Аналитичка геометрија

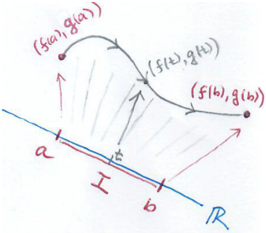
Предавање 5

Параметризација кривих у равни

Нови Сад, 2022.

Параметризација кривих у равни

Параметарски задата крива



Нека су $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидне[1] функције над интервалом I. Скуп тачака у равни $(x, y) = (f(t), g(t)),\ t \in I$ називамо **параметарски задата крива у (координатној) равни.** Једначине

$$x = f(t) \quad \text{и} \quad y = g(t),\ t \in I$$

се називају *параметарске једначине криве*, променљива t је *параметар криве*, а интервал I је *домен параметра*.

Ако је I затворен интервал, $I = [a, b],\ a < b$ онда је $(f(a), g(a))$ *почетна тачка*, док је $(f(b), g(b))$ *крајња тачка криве*.

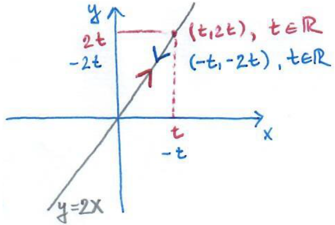
Када задамо параметарске једначине и одредимо домен параметра, кажемо да смо параметризовали криву. Односно, једначине и домен параметра чине **параметризацију криве.**

* Параметар t може да се интерпретира као време, или угао,. . .

[1] обично се тражи и више, нпр. непрекидна диференцијабилност координатних функција

Параметризација кривих у равни, примери

1° права

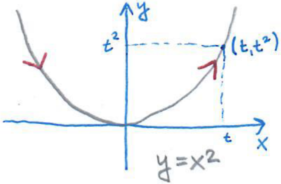


- $x = t, \quad y = 2t, \quad t \in \mathbb{R}$
- $x = \frac{t}{2}, \quad y = t, \quad t \in \mathbb{R}$ ... *спорије кретање*
  међутим, и овим једначинама добијамо исти скуп решења у равни, тј. исту криву
- $x = -t, \quad y = -2t, \quad t \in \mathbb{R}$ ... *други смер*
  дакле, параметризација није јединствена

- Приметимо да параметризацијом криве добијамо и информацију о оријентацији (усмерењу) криве
  На пример, ако би крива описивала положај честице у равни у времену t, онда би нам параметризација открила и смер кретања честице
- Параметризација, такође, даје и информацију о "брзини" кретања честице
  Дакле, ако криву опишемо параметарским једначинама онда ми о њој добијамо и додатне информације које немамо у канонским једначинама

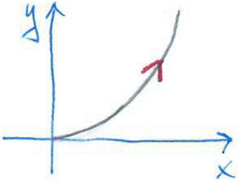
Параметризација кривих у равни, примери

2° парабола



- $x = t, \quad y = t^2, \quad t \in \mathbb{R}$
- *други смер...*
  $x = -t, \quad y = t^2, \quad t \in \mathbb{R}$
- *већа брзина кретања...*
  $x = 3t, \quad y = 9t^2, \quad t \in \mathbb{R}$

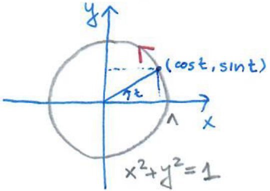
3° пола параболе



- $x = t, \quad y = t^2, \quad t \in [0, \infty)$
- $x = \sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \geq 0$
  промена домена параметра I се користи за издвајање дела кривa, али водити рачуна и о дефинисаности ф-ја f и g над I

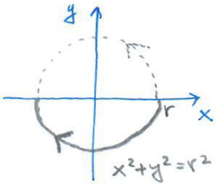
Параметризација кривих у равни, примери

4° јединична кружница



- $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi)$
- *други смер...*
  $x = \cos t, \quad y = -\sin t, \quad t \in [0, 2\pi)$
  параметар t увек иде од мањег ка већем броју, нпр. $t \in [a, b], \ a < b$

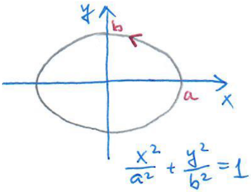
5° центрирана кружница



- $x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad t \in [0, 2\pi)$
- *доња полукружница...*
  $x = r\cos t, \quad y = -r\sin t, \quad t \in [0, \pi]$
  или
  $x = -t, \ y = -\sqrt{r^2 - t^2}, \ t \in [-r, r]$
  приметимо да када користимо ову врсту параметризације, за целу кружницу нам требају две параметризације (и $y = +\sqrt{r^2 - t^2}$)

