Аналитичка геометрија - вежбе

Милица Жигић, Милица Лучић, Аника Њамцул
(захваљујемо се на помоћи и Ненаду Морачи)

3. oktobar 2022.

1 Правоугли координатни систем и растојање између тачака

1. На бројној оси уцртати тачке $A(-3)$, $B(\frac{8}{3})$ и $C(0)$.

2. (а) На бројној оси уцртати тачке $A(-2)$ и $B(8)$. Затим, одредити координате тачке која се налази на половини дужи AB.

   (б) На бројној оси су дате две тачке $A(x_1)$ и $B(x_2)$. Одретити координате тачке $X(x)$ која се налази на средини дужи AB.

   (ц) Наћи координате тачака $X(x)$ која се налазе два пута ближе тачки $A(-8)$ него тачки $B(1)$.
   Напомена. Нека су дате тачке A и B. Нека су X_1 и X_2 тачке на правој $p(A, B)$, такве да је $d(A, X_1) : d(X_1, B) = d(A, X_2) : d(X_2, B)$. Тада се за тачке A, B, X_1, X_2 каже да су *хармонијски коњуговане* и пише $H(A, B; X_1, X_2)$.

3. (а) Одредити тачке $X(x)$ на бројној оси за које важи а) $|x - 3| = 5$; б) $|x + 4| = 4$; ц) $d(X, A) < 3$, где је $A(2)$; д) $|x - 3| > 2$ и е) $|x + 1| + |x + 2| = 1$.

   (б) На бројној оси је дата тачка $X(x)$. Одредити тачке $A(a)$ и $B(b)$ које се налазе на растојању r од тачке X.

4. За тачку у равни $P(x, y)$

   (а) одредити у ком квадранту се налази, ако се зна да јој је апсциса негативна;

   (б) одредити знак координата x и y, ако се зна да лежи у четвртом квадранту;

   (ц) одредити координате, ако се зна да се налази на $x-$оси;

   (д) одредити координате, ако се зна да се налази на $y-$оси.

5. У равни су дате тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Одредити координате тачке $S(x, y)$ која полови дуж AB.

6. (а) У равни су дате тачке $A(4, 1)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 4)$ и $D(0, 0)$. Уцртати их.

   (б) Колика је дужина страница добијеног четвороугла $ABCD$?

   (ц) Показати да је добијени четвороугао квадрат.
   Напомена: Одредити дужину дијагонала.

   (д) Одредити површину квадрата $ABCD$.

7. Показати да су тачке $A(3, -6)$, $B(-2, 4)$ и $C(1, -2)$ колинеарне (леже на истој правој).
   Напомена: Показати да је дужина једне од страница троугла ABC једнака збиру друге две.

8. Показати да је у паралелограму збир квадрата дужина страница једнак збиру квадрата дужина дијагонала.
   Напомена: Поставити паралелограм тако да му је једно теме у координатном почетку, а једна страница на позитивном делу $x-$осе.

9. Нека је $ABCD$ правоугаоник. Показати да за произвољну тачку M у равни важи
$$d^2(A, M) + d^2(C, M) = d^2(B, M) + d^2(D, M).$$

10. (а) Написати једначину кружнице са центром у $C(-2, 3)$ полупречника 5. Да ли добијена кружница пролази кроз тачку $(2, -1)$?
    (б) Показати да је једначином $x^2 + 2x + y^2 = 0$ дефинисана кружница у равни. Која тачка је центар добијене кружнице и колики је полупречник кружнице?

11. Посматрајмо у равни параболу као скуп тачака $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x^2\}$.
    (а) Које од тачака $O(0, 0)$, $A(1, 3)$, $B(1, -3)$, $C(-1, 3)$, $D(-1, -3)$, $E(3, 1)$ и $F(3, -1)$ припадају параболи P?
    (б) Одредити положај тачке $Q(x, y)$ у равни за чије координате важи $y < 3x^2$.
    (ц) Одредити положај тачке $Q(x, y)$ у равни за чије координате важи $x > \sqrt{\frac{y}{3}}$, $y > 0$.
    (д) Одредити тачке са параболе P које истовремено припадају и правој коју чини скуп тачака $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x + 6\}$.

12. Нека је дат троугао ABC. Одредити координате центра описане кружнице око троугла ABC. Одредити и полупречник описаног круга.
    Напомена: Нека је тачка A у координатном почетку, а страница AB на позитивном делу $x-$осе.

13. Нека су у равни дате тачке A и B. Одредити геометријско место тачака у равни, M, које се налаже на $k-$пута већем растојању од тачке A него од тачке B.

14. Одредити координате темена јединичне коцке у простору, ако се зна да јој је једно теме у координатном почетку а три ивице које полазе из тог темена леже на позитивним деловима координатних оса. Описати координате тачака које леже на ивицама добијене коцке. Описати координате тачака које леже на страницама добијене коцке. Одредити координате тачака које леже унутар коцке.

15. Одредити скупове у простору одређене једначинама: а) $z^2 = 1$; б) $y^2 + z^2 = 1$ и ц) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

16. Одредити координате тачака које задовољавају систем једначина $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $z = 1$. Која је геометријска интерпретација овог проблема?

17. Да ли је системима једначина: а) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $z = 1$ и б) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 3$ дефинисана иста крива у простору?

18. Дефинисати у простору симетралу угла xOy (односно, симетралу првог квадранта $xy-$равни али посматрану у простору.)

2 Једначине праве и међусобни однос правих у равни

19. (а) Дати једначину праве паралелне са $y-$осом (вертикална права).
    (б) Дати једначину праве паралелне са $x-$осом (хоризонтална права).
    (ц) Одредити вертикалну и хоризонталну праву која пролази кроз тачку $(\sqrt{2}, -1.3)$, затим исто одредити и за тачку $(-\pi, 0)$.
    (д) Дати једначину праве која пролази кроз координатни почетак.

20. За праву $3x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ рећи:
    (а) у којој тачки сече $x-$осу;
    (б) у којој тачки сече $y-$осу;
    (ц) да ли пролази кроз тачку $A(1, 2\sqrt{3})$;
    (д) који јој је коефицијент правца и који угао гради са позитивним делом $x-$осе посматрано у смеру супротном од казаљке на сату.

21. Одредити једначину праве и нацртати је у координатном систему, ако се зна:
    (а) да пролази кроз тачку $A(2, 3)$ и да јој је коефицијент правца $-\frac{3}{2}$;
    (б) да пролази кроз тачке са координатама $(-2, -1)$ и $(3, 4)$;
    (ц) да јој је коефицијент правца 2 а да $y-$осу сече у -5;
    (д) да сече $x-$осу у 4 а $y-$осу у -1.

    Затим одредити у којој се тачки секу праве које су добијене у задацима под (б) и (ц).

22. Одредити праву која пролази кроз тачку $(1, 2)$ и кроз тачку пресека правих $x + 2y = 3$ и $2x - 3y = -1$.

23. Одредити координате тачке на правој $y = 3x + 1$ која је једнако удаљена од тачке $(0, 0)$ као и од тачке $(-3, 4)$.

24. Означимо са F температуру изражену у степенима Фаренхајта а са C у степенима Целзијуса. Одредити линеарну једначину облика $F = kC + n$, која повезује Целзијусову и Фаренхајтову скалу, ако се зна да се вода леди на $32°F$ односно $0°C$, а да кључа на $212°F$ односно $100°C$. Нацртати добијену праву и одредити колико је степени Фаренфајта $37°C$, као и колико је степени Целзијуса $96°F$. Показати да ли постоји температура која ће на Фаренхајтовом и Целзујусовом термометру дати исту нумеричку вредност?

25. Притисак p који делује на рониоца испод воде на дубини d дат је једначином $p = kd + n$. На површини воде притисак је 1 атмосфера, а на дубини од 100 метара притисак је 10.94 атмосфера. Одредити колики притисак делује на рониоца на дубини од 50 метара.

26. Прамен правих са центром $S(x_0, y_0)$ је скуп свих правих које пролазе кроз тачку S, те је дат једначинама $y - y_0 = k(x - x_0),\ k \in \mathbb{R}$ и додатно права $x = x_0$. Одредити све праве из прамена са центром у $S(2, 5)$ које одсецају једнаке одсечке на координатним осама.

27. (а) Одредити једначину праве која је паралелна правој $2x + 5y = 15$ и пролази кроз тачку $(5, -1)$.
    (б) Одредити једначину праве која је ортогонална на праву $8x - 13y = 13$ и пролази кроз тачку $(0, 1)$.
    (ц) Одредити у ком су међусобном односу праве $ax + by = c_1$ и $bx - ay = c_2,\ a, b \neq 0$.

(д) Одредити у ком су међусобном односу праве $ax + by = c_1$ и $ax + by = c_2,\ a, b \neq 0$.

28. Нека су дате тачке $A(a, 0)$ и $B(0, b),\ a, b > 0$. Одредити коефицијент правца праве која пролази кроз координатни почетак O и кроз средину дужи AB означену са P. Под којим условима су праве $p(A, B)$ и $p(O, P)$ међусобно нормалне.

29. Зрак светлости долази дуж праве $x + y = 1$ (из другог квадранта) и одбија се (рефлектује) о $x-$осу. Зна се да је упадни угао једнак одбојном углу. Одредити једначину праве по којој се простире рефлектовани зрак светлости.

30. Проверити да ли тачке $A(6, 4),\ B(4, -3)$ и $C(-2, 3)$ образују једнакокраки правоугли троугао.

31. Показати да су тачке $A(2, -1),\ B(1, 3)$ и $C(-3, 2)$ темена неког квадрата и одредити четврто теме тог квадрата.

32. (а) Одредити удаљеност тачке $P(2, 1)$ од праве $y = x + 2$.
    (б) Одредити удаљеност тачке $P(4, 6)$ од праве $4x + 3y = 12$.
    (ц) Одредити удаљеност тачке $P(a, b)$ од праве $x = -1$.
    (д) Одредити алгоритам по ком се рачуна удаљеност тачке $P(x_0, y_0)$ од праве $ax + by = c$.

33. Дата су темена троугла $A(1, 4),\ B(4, 1)$ и $C(3, 7)$.
    (а) Одредити дужине страница троугла ABC.
    (б) Одредити координате ортоцентра троугла ABC (пресек висина троугла).
    (ц) Одредити координате тежишта троугла ABC (пресек правих које спајају теме са средином наспрамне странице троугла).
    (д) Одредити површину троугла ABC.
    (е) Одредити координате центра описане кружнице око троугла ABC (пресек симетрала страница троугла).

34. Одредити једначину симетрале угла између правих $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$.

