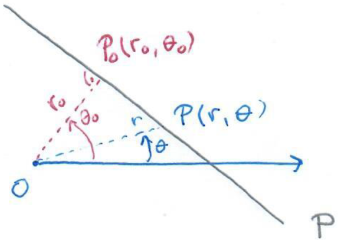
Дакле, добијамо тачке $P_{1,2}(-2 + 2\sqrt{2}, \pm 80^\circ)$

Шта је са тачкама P_3 и P_4?

У примеру 6.5. $P_3(2, \pi)$, док у 6.6. $P_3(-2, 0)$!

У примеру 6.5. $P_4(0, 0)$, док у 6.6. $P_4(0, \frac{\pi}{2})$!

Једначина праве у поларним координатама



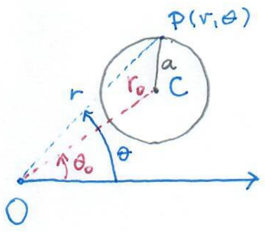
Директно, из правоуглог троугла PP_0O добијамо $\dfrac{r_0}{r} = \cos(\theta_0 - \theta)$

$$\boxed{r\cos(\theta_0 - \theta) = r_0,\ \theta \in \left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Пример 6.8 Одредити једначину праве $r\cos(\theta - \pi/3) = 2$ у правоуглим координатама

Једначина кружнице у поларним координатама

Посматрамо кружницу са центром у $C(r_0, \theta_0)$ полупречника a



Применом Косинусне теореме на троугао OCP, добијамо

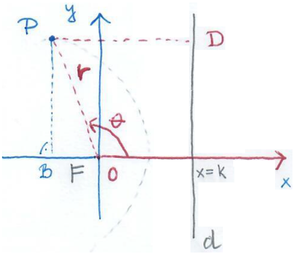
$$\boxed{a^2 = r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\theta - \theta_0)}$$

на крају, из једначине одређујемо опсег (*интервал*) којем припада угао θ

Пример 6.9 Одредити једначину кружнице у поларним координатама са центром у $C(2, \pi)$ полупречника $a = 2$; и нацртати је

Једначине конусних пресека у поларним координатама

Нека је фокус F постављен у координатни почетак а одговарајућа директриса облика $x = k,\ k > 0$. Тада знамо да за произвољну тачку P са конусног пресека важи $d(P, F) = e \cdot d(P, D)$, где је D пројекција тачке P на директрису



Дакле, за тачку $P(r, \theta)$ важи

$d(P, F) = r$ и
$d(P, D) = k + d(F, B) = k - r\cos\theta$,

те је *једначина конусног пресека*

$$r = e \cdot (k - r\cos\theta) \Rightarrow r(1 + e\cos\theta) = ek$$

$$\boxed{r = \frac{ek}{1 + e\cos\theta}, \quad k > 0}$$

Напомена: За $e \in (0, 1)$ добијамо елипсу, за $e = 1$ параболу, а за $e > 1$ хиперболу

Једначине конусних пресека у поларним координатама

Пример 6.10 Одредити једначине конусних пресека којима је фокус у координатном почетку, а директриса је облика $x = k,\ k < 0$

$$r = \frac{ek}{e\cos\theta - 1}, \quad k < 0$$

Пример 6.11 Одредити једначине конусних пресека којима је фокус у координатном почетку, а директриса је облика $y = k,\ k > 0$

$$r = \frac{ek}{1 + e\sin\theta}, \quad k > 0$$

Пример 6.12 Показати да је са $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ дата једначина елипсе са фокусом у координатном почетку и директрисом облика $x = k,\ k > 0$, где је a дужина велике полуосе; затим приметити да када $e \to 0$ добијамо једначину кружнице