Параметризација кривих у равни, примери

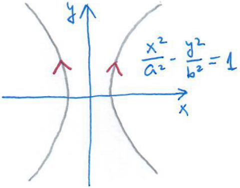
6° центрирана елипса



- $x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi)$

  заиста, тада за свако $t \in [0, 2\pi)$ важи
  $\dfrac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \dfrac{b^2\sin^2 t}{b^2} = 1$

7° центрирана хипербола



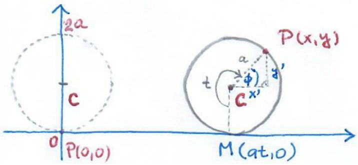
- *десна грана...*
  $x = \dfrac{a}{\cos t}, \quad y = b\,\mathrm{tg}\,t, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2)$
  лева грана...
  $x = -\dfrac{a}{\cos t}, \quad y = b\,\mathrm{tg}\,t, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2)$

  заиста, $\dfrac{a^2}{a^2\cos^2 t} - \dfrac{b^2\mathrm{tg}^2 t}{b^2} = \dfrac{1-\sin^2 t}{\cos^2 t} = 1$

Циклоида

Циклоида

Нека се точак полупречника a котрља по равној подлози. Означимо са P тачку која је фиксирана на рубу точка. Одредити параметарске једначине криве која описује кретање тачке P док се точак котрља по подлози. Добијена крива се назива **циклоида (циклоид)**.



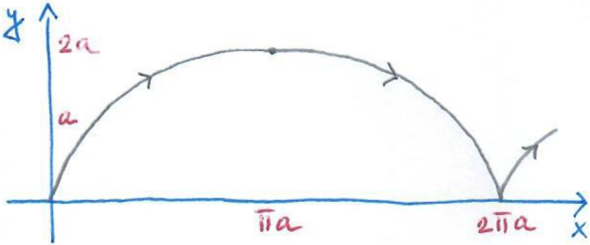
- t – угао за који је точак заротиран
- $M(x_M, 0)$ – пројекција центра C на $x-$осу након ротације за угао t, те x_M одговара дужини кружног лука над углом t дакле, $x_M = \frac{t}{2\pi}O = \frac{t}{2\pi}2a\pi = at$
- $C(at, a)$ – центар точка након ротације за угао t
- Коначно, важи $P(at + x', a + y')$, где је $x' = a\cos\phi, \quad y' = a\sin\phi, \quad \phi = \frac{3\pi}{2} - t$ $P(at + a\cos(\frac{3\pi}{2} - t), a + a\sin(\frac{3\pi}{2} - t)), \ t \in \mathbb{R}$

$$\boxed{P(at - a\sin t, a - a\cos t), \quad t \in \mathbb{R}}$$

Циклоида

Циклоида је крива у равни дата параметарским једначинама

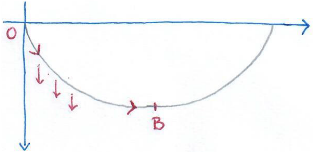
$$\boxed{x = at - a\sin t, \quad y = a - a\cos t, \quad t \in \mathbb{R}}$$



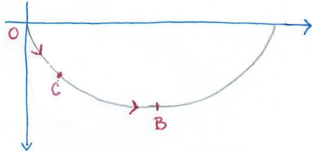
циклоида

Desmos ... cikloida

Циклоида



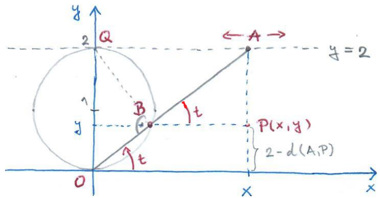
је и брахистохрона
путања по којој се креће тело од O до B под дејством силе гравитације за *најкраће време*



је и таутохрона
тело које крене из O и тело које крене из C (без почетне брзине) ће за *исто време* стићи до B
користећи овај принцип повећана је прецизност часовника са клатном

Пример 1, крива вештице Ањези

Нека је дата кружница полупречника 1 са центром у $(0, 1)$. Произвољну тачку A на правој $y = 2$ повежемо са координатним почетком O и са B обележимо пресек дате кружнице и дужи OA. Тачка P се добија као пресек вертикалне праве кроз тачку A и хоризонталне кроз тачку B. Одредити једначину криве која описује положај тачке P у равни док тачка A иде дуж праве $y = 2$.
Напомена: Име криве је настало као грешка при преводу са латинског, правилан превод би био ''уже које враћа једро''.

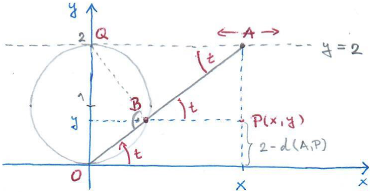


Могу се користити следеће чињенице:

- $d(A, B) \cdot d(O, A) = d^2(A, Q)$, где је $Q(0, 2)$;
- затим, за тачку $P(x, y)$ важи $x = d(A, Q)$, $y = 2 - d(A, B) \sin t$, где је t угао који дуж OA гради с позитивним делом $x-$осе.