35. Одредити координате центра уписане кружнице у троугао са теменима $A(3, 4),\ B(0, 8)$ и $C(0, 0)$ (пресек симетрала углова троугла).

3 Конусни пресеци

3.1 Кружница

36. Одредити полупречник и центар кружнице $2x^2 + 2y^2 - 28x + 12y + 114 = 0$ и нацртати је.

37. Одредити полупречник и центар кружнице која пролази кроз тачке $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(2, 2)$ и нацртати је.

38. Одредити област у равни у којој је $x^2 - 6x + y^2 - 2y \geqslant -9$.

39. Одредити једначину кружнице чији је центар $(-2, 1)$ а пролази кроз тачку $(1, 3)$. Да ли се тачка $(1.1, 2.8)$ налази у унутрашњости, спољашњости или на кружници.

40. Доказати да се пречник кружнице види из произвољне њене тачке под правим углом. Другим речима, показати да је сваки периферни угао над пречником кружнице прав.

41. Нека је дата права l једначином $ax+by+c = 0$ и кружница k једначином $(x-p)^2+(y-q)^2 = r^2$. Рачунајући растојање центра кружнице k од праве l, одредити положај праве l у односу на кружницу k.

42. Нека је дата права $y = kx + n$ и кружница $x^2 + y^2 = r^2$. Одредити које услове треба да задовољавају параметри $k, n, r \in \mathbb{R}$ тако да се права и кружница: (а) секу у две тачке; (б) секу у једној тачки и (ц) немају заједничких тачака.

43.
   (а) Одредити једначину тангенте $y = kx+n$ на кружницу $x^2+y^2 = r^2$ кроз тачку $P(x_0, y_0)$ која се налази: (1) на кружници и (2) у њеној спољашњости.

   (б) Одредити једначину тангенте на кружницу $x^2 + y^2 = 25$ у тачки $(5, 0)$ и у тачки $(3, 4)$.

   (ц) Одредити једначину тангенте на кружницу $(x-p)^2+(y-q)^2 = r^2$ у тачки са кружнице $P(x_0, y_0)$.

   (д) Одредити једначине тангенти из тачке $(8, 8)$ на кружницу $x^2+y^2 = 32$, затим одредити и угао између добијених тангенти.

   (е) Одредити једначине тангенти на кружницу $x^2 + y^2 - 14y + 32 = 0$ из тачке $(5, 4)$.

44. (*Оптичко својство кружнице*) Зрак који извире из центра кружнице, после одбијања о њу ће се поново вратити у центар.
Напомена: Показати да је тангента нормална на пречник кружнице у тачки додира.

45. Одредити једначину кружнице са центром у $(4, 7)$ којој је права $3x - 4y + 1 = 0$ тангента.

46. Одредити једначине тангенти кружнице $x^2 + y^2 + 5x = 0$ које су нормалне на праву $4x - 3y + 7 = 0$.

47. Одредити једначине тангенти на кружницу $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ у тачкама у којима кружница пресеца координатне осе.

48. Нека је на $x-$оси дата тачка A и на $y-$оси тачка B и нека је њихово међусобно растојање a. Пустимо да се тачка A слободно креће по $x-$оси а да се тачка B креће тако да растојање између тачака A и B остане непромењено. Одредити коју криву у равни одређују средине дужи AB.

49. Нека су t_1 и t_2 тангенте кружнице $x^2+y^2=r^2$ које је додирују у тачкама T_1 и T_2. Показати да ако је $T_0(x_0, y_0)$ тачка пресека правих t_1 и t_2 онда је $xx_0+yy_0=r^2$ једначина праве која пролази кроз тачке T_1 и T_2.
Напомена: Тачка $T_0(x_0, y_0)$ и права $xx_0+yy_0=r^2$ су међусобно пол и полара, редом, у односу на кружницу $x^2+y^2=r^2$.

50. (а) Кружница је јединствено одређена са три своје (неколинеарне) тачке. Прамен кружница је скуп кружница у равни које пролазе кроз две дате тачке. Ако су две кружнице тог прамена дате једначинама $k_1(x,y) = x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1 = 0$ и $k_2(x,y) = x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2 = 0$, показати да је тада једначна произвољне кружнице тог прамена дата једначином

$$k_1(x,y)+\lambda k_2(x,y) = 0, \quad \text{за неко } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(б) У прамену кружница одређеног кружницама $x^2+y^2-6x-10y-15=0$ и $x^2+y^2+2x+4y-20=0$ одредити ону кружницу која пролази кроз координатни почетак.

51. Дата је кружница $(x-1)^2+y^2=4$. Кроз тачку $T\left(2, -\dfrac{1}{2}\right)$ конструисана је тетива посматране кружнице, таква да је тачка T њено средиште. Одредити једначину праве на којој лежи та тетива и одредити дужину те тетиве.

3.2 Парабола

52. Нацртати дате параболе и одредити им фокус, директрису и теме, ако је: а) $x^2=6y$ и б) $x=-3y^2$.

53. Параболу $y^2=8x$ транслирати за две јединице на доле и једну на десно. Одредити једначину, фокус, директрису, осу симетрије и теме новодобијене параболе и нацртати је.

54. Нацртати параболу $3x^2-12x+y+11=0$ и одредити јој фокус, директрису, осу симетрије и теме.

55. Одредити област у равни у којој је $x-2y^2 \geqslant 0$.

56. Показати да је $4p$ ширина параболе $x^2=4py$, $p>0$ у фокусу, односно да је удаљеност тачака које се налазе у пресеку праве $y=p$ и параболе једнака $4p$.

57. Нека је дата права $y=kx+n$ и парабола $y^2=4px$. Одредити које услове треба да задовољавају параметри $k, n, p \in \mathbb{R}$ тако да се права и парабола: а) секу у две тачке; б) секу у једној тачки и ц) немају заједничких тачака.

58. (а) Одредити једначину тангенте $y=kx+n$ на параболу $y^2=4px$ кроз тачку $P(x_0, y_0)$ која се налази: 1) на параболи и 2) у њеној спољашњости.

(б) Одредити једначине тангенти параболе $y^2=16x$ које су од координатног почетка удаљене за $\sqrt{8}$.

(ц) Одредити једначину тангенте на параболу $(y-b)^2=4p(x-a)$ у тачки са параболе $P(x_0, y_0)$.

59. Нека су фиксиране две тангенте t_1 и t_2 параболе $y^2=4px$. Посматрајмо даље произвољну тангенту t дате параболе. Нека је S пресек тангенти t_1 и t, а R пресек тангенти t_2 и t. Показати да дужина пројекције дужи SR на директрису параболе не зависи од избора тангенте t.

60. (*Оптичко својство параболе*) Зрак који иде паралелно оси симетрије параболе, након рефлексије о параболу улази у фокус параболе.
Нека је дата парабола $y^2 = 4px$ и на њој тачка $P(x_0, y_0)$. Означимо са F фокус дате параболе и са t тангенту дате параболе у тачки P. Показати да се зрак који иде паралелно $x-$оси дуж праве $y = y_0$ рефлектује о параболу и наставља правом $p(F, P)$.
Напомена: Показати да је угао (тачније, тангенс угла) између тангенте и праве $y = y_0$ једнак углу између тангенте и праве $p(F, P)$.

61. Показати да је директриса параболе геометријско место тачака из којих се парабола види под правим углом.
Напомена: Показати да су сваке две тангенте на параболу из тачке на директриси међусобно нормалне.

62. Показати да нормала на тангенту параболе повучена из тачке пресека те тангенте и тангенте паралелне директриси, пролази кроз фокус параболе.

63. Парабола $y^2 = 4px$ и кружница којој је центар на $y-$оси додирују праву $y = x + 3$ у истој тачки. Одредити једначине параболе и кружнице.

64. Одредити једначине заједничких тангенти параболе $y^2 = 12x$ и кружнице полупречника 5, којој је центар у фокусу параболе. Скицирати посматране конусне пресеке.

65. (*Дијаметар или пречник параболе*) Одредити геометријско место тачака које су средине паралелних тетива параболе.

66. Нека је t тангента параболе $y^2 = 4px$ у тачки P која се налази на параболи. Означимо са A тачку пресека тангенте t и $x-$осе, а са B пројекцију тачке P на $x-$осу. Показати да су тачке A и B једнако удаљене од координатног почетка.

67. Дата је парабола $y^2 = 12x$. Одредити једначине тангенти параболе које са правом $q: 4x - 2y + 9 = 0$ граде угао од $45°$.

3.3 Елипса

68. Нацртати дате елипсе и одредити им фокусе и темена, ако је: (а) $16x^2 + 25y^2 = 400$ и (б) $3x^2 + 2y^2 = 6$.

69. Одредити једначину елипсе и нацртати је, ако се зна да су јој: (а) фокуси $(\pm\sqrt{2}, 0)$ а темена $(\pm 2, 0)$ и (б) фокуси $(0, \pm 4)$ а темена $(0, \pm 5)$.

70. Елипсу $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ транслирати четири јединице на десно и три на горе. Одредити једначину, фокусе, центар, темена и велику полуосу новодобијене елипсе и нацртати је.

71. Нацртати елипсу $25x^2 + 150x + 9y^2 + 36y + 36 = 0$ и одредити јој фокусе, центар, темене и велику полуосу.

72. Одредити област у равни у којој је $x^2 + y^2 \geqslant 1$ и $4x^2 + y^2 \leqslant 4$.

73. Нека је дата елипса, нека је њен центар O и нека су M_1 и M_2 такве њене тачке да је $p(O, M_1) \perp p(O, M_2)$. Показати да одстојање ове праве од центра елипсе не зависи од избора тачака M_1 и M_2.

74. Нека је дата права $y = kx + n$ и елипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Одредити које услове треба да задовољавају параметри $k, n, a, b \in \mathbb{R}$ тако да се права и елипса: а) секу у две тачке; б) секу у једној тачки и ц) немају заједничких тачака.

75. (а) Одредити једначину тангенте $y = kx + n$ на елипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ кроз тачку $P(x_0, y_0)$ која се налази: (1) на елипси и (2) у њеној спољашњости.
    (б) Одредити једначине тангенти из тачке $P(14, 1)$ на елипсу $x^2 + 4y^2 = 100$.
    (ц) Одредити једначину тангенте на елипсу $\dfrac{(x-p)^2}{a^2} + \dfrac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ у тачки са елипсе $P(x_0, y_0)$.

76. Дате су елипса $e:\ y^2 = 11x - 2x^2$ и тачка $M(1, 3)$.
    (а) Да ли тачка M припада елипси e? Колико тангенти елипсе e пролази кроз тачку M? Одредити те тангенте.
    (б) Нацртати дату елипсу e и одредити јој центар и фокусе.

77. (*Оптичко својство елипсе*) Зрак који извире из једног од фокуса елипсе, након рефлексије о елипсу улази у други фокус елипсе.

    Нека је дата елипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и на њој тачка $P(x_0, y_0)$. Означимо са F_1 и F_2 фокусе дате елипсе и са t тангенту дате елипсе у тачки P. Показати да се зрак који извире из фокуса F_1 и иде према тачки P рефлектује о елипсу и наставља правом $p(P, F_2)$ прама фокусу F_2.
    Напомена: Показати да је угао (тачније, тангенс угла) између тангенте t и праве $p(P, F_1)$ једнак углу између тангенте t и праве $p(P, F_2)$.

78. Дата је елипса својом једначином $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Нека су t_1 и t_2 њене тангенте у тачкама $(a, 0)$ и $(-a, 0)$, а t_3 њена тангента у тачки $(0, b)$. Нека t_3 сече t_1 и t_2 у тачкама M_1 и M_2, редом. Доказати да се дуж M_1M_2 из фокуса елипсе види под правим углом.

79. У произвољној тачки елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ повучена је тангента t и тангенте у тачкама $A_1(a, 0)$ и $A_2(-a, 0)$. Тангента t сече друге две тангенте у тачкама T_1 и T_2. Доказати да кружница конструисана над дужи T_1T_2 као пречником пролази кроз оба фокуса елипсе.

80. Одредити геометријско место тачака у равни из којих се елипса види под правим углом.
    Напомена: Може се користити да за решења x_1 и x_2 квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ важи Вијетова формула $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

81. (*Дијаметар или пречник елипсе*) Одредити геометријско место тачака које су средине паралелних тетива елипсе.

82. Нека је тачка T средина тетиве елипсе $x^2 + 4y^2 = 25$, где је: (а) $T(\frac{3}{2}, 1)$; (б) $T(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$. Одредити дужину те тетиве.

83. Дата је елипса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Означимо њене фокусе са F_1 и F_2. Из тачке $P(0, 5)$ повучене су тангенте на дату елипсу и нека је додирују у тачкама T_1 и T_2. Доказати да су углови $\measuredangle T_1PF_1$ и $\measuredangle T_2PF_2$ једнаки.

84. Одредити једначину поларе тачке $T_0(3, 10)$ у односу на елипсу $e:\ y^2 = \dfrac{50}{9}\,x - \dfrac{25}{81}\,x^2$.

    Напомена: Нека су t_1 и t_2 тангенте елипсе e из тачке T_0 и нека оне додирују елипсу e у тачкама T_1 и T_2. Праву $p(T_1, T_2)$ називамо поларом тачке T_0 у односу на елипсу e.

85. Одредити геометријско место тачака средина тетива елипсе $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ које полазе из тачке $B(0, b)$.

3.4 Хипербола

86. Нацртати дате хиперболе и одредити им фокусе, темена и асимптоте, ако је: (а) $9x^2-16y^2 = 144$ и (б) $8y^2 - 2x^2 = 16$.

87. Одредити једначину хиперболе и нацртати је, ако се зна да су јој: (а) фокуси $(\pm2, 0)$ а асимптоте $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$ и (б) темена $(0, \pm2)$ а асимптоте $y = \pm\frac{1}{2}x$.

88. Хиперболу $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ транслирати две јединице на десно. Одредити једначину, фокусе, центар, темена и асимптоте новодобијене хиперболе.

89. Нацртати хиперболу $5y^2+20y-4x^2 = 0$ и одредити јој фокусе, центар, темена и асимптоте.

90. Одредити област у равни у којој је $4y^2 - x^2 \geqslant 4$ и $4x^2 + y^2 \leqslant 4$.

91. Наћи једначину центриране хиперболе којој је једно теме $T_1(4, 0)$, а асимптоте јој се секу под углом од $\pi/3$.

92. Нека је дата права $y = kx + n$ и хипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Одредити које услове треба да задовољавају параметри $k, n, a, b \in \mathbb{R}$ тако да се права и хипербола: (а) секу у две тачке; (б) секу у једној тачки и (ц) немају заједничких тачака.

93. (а) Одредити једначину тангенте $y = kx+n$ на хиперболу $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ кроз тачку $P(x_0, y_0)$ која се налази: (1) на хиперболи и (2) у њеној спољашњости.
    (б) У тачкама пресека праве $x + y = 2$ и хиперболе $2x^2 - y^2 = 8$ су повучене тангенте на хиперболу. Одредити угао између тих тангенти.
    (ц) Одредити једначину тангенте на хиперболу $\dfrac{(x-p)^2}{a^2} - \dfrac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ у тачки са хиперболе $P(x_0, y_0)$.

94. (*Оптичко својство хиперболе*) Зрак који извире из једног од фокуса хиперболе, након рефлексије о хиперболу изгледа као да извире из другог фокуса.
    Нека је дата хипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и на њој тачка $P(x_0, y_0)$. Означимо са F_1 и F_2 фокусе дате хиперболе и са t тангенту дате елипсе у тачки P. Показати да се зрак који извире из фокуса F_1 и иде према тачки P, која се налази на оној грани хиперболе која одговара фокусу F_1, рефлектује о хиперболу и наставља правом $p(P, F_2)$ али удаљавајући се од фокуса F_2.
    Напомена: Показати да је угао (тачније, тангенс угла) између тангенте t и праве $p(P, F_1)$ једнак углу између тангенте t и праве $p(P, F_2)$.

95. Дата је хипербола својом једначином $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Нека је t њена тангента која је додирује у тачки T. Нека t сече асимптоте хиперболе у тачкама M_1 и M_2. Доказати да је T средиште дужи M_1M_2.

96. Нека произвољна тангента хиперболе дате једначином $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ сече њене тангенте које су паралелне са $y-$осом у тачкама M_1 и M_2. Доказати да се дуж M_1M_2 види из фокуса под правим углом.

97. Нека је P тачка са хиперболе. Доказати да тангента на хиперболу у тачки P формира једнаке углове са правама $p(P, F_1)$ и $p(P, F_2)$, где су F_1 и F_2 фокуси дате хиперболе.

98. Одредити геометријско место тачака у равни које су (осно) симетричне једном од фокуса хиперболе у односу на све тангенте те хиперболе.

99. (*Дијаметар или пречник хиперболе*) Одредити геометријско место тачака које су средине паралелних тетива хиперболе.

100. Нека је дата центрирана хипербола својом каноничком једначином $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0.$

    (а) У зависности од параметара a и b, одредити у које хиперболе се може уписати квадрат.

    (б) Затим, за одговарајућу хиперболу, одредити дужину странице уписаног квадрата.

101. (а) Одредити асимптоту хиперболе $x^2 - y^2 = 1$ која пролази кроз тачку $(1, 1)$.

    (б) Одредити једначину кружнице чији се центар налази на правој $x + 2y = 4$ и која додирује асимптоту хиперболе $x^2 - y^2 = 1$ у тачки $(1, 1)$.

102. Нека је дата хипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a > b$ и нека је $P(x_0, y_0)$ тачка на датој хиперболи. Уочимо асимптоту q те хиперболе и повучемо праву t кроз тачку P паралелну правој q. Нека t сече директрису хиперболе у тачки K. Ако је са F означен одговарајући фокус хиперболе, доказати да је $PK = FP$.

103. Дата је једначина хиперболе $y^2 = \dfrac{8}{3}x + \dfrac{4}{9}x^2$ и тачка $T\left(2, \dfrac{8}{3}\right)$. Одредити тангенту дате хиперболе која пролази кроз тачку T.

3.5 Конусни пресеци и ексцентрицитет

104. Нека је у равни дата права $x = d$ и тачка $F(c, 0),\ c, d > 0$. Нека је D пројекција тачке $P(x, y)$ на праву $x = d$. Одредити геометријско место тачака $P(x, y)$ у равни тако да је $PF = ePD$, ако је: (а) $e \in (0, 1)$ и (б) $e > 1$.

105. Одредити ексцентрицитет и нацртати фокусе и директрисе елипсе ако је:
(а) $6x^2 + 9y^2 = 54$ и (б) $2x^2 + y^2 = 2$.

106. Одредити ексцентрицитет и нацртати фокусе и директрисе хиперболе ако је:
(а) $x^2 - y^2 = 1$ и (б) $8y^2 - 2x^2 = 16$.

107. Одредити канонску једначину центриране елипсе ако су јој:
(а) фокуси $F(\pm 8, 0)$ и ексцентрицитет $e = 0.2$ и (б) темена $T(0, \pm 70)$ и ексцентрицитет $e = 0.1$.

108. Одредити канонску једначину центриране хиперболе ако су јој:
(а) фокуси $F(0, \pm 5)$ и ексцентрицитет $e = 1.25$ и (б) темена $T(\pm 2, 0)$ и ексцентрицитет $e = 2$.

109. Одредити ексцентрицитет и канонску једначину центриране елипсе ако јој је фокус $(-\sqrt{2}, 0)$ а директриса $x = -2\sqrt{2}$.

110. Одредити ексцентрицитет и канонску једначину центриране хиперболе ако јој је фокус $(-6, 0)$ а директриса $x = -2$.

111. Одредити фокус и директрису параболе $y = ax^2 + bx + c$.

112. Први Кеплеров закон каже да је орбита планете елипса којој је Сунце у једном од фокуса.

(а) Нацртати облик орбите Плутона ако се зна да му је ексцентрицитет $e = 0.25$.

(б) Одредити једначину која описује орбиту Плутона, ако се зна да се Плутон од Сунца налази најмање на растојању 30 AJ (астрономских јединица), а највише 50 AJ.

113. Крајње тачке мале и велике осе елипсе су $(1,1)$, $(3,4)$, $(1,7)$ и $(-1,4)$. Нацртати елипсу, одредити јој канонску једначину, затим одредити фокусе, директрисе и ексцентрицитет дате елипсе.

114. Одредити канонску једначину елипсе ексецнтрицитета $\frac{2}{3}$ тако да јој је права $x = 9$ директриса а тачка $(4,0)$ одговарајући фокус.

115. Ексцентрицитет хиперболе је $\frac{3}{2}$, а један од фокуса је тачка $(1,-3)$ и њему одговарајућа директриса је права $y = 2$. Одредити канонску једначину дате хиперболе.

116. Одредити константе a, b и c тако да је једначином

$$4x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

дата елипса којој је $x-$оса тангента у координатном почетку и која пролази кроз тачку $(-1,2)$. Одредити и ексцентрицитет добијене елипсе.

117. Одредити геометријско место тачака у равни код којих је однос удаљености од тачке $A(1,0)$ и од праве $x = 9$ једнак $\frac{1}{3}$.