Пример 1, крива вештице Ањези

- Одредимо прво $d(A, Q)$. Из правоуглог троугла $\triangle OAQ$ видимо да је $\measuredangle OAQ = t$, те је $\operatorname{ctg} t = \frac{d(A,Q)}{d(O,Q)}$, односно



$$x = d(A, Q) = 2\operatorname{ctg} t$$

- Одредимо затим и $d(A, B)$. Из $d(A, B) \cdot d(O, A) = d^2(A, Q)$ добијамо да је $d(A, B) = \frac{d^2(A,Q)}{d(O,A)} = \frac{d^2(A,Q)}{\sqrt{d^2(O,Q)+d^2(A,Q)}} = \frac{4\operatorname{ctg}^2 t}{\sqrt{4+4\operatorname{ctg}^2 t}} = 2\frac{\cos^2 t}{\sin t}$. Дакле,

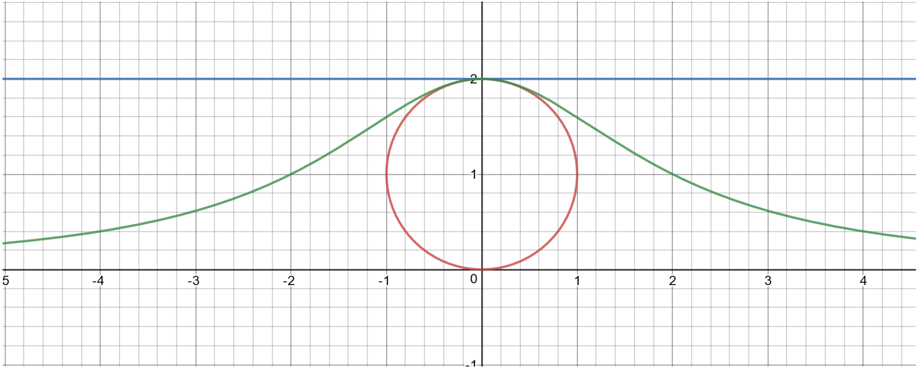
$$y = 2 - 2\frac{\cos^2 t}{\sin t}\sin t = 2(1 - \cos^2 t) = 2\sin^2 t$$

- Приметимо, с обзиром да права $p(O, A)$ сече праву $y = 2$, добијамо да $t \in (0, \pi)$

Пример 1, крива вештице Ањези

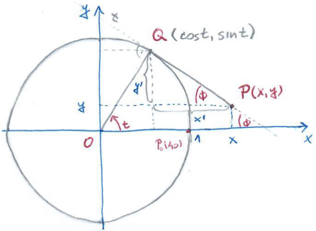
Коначно, параметризација криве вештице Ањези (на цртежу зелено) је дата са

$$x = 2\operatorname{ctg} t, \quad y = 2\sin^2 t, \quad t \in (0, \pi)$$



Пример 2, инволута кружнице

Ако жицу намотану око калема (кружнице) пустимо да се одмота, њен крај ће приликом одмотавања описивати инволуту кружнице у равни (овде се занемарује дебљина жице). Нека је калем кружница $x^2 + y^2 = 1$, а крај жице нека је тачка $P(x, y)$ која је у почетном моменту, док је још жица намотана $P_0(1, 0)$. При одмотавању жица је увек тангентна на кружницу у тачки жице Q која последња још увек додирује кружницу. Нека је са t обележен угао који гради дуж OQ са позитивним делом $x-$осе. Одредити параметарске једначине инволуте кружнице изражавајући координате тачке $P(x, y)$ у зависности од t, $t \geq 0$.



Приметимо:

- важи $Q(\cos t, \sin t)$, $t \geq 0$
- затим, за тачку $P(x, y)$ важи $P(\cos t + x', \sin t - y')$ где је $x' = d(P, Q)\cos\phi$, $y' = d(P, Q)\sin\phi$
- $d(P, Q)$ одговара дужини кружног лука P_0Q над углом t, односно $d(P, Q) = \frac{t}{2\pi}2\pi = t$
- на крају, важи $\phi = \pi/2 - t$

Пример 2, инволута кружнице

Дакле, за тачку P важи

$$P(\cos t + t\cos(\pi/2 - t), \sin t - t\sin(\pi/2 - t)), \quad t \geq 0.$$

Коначно, параметризација инволуте кружнице (на цртежу црвено) је дата са

$$x = \cos t + t\sin t, \quad y = \sin t - t\cos t, \quad t \geq 0$$