118. Познато је да је права $2x - 3y = 3$ тангента хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ и да је права $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ једна њена асимптота. Наћи једначину и одредити ексцентрицитет, фокусе и директрисе те хиперболе.

119. Права $x - y\sqrt{3} - 2 = 0$ је тангента хиперболе $x^2 - 4y^2 = k$, $k > 0$. Одредити једначину, ексцентрицитет, темена, фокусе, асимптоте и директрисе те хиперболе.

3.6 Конусни пресеци као квадратне криве

120. Одредити ком конусном пресеку одговарају следеће квадратне једначине:

(а) $2x^2 - y^2 + 4xy - 2x + 3y = 6$;

(б) $x^2 - 3xy + 3y^2 + 6y = 7$;

(ц) $3x^2 + 12xy + 12y^2 + 435x - 9y + 72 = 0$.

121. Ротирати координатне осе (x и y) тако да у новодобијеним коодринатама (x' и y') нестане мешовити члан ($B'x'y'$) дате квадратне једначине. Затим нацртати добијене конусне пресеке у новом координатном систему.

(а) $x^2 + xy + y^2 = 1$;

(б) $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 = 1$;

(ц) $xy - y - x + 1 = 0$.

Напомена: Након ротације координатног система xy за угао α у новодобијеном координатном систему $x'y'$ ће важити $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$ и $y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$; додатно, да би нестао мешовити члан треба да важи $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{B}{A-C}$ или $\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{A-C}{B}$.

122. Показати да је: $B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$; $A + C = A' + C'$ и $D^2 + E^2 = D'^2 + E'^2$.

123. Нека је дата једначина $x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x + 12y + 9 = 0$. Одредити да ли дата једначина описује елипсу, параболу или хиперболу. Показати да је заправо том једначином дата права $2y = -x - 3$.

124. Одредити ексцентрицитет, фокусе и директрисе хиперболе $xy = 2$.

125. Одредити ексцентрицитет, фокусе, темена и директрисе конусног пресека: $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 32 = 0$.

126. Одредити ексцентрицитет, фокусе и директрисе конусног пресека:

(а) $2x^2 + xy + 2y^2 - 15 = 0$;

(б) $13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 = 144$.

127. Показати да је $2xy - \sqrt{2}y + 2 = 0$ хипербола. Одредити јој центар, темена, фокусе, осе и асимптоте.

128. Дат је конусни пресек

$$21x^2 + 58xy + 21y^2 = 200. \tag{1}$$

Показати да је са (1) дата хипербола. Одредити јој центар, темена, фокусе и асимптоте.

Напомена: Након ротације координатног система xy за угао α у добијеном координатном систему $x'y'$ ће важити $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$ и $y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$; додатно, да би нестао мешовити члан треба да важи $\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{A-C}{B}$.

129. Проверити да ли постоји недегенерисани конусни пресек $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ тако да задовољава све наведене особине:

(а) симетричан је у односу на координатни почетак,

(б) пролази кроз тачку $(1, 0)$ и

(ц) права $y = 1$ му је тангента у тачки $(-2, 1)$.

130. Дата је елипса

$$5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 + 12\sqrt{3}x - 20y + 24 = 0. \tag{2}$$

(а) Одредити хоризонталне и вертикалне тангенте елипсе (2).

(б) Показати да једначина

$$5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 4,$$

представља елипсу која се добија транслацијом елипсе (2) тако да јој се центар поклопи с координатним почетком.

Напомена: Центар елипсе (2) поклапа се с центром правоугаоника који формирају четири праве одређене под (а).

(ц) Одредити дужину велике и мале полуосе елипсе (2) као и угао који велика полуоса заклапа са x-осом.

4 Параметризација кривих у равни

131. Одредити параметризације следећих кривих у равни (p, q, k, a, b, r су дати параметри):

   (а) $y = q + k(x - p)$;
   (б) $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$;
   (ц) $b^2(x-p)^2 + a^2(y-q)^2 = a^2b^2$;
   (д) $b^2(x-p)^2 - a^2(y-q)^2 = a^2b^2$;
   (е) $y = q + (x-p)^2$.

132. Нацртати у равни криве дате својим параметризацијама:

   (а) $x = \cos(\pi - t),\ y = \sin(\pi - t), \quad t \in [0, \pi]$;
   (б) $x = 4\sin t,\ y = 2\cos t, \quad t \in [0, \pi]$;
   (ц) $x = t,\ y = \sqrt{t}, \quad t \geqslant 0$;
   (д) $x = \dfrac{1}{\cos^2 t} - 1,\ y = \operatorname{tg} t, \quad t \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$;
   (е) $x = -\dfrac{1}{\cos t},\ y = \operatorname{tg} t, \quad t \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$;
   (ф) $x = 2t - 5,\ y = 4t - 7, \quad t \in \mathbb{R}$;
   (г) $x = 1 - t,\ y = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R}$;
   (х) $x = t,\ y = \sqrt{4 - t^2},\ t \in [0, 2]$;
   (и) $x = \sqrt{t+1},\ y = \sqrt{t}, \quad t \geqslant 0$.

133. Одредити тачку на параболи $x = t,\ y = t^2,\ t \in \mathbb{R}$ која је најближа тачки $(2, \frac{1}{2})$.

134. Одредити тачку на елипси $x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$ која је најдаља од тачке $(\frac{3}{4}, 0)$.

135. Дата је крива параметарским једначинама $x = 5 + 2\cos t, \quad y = -3 + \sin t, \quad t \in \mathbb{R}$.

   (а) Показати да је датом једначином представљена елипса и написати њену једначину у Декартовим координатама.
   (б) Одредити ексцентрицитет и директрисе те елипсе.

136. Крива је дата параметарским једначинама

$$x = 1 + 2\cos t, \quad y = -2 + \sin t, \quad t \in [0, 2\pi).$$

   (а) Показати да је дата крива елипса и одредити њену једначину у Декартовим координатама.
   (б) Скицирати посматрану елипсу, одредити њен центар, фокусе, директрисе и ексцентрицитет.

137. (*Крива вештице Ањези*) Нека је дата кружница полупречника 1 са центром у $(0, 1)$. Произвољну тачку A на правој $y = 2$ повежемо са координатним почетком O и са B обележимо пресек дате кружнице и дужи OA. Тачка P се добија као пресек вертикалне праве кроз тачку A и хоризонталне кроз тачку B. Одредити једначину криве која описује положај тачке P у равни док тачка A иде дуж праве $y = 2$.
Напомена: Име криве је настало као грешка при преводу са латинског, правилан превод би био "уже које враћа једро".
Могу се користити следеће чињенице: у правоуглом троуглу OAQ важи $d(A, B) \cdot d(O, A) = d^2(A, Q)$, где је $Q(0, 2)$; затим за тачку $P(x, y)$ важи $x = d(A, Q),\ y = 2 - d(A, B)\sin t$, где је t угао који дуж OA гради с позитивним делом $x-$осе.

138. Дата је кружница $x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$, $a > 0$ и права $y = a$. Нека је N произвољна тачка на правој $y = a$ и нека је M тачка у пресеку дате кружнице и праве $p(O, N)$, где је са O означен координатни почетак. Коначно, тачку P бирамо на дужи ON тако да је $d(O, P) = d(M, N)$. Одредити праметарску једначину криве одређене тачкама P, док N пролази правом $y = a$, у функцији од угла t који гради права $p(O, N)$ у односу на позитивни део $y-$осе.
Напомена: У правоуглом троуглу ABC, са правим углом код темена B, обележимо са B' подножје висине из темена B. Тада важи $d(A, C) \cdot d(A, B') = d^2(A, B)$.

139. (*Инволута кружнице*) Ако жицу намотану око калема (кружнице) пустимо да се одмота, њен крај ће приликом одмотавања описати инволуту кружнице у равни (овде се занемарује дебљина жице). Нека је калем кружница $x^2 + y^2 = 1$, а крај жице нека је тачка $P(x, y)$ која је у почетном моменту, док је још жица намотана $(1, 0)$. При одмотавању жица је увек тангентна на кружницу у тачки жице Q која последња још увек додирује кружницу. Нека је са t обележен угао који гради дуж OQ са позитивним делом $x-$осе. Одредити параметарске једначине инволуте кружнице изражавајући координате тачке $P(x, y)$ у зависности од t, $t \geqslant 0$.

140. (*Трохоида*) Точак полупречника a се котрља дуж хоризонталне праве линије без проклизавања. Одредити параметарске једначине криве која описује кретање тачке P која се налази у равни ротације точка, на удаљености b од центра точка. Као параметар користити угао t кроз који се точак окреће око свог центра. Добијена крива се назива трохоида.
Напомена: Добијена крива се за $a = b$ назива и циклоида, за $a > b$ скраћена циклоида или хипотрохоида и за $a < b$ продужена циклоида или епитрохоида.

141. (*Хипоциклоида*) Нека се кружница котрља унутар дате веће кружнице. Произвољна тачка P на кружници која се котрља описује хипоциклоиду унутар велике кружнице. Нека је велика фиксирана кружница дата са $x^2 + y^2 = a^2$ и нека је полупречник мале кружнице која се котрља b и нека је њен центар обележен са C. Нека је у почетном моменту позиција посматране тачке $P(x, y)$ у $A(a, 0)$. Одредити параметарску једначину хипоциклоиде користећи као параметар угао θ који гради дуж OC са позитивним делом $x-$осе.

142. (*Астероид*) Ако се у задатку 141 узме да је $a = 4$ и $b = 1$, добијена хипоциклоида се назива астероид. Одредити параметрарску једначину астероида.
Напомена: Могу се користити следеће тригонометријске једнакости:

$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$$
$$\sin(3\theta) = -\sin^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta.$$

143. (*Епициклоида*) Нека се једна кружница котрља око друге фиксиране кружнице. Произвољна тачка P на кружници која се котрља током свог кретања описује епициклоиду. Нека је фиксна кружница дата једначином $x^2 + y^2 = 4$. Нека је полупречник кружнице која се котрља 1, а њен центар C у почетном положају на месту $(3, 0)$. Нека су координате тачке P у почетном положају $(2, 0)$. Одредити параметарску једначину епициклоиде користећи као параметар угао θ који гради дуж OC са позитивним делом $x-$осе (са O је обележен координатни почетак).

144. Дата је кружница $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ и права $x = 2$. Нека је N произвољна тачка на правој $x = 2$ у првом квадранту и нека је M тачка у пресеку дате кружнице и праве $p(O, N)$, где је са O означен координатни почетак. На дужи ON посматрамо тачку P, тако да је $d(O, P) = d(M, N)$. Одредити параметарске једначине криве која описује кретање тачке P у равни док тачка N у првом квадранту пролази правом $x = 2$. Почетна позиција тачке N

је $A(2,0)$. Као параметар користити угао t који полуправа $pp[O,N)$ гради да позитивним делом $x-$осе.

Напомена: Може се користити чињеница да су троуглови $\triangle OMA$ и $\triangle AMN$ правоугли (са правим углом код темена M).

145. Конусни пресек је дат параметарским једначинама $x = t$, $y = (t-1)(t-3)$, $t \in \mathbb{R}$. Одредити једначину конусног пресека у Декартовим координатама, скицирати тај конусни пресек и одредити ексцентрицитет, фокусе, темена и директрисе тог конусног пресека.

146. Дате су две криве, параметарским једначинама

$$x = \frac{1}{4}t^2,\ y = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

и

$$x = 1 + \sqrt{10}\cos\alpha,\ y = \sqrt{10}\sin\alpha, \quad \alpha \in [0, 2\pi).$$

Одредити једначине посматраних кривих у Декартовим координатама, скицирати криве и одредити једначине њихових заједничких тангенти.

5 Поларне координате

147. Уцртати тачке дате својим поларним координатама, а затим одредити и њихове правоугле координате: а) $(2,0)$; б) $(2,\pi)$; ц) $(2,\pi/2)$; д) $(2,-\pi/2)$; е) $(2,\pi/4)$ и ф) $(2,-\pi/3)$.

148. Нацртати дате скупове описане поларним координатама (r,θ): (а) $r=2$; (б) $r \geqslant 1$; (ц) $1 \leqslant r \leqslant 2$; (д) $\theta=\pi/6,\ 1 \leqslant r \leqslant 2$; (е) $\pi/6 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3,\ r \geqslant 2$ и (ф) $0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ r=1$.

149. За дате једначине у поларним координатама (r,θ) одредити њихове еквиваленте у правоуглим координатам (x,y) и нацртати одговарајуће графике: (а) $r\cos\theta + r\sin\theta = 1$; (б) $r^2=1$; (ц) $r^2 = 4r\sin\theta$; (д) $r^2\sin(2\theta)=2$; (е) $r\sin\theta = \ln r + \ln(\cos\theta)$; (ф) $r = 3\cos\theta$; (г) $r = 2\cos\theta - \sin\theta$ и (х) $r\sin(\theta+\pi/6)=2$.

150. За дате једначине у правоуглим координатам (x,y) одредити њихове еквиваленте у поларним координатама (r,θ) и нацртати одговарајуће графике: (а) $x^2+y^2=4$; (б) $x^2-y^2=1$; (ц) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ и (д) $y^2=4x$.

151. (*Лемнискаша*) Нацртати следеће криве у равни дате једначинама у поларним координатама: (а) $r^2=\cos(2\theta)$; (б) $r^2=-\cos(2\theta)$; (ц) $r^2 = 4\sin(2\theta)$ и (д) $r^2=\cos(3\theta),\ \theta\in[0,2\pi]$, (тачније за оне θ за које је једнакост дефинисана.)

152. Инверзија у односу на кружницу $r=1,\ \theta\in[0,2\pi]$ је пресликавање које тачки у поларним координатама (r,θ) додељује тачку $(1/r,\theta)$. Показати да се инверзијом јединична равнострана хипербола $(a=b=1)$ слика у лемнискату.

153. (*Лимаџон*) Нацртати четири основна облика лимасон криве: (а) $r=1/2+\cos\theta$ (овде користити да је $r\in\mathbb{R}$); (б) $r=1-\cos\theta$; (ц) $r=3/2+\cos\theta$ и (д) $r=2+\cos\theta$.
Напомена: Лимаџон је реч француског порекла и означава орган чула слуха - кохлеа или пуж смештен у унутрашњем уву. Општи облик лимасон криве је $r=a\pm b\cos\theta$ или $r=a\pm b\sin\theta$.

154. Нацртати следеће области у равни дате неједнакостима у поларним координатама: (а) $0\leqslant r\leqslant 2-2\cos\theta$ и (б) $0\leqslant r^2\leqslant\cos\theta$.

155. Нацртати следеће криве у равни: (а) $r=\cos(\theta/2),\ \theta\in[-\pi,\pi]$; (б) $r=1+\cos(\theta/2),\ \theta\in[0,2\pi]$; (ц) $r=1+\cos(\theta/2),\ \theta\in[0,4\pi]$ и (д) $r^2=|\sin\theta|,\ \theta\in[0,2\pi]$.

156. (*Сūирале*) Нацртати: (а) спиралу: $r=\theta,\ \theta\geqslant 0$; (б) логаритамску спиралу: $r=e^\theta,\ \theta\in\mathbb{R}$ и (ц) хиперболичну спиралу: $r=\frac{1}{\theta},\ \theta>0$.

157. (*Једначина елиūсе, ūараболе и хиūерболе у ūоларним координаūама*)

   (а) Нека се тачка F налази у координатном почетку и нека је дата права $d:\ x=k,\ k>0$. Показати да је једначином
   $$r=\frac{ek}{1+e\cos\theta},\quad k>0,$$
   дата: за $e\in(0,1)$ елипса; за $e=1$ парабола; за $e>1$ хипербола чији је фокус тачка F, одговарајућа директриса је права d и ексцентрицитет је e.

   (б) Задатак под (а) урадити за $k<0$.

   (ц) Задатак под (а) урадити ако је директриса $y=k$.

   (д) Показати да се једначина елипсе, из задатка под (а), може записати и у облику $r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$, јер је $k=a(\frac{1}{e}-e)$. Приметити да се, када је $e=0$, добија кружницу $r=a$ са центром у координатном почетку полупречника a.

158. Одредити поларне једначине конусних пресека са једним фокусом у координатном почетку, датих ексцентрицитетом и директрисом: (а) $e = 1,\ x = 2$; (б) $e = 5,\ y = -6$ и (ц) $e = \frac{1}{4},\ x = -2$.

159. Одредити поларну једначину параболе са фокусом у $(0, 0)$ и директрисом $r\cos(\theta - \pi/2) = 2$.

160. Показати да је једначином $r = \dfrac{21}{2 - \cos\theta}$ дата елипса у поларним координатама. Одредити њен ексцентрицитет, положај центра и фокуса, као и поларне једначине директриса.

161. Одредити који је конусни пресек дат једначином у поларним координатама $r = \dfrac{-16}{3 + 5\cos\theta}$, затим му одредити центар, фокусе, темена, директрисе и ексцентрицитет.

162. Дат је конусни пресек поларном једначином $r(3 - k\cos\theta) = 4$.

   (а) За које вредности $k \in \mathbb{R}$ је дати конусни пресек елипса?

   (б) За $k = \dfrac{3}{2}$ одредити фокус, директрисе и ексцентрицитет датог конусног пресека.

163. Дата је једначина конусног пресека у поларним координатама $r = \dfrac{2}{1 - 2\cos\theta}$.

   (а) Написати једначину дате криве у Декартовим координатама и одредити који конусни пресек је представљен овом једначином.

   (б) Одредити фокус, темена, асимптоте и ексцентрицитет датог конусног пресека.

164. Дата је крива једначином у поларним координатама $r = 2(\cos\theta - \sin\theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

   (а) Одредити једначину дате криве у Декартовим координатама.

   (б) Одредити једначине тангенти на дату криву које су паралелне $x-$оси.

165. (а) Написати једначину параболе у поларним координатама, ако знамо да јој је, посматрано у правоуглом координатном систему, фокус у координатном почетку а директриса облика $x = a$.

   (б) Инверзија у односу на кружницу $r = 1$ је пресликавање које тачки у поларним координатама (r, θ) додељује тачку $(1/r, \theta)$. Показати да се инверзијом кардиоид $r = \cos^2\frac{\theta}{2}$ слика у параболу.

   (ц) Нацртати добијене криве.

166. Нацртати криву у равни дату једначином у поларним координатама: $r^m = a^m\cos(m\theta),\ a > 0$, и објаснити цртеж, ако је
(а) $m = 1$; (б) $m = -1$; (ц) $m = 2$; (д) $m = -2$.

167. (а) Нека је дата елипса велике осе a и ексцентицитета e. Нека је фиксиран један од њених фокуса F. Показати да је најмање растојање тачке са елипсе од фокуса F једнако $a(1 - e)$ а највеће $a(1 + e)$.

   (б) Халејева комета се креће око Сунца по елиптичној путањи, где је $a = 36.18$ астрономских јединица и $e = 0.97$, тако да се Сунце налази у једном од фокуса елиптичне путање. Одредити која је најмања а која највећа удаљеност Халејеве комете од Сунца.

168. Три темена правоугаоника имају координате $(1, 1),\ (3, 4)$ и $(1, 7)$.

   (а) Одредити једначину елипсе описане око тог правоугаоника.

(б) За једначину криве из примера (а) одредити њен еквивалент у поларним координатама.

169. У равни је дата крива једначином у поларним координатама $r = a\cos\theta + b\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(а) Одредити који конусни пресек је дефинисан датом једначином и наћи његов ексцентрицитет.

(б) Наћи једначине тангенти на дату криву, за $a = 1$ и $b = 3$, које заклапају угао од 45° са позитивним делом $x-$осе.

170. (*Кардиоид*) Нека је дата фиксирана кружница $\mathcal{K}$ са центром у $A(-a, 0)$ полупречника a. Око ње се котрља кружница $\mathcal{K}'$ истог полупречника којој је у почетном моменту центар B у тачки $(a, 0)$. На кружници је фиксирана тачка P која је у почетном моменту у координатном почетку $O(0, 0)$. Одредити параметарску једначину криве која описује кретање тачке P у равни приликом котрљања кружнице $\mathcal{K}'$ око $\mathcal{K}$. Добијена крива је специјални случај епициклоиде и назива се кардиоид.

Напомена: Ако се користи параметризација $r = r(\theta)$, где су (r, θ) поларне координате равни, посматрати трапез $AOPB$ и показати да је једнакокраки.

171. Нека је дата кружница $x^2 + y^2 = ax,\ a > 0$. Права p пролази кроз координатни почетак O и сече кружницу у O и у тачки B. Из тачке B спуштена је нормала БЦ на x-осу, а потом је из тачке C повучена нормала CM на $p(O, B)$. Одредити једначину криве (у поларним координатама) коју описује тачка M док права p ротира око координатног почетка.

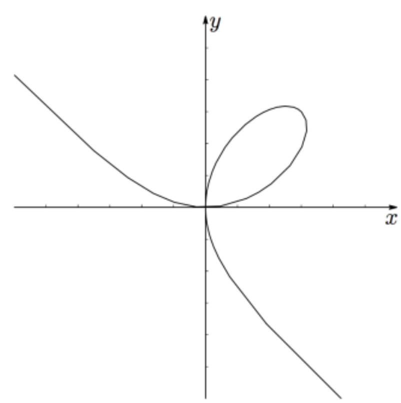
172. Дата је кружница $x^2 + y^2 = 6x$. Посматрајмо праву s која пролази кроз координатни почетак O и сече кружницу у O и у тачки T. На правој s, са разних страна тачке T одређене су тачке A и B тако да су дужине TA и TB фиксне дужине 2. Одредити једначине кривих у поларним координатама које описују тачке A и B приликом ротације праве s око координатног почетка.

173. Дата је кружница $x^2 + y^2 = 2ax,\ a > 0$. Права p пролази кроз координатни почетак O и сече кружницу у O и у тачки B. На правој p, са разних страна тачке B одређене су тачке M и N тако да су дужине BM и BN фиксне дужине $b > 0$. Одредити једначину криве у поларним координатама коју описују тачке M и N приликом ротације праве p око координатног почетка.

174. Једначина

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a > 0, \tag{3}$$

представља криву која се зове Декартов лист (видети слику).



(а) Наћи параметарске једначине $x = f(t)$ и $y = g(t)$, $t \in X \subseteq \mathbb{R}$ дате криве, ако за параметар t важи $t = \dfrac{y}{x}$, и одредити скуп X.

(б) Нацртати Декартов лист тако да део којем одговарају вредности параметра $t \in (-\infty, -1)$ буде нацртан испрекиданом, део $t \in (-1, 0)$ пуном, а део $t \in (0, +\infty)$ подебљаном линијом.

(ц) Репараметризовати Декартов лист (3) параметром $\theta \in Y \subseteq [0, 2\pi)$ који представља угао који вектор положаја тачке (x, y) заклапа с позитивним делом x-осе, и одредити скуп Y.

(д) Осенчити секторе у координатној равни у којима нема тачака Декартовог листа (3).

Напомена: Сектор (угао) у равни је скуп тачака (r, θ) таквих да $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, где су r и θ поларне координате.

175. Дата је елипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, $a, b > 0$.

(а) Одредити поларне координате r_0 и θ_0 дате тачке $A(x_0, y_0)$ са посматране елипсе, којој одговара вредност параметра $t_0 \in [0, 2\pi)$;
Напомена: Подсетимо се, за поларне координате r и θ важи: $r \geqslant 0$ и $\theta \in [0, 2\pi)$.

(б) За које вредности параметра t, ако је $a \neq b$, важи $t = \theta$? Које тачке на елипси одговарају добијеним вредностима параметра t?

(ц) Која крива се добија за $a = b$? За које тачке са те криве, односно вредности параметра $t \in [0, 2\pi)$, важи $t = \theta$?

176. Посматрајмо параболу са фокусом у координатном почетку и са теменом у тачки са поларним координатама $(4, \frac{\pi}{4})$.

(а) Одредити једначину посматране параболе у поларним координатама.

(б) Одредити једначину посматране параболе у правоуглим координатама.

(ц) Одредити једначину директрисе и осе симетрије посматране параболе.

Напомена: Након ротације координатног система xy за угао α у добијеном координатном систему $x'y'$ ће важити $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$ и $y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$; додатно, да би нестао мешовити члан треба да важи $\mathrm{ctg}2\alpha = \dfrac{A-C}{B}$. Важи: $\sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

177. Дата је крива једначином у Декартовим координатама

$$(x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2.$$

(а) Одредити једначину дате криве у поларним координатама.

(б) Скицирати дату криву у $xy-$равни.

Напомена: Пре скицирања криве у $xy-$равни корисно је скицирати криву у $r\theta-$равни.

178. Одредити пресек кривих датих у поларним координатама: $r = 1 + \sin\theta$ и $r = -1 + \sin\theta$, $r \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

179. Дата је једначина криве у поларним координатама $r = \dfrac{k}{1 + e\cos\theta}$, $k \in \mathbb{R}$, $e \geqslant 0$. Одредити једначину ове криве у правоуглим координатама и показати да се добија квадратна крива. У зависности од параметра e, употребом теста дискриминанте, одредити о којој се кривој ради.

180. Дата је крива једначином у Декартовим координатама

$$(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2.$$

(а) Одредити једначину дате криве у поларним координатама.

(б) Скицирати дату криву у $xy-$равни.

Напомена: Пре скицирања криве у $xy-$равни корисно је скицирати криву у $r\theta-$равни. Сматрамо $r \geqslant 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

6 Векторска алгебра

6.1 Вектори у равни, збир вектора, множење вектора скаларом

181. Нека су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ произвољни вектори и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Показати:

    (а) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;

    (б) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$;

    (ц) $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$;

    (д) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

    (е) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;

    (ф) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$;

    (г) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;

    (х) $1\vec{a} = \vec{a}$.

    Напомена: Алгебарска структура, односно скуп над којим је дефинисана операција сабирања као и операција множења скаларом, а која задовољава горе наведене услове, се назива *векторски простор*.

182. Нека су у равни дате тачке A, B и C које формирају троугао. Нека је $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ и нека је тачка P средина странице BC. Изразити вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AP}$ преко вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

183. Изразити вектор $\overrightarrow{P_3P_4}$ ако је тачка $P_3(1,3)$, а тачка P_4 је средина дужи P_1P_2, где је $P_1(2,-1)$ и $P_2(-4,3)$.

184. Одредити збир вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ ако је $A(1,-1)$, $B(2,0)$, $C(-1,3)$ и $D(-2,2)$. Нацртати и одрговарајућу слику у правоуглом координатном систему.

185. (а) За дати вектор $\overrightarrow{AB} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, ако је тачка $A(2,9)$, одредити координате тачке B.

    (б) За дати вектор $\overrightarrow{PQ} = -6\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$, ако је тачка $Q(3,3)$, одредити координате тачке P.

186. Одредити јединичне векторе у равни који су колинеарни и јединичне векторе који су нормални вектору $\vec{u} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$.

187. Нека су у равни дати вектори $\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$, $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ и $\vec{w} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Изразити вектор $\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{w}_1$, где је вектор $\vec{v}_1$ колинеаран вектору $\vec{v}$ а $\vec{w}_1$ вектору $\vec{w}$.

188. Птица полеће из свог гнезда и лети 5 km под углом од 60° северно од правца истока, и ту се одмори на дрвету. Затим лети 10 km у правцу југоистока и слети на врх телефонског стуба. Одредити координате положаја дрвета на ком се птица одмарала, као и координате положаја телефонског стуба на којем се птица зауставила ако се гнездо налази у координатном почетку (једна координатна јединица одговара 1 km).

189. Нека су у равни дате тачке $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$. Употребом вектора одредити координате средине дужи PQ.

190. Употребом вектора показати да је средња линија троугла паралелна одговарајућој страници троугла и да је дупло мање дужине.

191. У троуглу ABC дати су вектори који одговарају тежишним дужима $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$. Наћи $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$.

192. Доказати употребом вектора да су средишта P, Q, R, S страница AB, BC, CD, DA произвољног четвороугла $ABCD$ темена паралелограма.

193. Доказати векторски да је средња линија трапеза паралелна његовим основицама, те и да је дужина средње линије трапеза једнака половини збира дужина основица трапеза.

194. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао такав да је $AB \parallel DE$ и нека су K и L средишта дужи одређених средиштима преосталих парова наспрамних страница. Доказати да је $K \equiv L$ ако и само ако је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$.

195. Доказати коришћењем вектора да се дијагонале паралелограма полове.

196. Тачке P и Q су средишта страница BC и CD, редом, паралелограма $ABCD$. Приказати векторе $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ помоћу вектора $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AQ}$.

197. Нека су тачке S и T средишта дијагонала AC и BD четвороугла $ABCD$. Доказати да је $2\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

198. Дат је правилни шестоугао $ABCDEF$. Нека је M средина дужи BC, N средина дужи DE, а P средина дужи AN. Изразити вектор $\overrightarrow{PM}$ преко вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$.

199. У равни постоје два линеарно независна (неколинеарна) вектора. Доказати.

200. Нека су A, B и C три колинеарне тачке и $\lambda \in \mathbb{R}$, тако да је $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Ако је O произвољна тачка у равни, доказати да важи

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}.$$

201. Дат је паралелограм $ABCD$. Са O означавамо тачку пресека дијагонала датог паралелограма. Доказати да за произвољну тачку M у равни паралелограма важи да је

$$4\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}.$$

6.2 Вектори у простору, збир вектора, множење вектора скаларом

202. Изразити вектор $\vec{u} = 9\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 6\vec{k}$ као производ његовог интензитета и вектора правца.

203. Одредити вектор интензитета 7 у правцу вектора $\vec{a} = 12\vec{\imath} - 5\vec{k}$.

204. Одредити вектор дужине 5 у смеру супротном од вектора $\vec{b} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 6\vec{k}$.

205. Нека су у простору дате тачке $P(x_1, y_1, z_1)$ и $Q(x_2, y_2, z_2)$. Употребом вектора одредити координате средине дужи PQ.

206. Нека су дате тачке $P_1(1, 4, 5)$ и $P_2(4, -2, 7)$. Одредити вектор $\overrightarrow{P_1P_2}$, удаљеност тачака P_1 и P_2 и координате средишта дужи P_1P_2.

207. Нека је $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}$. Одредити координате тачке A, ако је $B(5, 1, 3)$.

208. Одредити удаљеност тачке $P(x, y, z)$ од $y-$осе и од $yz-$равни.

209. Одредити вектор положаја тежишта троугла одређеног теменима: $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 3)$ и $C(-1, 2, -1)$.

210. Показати да су вектори $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ и $(1, 0, 0)$ линеарно независни (дакле, могу заменити базу $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ и $\vec{k}$), затим изразити вектор $(2, 3, 4)$ преко датих вектора.

211. Нека су A, B, C, D четири произвољне тачке у простору и нека је $\alpha \in \mathbb{R}$. Ако је M тачка на правој $p(A, C)$ таква да је $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AC}$, а N тачка на правој $p(B, D)$ таква да је $\overrightarrow{BN} = \alpha\overrightarrow{BD}$, доказати да је $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{CD} + (1-\alpha)\overrightarrow{AB}$.

212. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивице 2 цм са теменом А у координатном почетку и теменима B, D, A_1 на координатним осама, редом. Нека су M и N средине страна $A_1B_1C_1D_1$ и BCC_1B_1, редом. Ако су $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ јединични вектори праваца $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$, изразити векторе: $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{MN}$ преко $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Показати да је вектор $\overrightarrow{MN}$ паралелан са вектором $\overrightarrow{A_1B}$.

6.3 Скаларни производ вектора

213. Нека су дати вектори $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \sqrt{5}\vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - \sqrt{5}\vec{k}$. Одредити $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ и угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Затим одредити и $\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b}$ као и скаларну компоненту пројекције вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$.

214. Написати вектор $\vec{b} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$ као суму вектора паралелног са $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ и нормалног на $\vec{a}$.

215. Ако је $\vec{a}\cdot\vec{b} = 5$, $|\vec{b}| = 2$ и $\vec{x}$ вектор колинеаран са $\vec{a} + \vec{b}$ такав да је $\vec{x}\cdot\vec{b} = 18$, одредити чему је једнак вектор $\vec{x}$?

216. Дати су вектори $\vec{a} = (2, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, -2)$ и $\vec{c} = (-2, 2, -5)$. Наћи вектор $\vec{x}$, ако је $\vec{x}\cdot\vec{a} = 3$, $\vec{x}\cdot\vec{c} = -1$ и $\vec{x} \perp \vec{b}$.

217. Дати су вектори $\vec{v} = (1, 2, 3)$, $\vec{u} = (t, 1, -1)$ и $\vec{w} = (-1, 0, 1)$. Наћи параметар $t \in \mathbb{R}$ тако да вектори $\vec{v} + t\vec{u}$ и $\vec{w}$ буду ортогонални.

218. Доказати неједнакост троугла: $|\vec{u} + \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

219. Доказати Коши-Шварцову неједнакост: $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant |\vec{u}||\vec{v}|$. Затим, испитати под којим условима важи једнакост.

220. Доказати закон паралелограма: $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$.

221. Осенчити у равни област којој припадају тачке (x, y) тако да је $(x\vec{i} + y\vec{j})\cdot\vec{v} \leqslant 0$, за дати вектор $\vec{v}$ у равни.

222. Да ли за скаларни производ важи закон скраћивања, тј. да ли из $\vec{a}\cdot\vec{b}_1 = \vec{a}\cdot\vec{b}_2$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$ следи $\vec{b}_1 = \vec{b}_2$?

223. Нека су $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ међусобно нормални вектори. Ако је $\vec{v} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$, одредити $a, b \in \mathbb{R}$.

224. Дати су вектори $\vec{u} = (4, 5)$ и $\vec{v} = (5, -4)$.

    (а) Да ли су $\vec{u}$ и $\vec{v}$ ортогонални вектори?

    (б) Ако је $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ одредити a и b.

225. Коришћењем вектора и скаларног производа вектора доказати косинусну теорему: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$, где су a, b и c странице троугла, а θ угао између страница a и b.

226. Показати помоћу вектора да су дијагонале паралелограма нормалне ако и само ако је тај паралелограм ромб.

227. Коришћењем вектора показати да дијагонале паралелограма полове његове унутрашње углове ако и само ако је тај паралелограм ромб.

228. Одредити вектор који полови угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

229. Показати да се висине троугла секу у једној тачки.

230. Нека су A, B, C и D произвољне тачке у простору. Показати да је тада $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

231. (*Углови правца*) Углови правца α, β и γ вектора $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ се дефинишу као углови између вектора $\vec{v}$ и позитивног дела $x-, y-$ и $z-$осе, редом ($\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$). Показати да је

$$\cos\alpha = \frac{a}{|\vec{v}|}, \quad \cos\beta = \frac{b}{|\vec{v}|}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{|\vec{v}|},$$

као и да ако је $\vec{v}$ јединични вектор онда је $\vec{v} = \cos\alpha\vec{\imath} + \cos\beta\vec{\jmath} + \cos\gamma\vec{k}$.

232. Одредити колики се рад изврши да би се тело померило из координатног почетка до тачке $(1, 1, 1)$, ако га помера сила $\vec{F} = 5\vec{k}$.

233. Колики рад извршимо (изразити у $J = mN$) док вучемо сандук 20 метара дуж пристаништа, ако га вучемо силом од 200 Н под углом од 30° од правца кретања сандука.

234. (а) Показати да је вектор $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ нормалан на праву $ax + by = c$.

    (б) Показати да је вектор $\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ паралелан са правом $bx - ay = c$.

    Напомена: Користити коефицијенте праваца вектора и праве.

235. (а) Одредити праву нормалну вектору $\vec{v} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, која пролази кроз тачку $P(2, 1)$. Нацртати одговарајући цртеж.

    (б) Одредити праву паралелну вектору $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, која пролази кроз тачку $P(-2, 1)$. Нацртати одговарајући цртеж.

236. Дати су вектори $\vec{a} = (0, 2t, t)$, $\vec{b} = (2, 2, 1)$ и $\vec{c} = (-1, -2, -1)$. Одредити реалан параметар t такав да је $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + t$.

237. Одредити оштар угао који граде праве $3x + y = 5$ и $2x - y = 4$.

238. Одредити параметар $p \in \mathbb{R}$ тако да вектор $\vec{a} = (2p, 1, 1 - p)$ гради једнаке углове са векторима $\vec{b} = (-1, 3, 0)$ и $\vec{c} = (5, -1, 8)$.

239. Одредити угао који образују дијагонале паралелограма конструисаног над векторима $\vec{a} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k}$.

240. Одредити угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако се зна да је вектор $\vec{a} + 3\vec{b}$ нормалан на вектор $7\vec{a} - 5\vec{b}$, а вектор $\vec{a} - 4\vec{b}$ нормалан на вектор $7\vec{a} - 2\vec{b}$.

241. Нека су дати вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

    (а) Одредити $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$ ако је $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, затим $|\vec{b}| = 1$ и $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

    (б) Одредити какав је угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако се зна да је:
    1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$; 3) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$,
    и образложити одговор.

    Напомена: Може се користити *Косинусна теорема*: у троуглу у ком су странице обележене са x, y и z важи $|z|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos\measuredangle(x, y)$.

242. Дати су вектори $\vec{x}$ и $\vec{y}$ такви да је $|\vec{x} + \vec{y}| = 5$ а $|\vec{x} - \vec{y}| = 3$. Израчунати $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

243. Дати су вектори $\vec{a} = \vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = 7\vec{m} - 5\vec{n}$, $\vec{c} = \vec{m} - 4\vec{n}$ и $\vec{d} = 7\vec{m} - 2\vec{n}$, при чему су $\vec{m}$ и $\vec{n}$ јединични вектори, $a \perp b$ и $c \perp d$. Одредити угао између вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

244. Дати су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, такви да је $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$ и $|\vec{c}|=4$. Израчунати

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

245. Одредити угао између јединичних вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$, ако су вектори $\vec{a}=\vec{x}+2\vec{y}$ и $\vec{b}=5\vec{x}-4\vec{y}$ ортогонални.

246. (а) Одредити пројекцију вектора $\vec{a}=(1,4,8)$ на вектор $\vec{b}=(1,2,-2)$.
   (б) Дати су узајамно нормални јединични вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Одредити углове троугла ABC ако за његове странице важи: $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}-6\vec{v}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{u}+7\vec{v}$ и $\overrightarrow{CA}=-3\vec{u}-\vec{v}$.

247. Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су узајамно ортогонални, а вектор $\vec{c}$ са њима гради углове од $\dfrac{\pi}{3}$. Ако је $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$ и $|\vec{c}|=8$, одредити $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{b}+3\vec{c})$.

6.4 Векторски и мешовити производ вектора

248. Одредити $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{b}\times\vec{a}$, ако је (а) $\vec{a}=2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{\imath}-\vec{k}$; (б) $\vec{a}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{0}$; (ц) $\vec{a}=\vec{\imath}\times\vec{\jmath}$ и $\vec{b}=\vec{\jmath}\times\vec{k}$.

249. Нацртати у координатном систему и одредити $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{b}\times\vec{a}$, ако је (а) $\vec{a}=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ и $\vec{b}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$; (б) $\vec{a}=\vec{\imath}-\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{\jmath}$.

250. Одредити површину троугла чија су темена P,Q и R, као и јединичну нормалу на раван $r(P,Q,R)$, ако је $P(-2,2,0),Q(0,1,-1)$ и $R(-1,2,-2)$.

251. Дата је тачка $M(5,-1,2)$. Нека су M_1,M_2 и M_3 пројекције тачке M на координатне равни. Одредити површину троугла $M_1M_2M_3$.

252. Одредити формулу за рачунање површине троугла са теменима у $xy-$равни датих са $(0,0)$, (a_1,a_2) и (b_1,b_2).

253. Одредити површину паралелограма смештеног у $xy-$равни чија су темена $(-1,2)$, $(2,0)$, $(7,1)$ и $(4,3)$.

254. Нека су дате тачке $P(1,0,-1)$ и $Q(2,-1,1)$. Одредити јединични вектор $\vec{v}$ који је нормалан на $\overrightarrow{PQ}$ и на $z-$осу.

255. Нека је $\vec{a}=5\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{\jmath}-5\vec{k}$ и $\vec{c}=-15\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-3\vec{k}$. Да ли су неки од наведених вектора међусобно паралелни или нормални?

256. Дати су вектори $\vec{a}=(0,2,1)$, $\vec{b}=(2,2,1)$ и $\vec{c}=(-1,-2,-1)$. Одредити вектор $\vec{d}$ такав да важи $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$ и $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$.

257. Дати су вектори $\vec{a}=(1,1,1)$ и $\vec{b}=(0,2,0)$. Одредити $\lambda\in\mathbb{R}$ тако да вектори $\vec{p}=\lambda\vec{a}+5\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ буду:

   (а) ортогонални; (б) паралелни.

258. Нека су вектори $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ међусобно неколинеарни и нека је $\vec{a}=3\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ и $\vec{b}=\vec{e}_1-\vec{e}_2$. Одредити вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ помоћу вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Одредити затим и $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ако је $|\vec{e}_1|=3$, $|\vec{e}_2|=2$ и угао између вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ је $\frac{\pi}{6}$.

259. Да ли за векторски производ важи закон скраћивања, тј. да ли из $\vec{a}\times\vec{b}_1=\vec{a}\times\vec{b}_2$ и $\vec{a}\neq\vec{0}$ следи $\vec{b}_1=\vec{b}_2$?

260. Да ли из $\vec{a}\cdot\vec{b}_1=\vec{a}\cdot\vec{b}_2$ и $\vec{a}\times\vec{b}_1=\vec{a}\times\vec{b}_2$ за $\vec{a}\neq\vec{0}$ следи $\vec{b}_1=\vec{b}_2$?

261. Да ли из $\vec{a}_1\times\vec{c}=\vec{b}_1$ и $\vec{a}_2\times\vec{c}=\vec{b}_2$ следи $\vec{a}_1\cdot\vec{b}_2+\vec{a}_2\cdot\vec{b}_1=0$?

262. Одредити вектор $\vec{x}$ у простору, ако се зна да је нормалан на векторе $\vec{a}=(4,-2,-3)$ и $\vec{b}=(0,1,3)$, ако је $|\vec{x}|=26$ и ако са позитивним делом $y-$осе гради оштар угао.

263. Одредити момент силе $\overrightarrow{M}$, као и њен интензитет, који настаје дејством силе $\overrightarrow{F}$, јачине $|\overrightarrow{F}|=120N$, која делује под углом од 135° у односу на полугу дужине $|\vec{r}|=20cm$.

264. Одредити мешовити производ $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, као и запремину паралелепипеда одређеног датим векторима, ако је $\vec{a}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}-2\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{\imath}-\vec{k}$ и $\vec{c}=2\vec{\imath}+4\vec{\jmath}-2\vec{k}$.

265. Израчунати мешовити производ вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, ако је вектор $\vec{c}$ нормалан на векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и важи да је $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=3$ и $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{6}$.

266. Користећи се само скаларним и векторским производом од датих вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ конструисати: (а) вектор нормалан на векторе $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{c}$; (б) вектор нормалан на векторе $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$; (ц) вектор дужине $|\vec{a}|$ у правцу вектора $\vec{b}$ и (д) површину паралелограма одређеног векторима $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

267. Показати да вектори $\vec{a}=(7,6-6)$ и $\vec{b}=(6,2,9)$ могу бити ивице коцке, а затим одредити вектор $\vec{c}$ треће ивице те коцке. Помоћу датих вектора, израчунати запремину коцке.

268. Нека су дати вектори $\vec{a}=(1,1,-1)$, $\vec{b}=(-2,-1,2)$ и $\vec{c}=(1,-1,2)$.

   (а) Представити вектор $\vec{c}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$.

   (б) Одредити угао који вектор $\vec{c}$ гради са равни који одређују вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

269. Доказати да важи: $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c})=((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c})\vec{b}$.

270. Показати за важи: $(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}=(\vec{x}\cdot\vec{z})\vec{y}-(\vec{y}\cdot\vec{z})\vec{x}$.

271. Доказати Јакобијев идентитет: $(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}+(\vec{y}\times\vec{z})\times\vec{x}+(\vec{z}\times\vec{x})\times\vec{y}=\vec{0}$.

272. Доказати Лагранжов идентитет: $(\vec{x}\times\vec{y})\cdot(\vec{z}\times\vec{t})=(\vec{x}\cdot\vec{z})(\vec{y}\cdot\vec{t})-(\vec{y}\cdot\vec{z})(\vec{x}\cdot\vec{t})$.

273. Доказати да за мешовити производ важи идентитет: $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}+p\vec{a}+q\vec{b}]$, где су $p,q\in\mathbb{R}$. Детаљно образложити одговор.

274. Дат је троугао ABC. Ако је $\overrightarrow{AB}=(4,-5,0)$ и $\overrightarrow{BC}=(-4,9,-3)$, израчунати дужину висине тог троугла спуштену из темена B.

275. Дат је паралелограм $ABCD$. Одредити површину тог паралелограма, ако су његове дијагонале задате векторима $\overrightarrow{AC}=2\vec{m}-\vec{n}$ и $\overrightarrow{DB}=4\vec{m}-5\vec{n}$, где су $\vec{m}$ и $\vec{n}$ јединични вектори који заклапају угао од 45°.

276. Дати су вектори $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$. Одредити висину паралелепипеда конструисаног над векторима $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$, која одговара основи одређеној векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

7 Једначине праве и равни у простору

277. Одредити праметарску једначину праве која пролази:

   (а) кроз тачку $P(3,-4,-1)$ и паралелна је вектору $\vec{v}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$;
   (б) кроз тачке $P(1,2,-1)$ и $Q(-1,0,1)$;
   (ц) кроз координатни почетак и паралелна је вектору $\vec{v}=2\vec{\jmath}+\vec{k}$;
   (д) кроз тачку $P(3,-2,1)$ и паралелна је правој $x=1+2t,\ y=2-t,\ z=3t$;
   (е) кроз тачку $P(2,4,5)$ и нормална је на раван $3x+7y-5y=21$;
   (ф) кроз тачку $P(2,3,0)$ и нормална је на векторе $\vec{u}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+3\vec{k}$ и $\vec{v}=3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+5\vec{k}$;
   (г) $z-$осом.

278. Одредити параметризацију дужи која спаја тачке $P(0,2,0)$ и $Q(3,0,0)$.

279. Одредити једначину равни која:

   (а) пролази кроз тачку $P(0,2,-1)$ и нормална је на вектор $\vec{n}=3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-\vec{k}$;
   (б) пролази кроз тачку $P(1,-1,3)$ и паралелна је равни $2x+y+z=7$;
   (ц) пролази кроз тачке $P(1,1,-1)$, $Q(2,0,2)$ и $R(0,-2,1)$;
   (д) пролази кроз тачку $P(2,4,5)$ и нормална је на праву $x=5+t,\ y=1+3t,\ z=4t$;
   (е) која је одређена правама $x=2t+1,\ y=3t+2,\ z=4t+3$ и $x=s+2,\ y=2s+4,\ z=-4s-1$ и одредити тачку пресека датих правих;
   (ф) кроз тачку $P(2,1,-1)$ и нормална је на праву у пресеку рави $2x+y-z=3$ и $x+2y+z=2$;
   (г) пролази кроз тачке $P(1,2,3)$ и $Q(3,2,1)$ и нормална је на раван $4x-y+2z=7$;
   (х) која садржи праву $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ и нормална је на раван $x+4y-3z=0$.

280. Да ли је права $x=1-2t,\ y=2+5t,\ z=-3t$ паралелна равни $2x+y-z=8$? Објаснити одговор.

281. Одредити удаљеност тачке $P(2,1,-1)$ од праве $x=2t,\ y=1+2t,\ z=2t$.

282. Одредити удаљеност тачке $P(2,2,3)$ од равни $2x+y+2z=4$.

283. Одредити удаљеност између равни $x+2y+6z=1$ и $x+2y+6z=10$.

284. Одредити удаљеност између праве $x=2+t,\ y=1+t,\ z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t$ и равни $x+2y+6z=10$.

285. Одредити угао између равни $x+y=1$ и $2x+y-2z=2$.

286. Одредити тачку пресека праве $x=1-t,\ y=3t,\ z=1+t$ и равни $2x-y+3z=6$.

287. Одредити једначину праве у пресеку равни $3x-6y-2z=3$ и $2x+y-2z=2$.

288. Одредити пресек праве $x=1+2t,\ y=-1-t,\ z=3t$ са координатним равнима.

289. Доказати да се праве $p:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ и $q:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{3}$ секу и одредити њихову пресечну тачку.

290. Одредити једначину праве која пролази кроз тачку $P(-5,2,-1)$ и сече под правим углом праву $l:\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z+2}{-2}$.

291. Нека су дате три праве $x = 3 + 2t,\ y = -1 + 4t,\ z = 2 - t$, затим $x = 1 + 4s,\ y = 1 + 2s,\ z = -3 + 4s$ и $x = 3 + 2r,\ y = 2 + r,\ z = -2 + 2r$. Одредити које две од њих су паралелна, које нормалне а које мимоилазне.

292. Одредити једначину симетралне равни дужи AB где је $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$.

293. Одредити симетралну раван дужи AB, где је $A(5, 2, -7)$ и $B(-9, 8, 15)$.

294. Одредити тачку B симетричну тачки $A(a_1, a_2, a_3)$ у односу на раван $Ax + By + Cz + D = 0$.

295. Одредити тачку A' симетричну тачки $A(2, 7, 1)$ у односу на раван $x - 4y + z + 7 = 0$.

296. Одредити једначину праве кроз тачку $A(1, 2, 3)$ која сече и нормална је на праву $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{2}$.

297. Одредити тачку која је симетрична тачки $P(-1, -2, 1)$ у односу на праву $l: \ \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{1}$ као и пројекцију тачке P на праву l.

298. Дата је права $\frac{x-6}{a} = \frac{y-b}{-1} = \frac{z-1}{0}$ и раван $x + y - 2z = 2$. Одредити параметре $a, b \in \mathbb{R}$ тако да дата права припада датој равни.

299. Нека је дата права p као пресек равни $x - 2y + z - 1 = 0$ и $2x + y - z - 3 = 0$ и права q дата са $\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{m}$. Одредити параметар m тако да се праве p и q секу.

300. Дате су праве $p: \dfrac{x-3}{m} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ и $q: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{m}$, $m \in \mathbb{R}$. Одредити вредност m тако да се дате праве секу. За коју вредност m ће праве p и q бити паралелне?

301. Нека је p права у пресеку равни $3x + 2y - 6 = 0$ и $x + 2z - 2 = 0$.

   (а) Одредити параметарску једначину праве p.

   (б) Одредити тачку C на правој p која је једнако удаљена од тачака $A(-1, -3, 1)$ и $B(3, 1, 1)$.

302. Дате су праве $p: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{m} = \dfrac{z}{-1}$ и $q: \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{-2}$. Наћи вредност параметра m тако да праве p и q припадају истој равни α.

303. Одредити параметре $a, b \in \mathbb{R}$ тако да раван $ax + by + 2z - 1 = 0$ буде нормална на праву $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$. За тако одређене a и b наћи пресек праве p и дате равни.

304. Нека је права p пресек равни $x + y - z = 6$ и $2x - y + 3z = 5$. Нека је права q дата једначином $\dfrac{2x-3}{4} = \dfrac{2+3y}{3} = \dfrac{z-2}{2}$. Одредити у ком медјусобном положају се налазе праве p и q.

305. Одредити једначину праве која сече праве $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3}$ и $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ и пролази кроз тачку $(4, 0, -1)$.

306. Одредити једначину праве која сече праву $p: \ x = 2,\ y = t,\ z = 2t + 6,\ t \in \mathbb{R}$ и праву $q: \ \dfrac{x-8}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-8}{1}$ и садржи тачку $A(1, 2, 3)$.

307. Нека је права p дата као пресек равни $x + z + 2 = 0$ и $2x - y + 1 = 0$; а права q као пресеку равни $5x + 4z + 3 = 0$ и $2x + y + 3z = 0$.

   (а) Показати да се праве p и q секу и одредити тачку S у њиховом пресеку.

(б) Одредити једначину равни коју одређују праве p и q.

308. Нека је права p дата са $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$; а права q са $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$.

(а) Показати да су праве p и q мимоилазне.

(б) Одредити растојање између правих p и q.

Напомена: Ако је P произвољна тачка са праве p, а Q са праве q, онда је растојање између правих p и q, у ознаци $d(p,q)=|\mathrm{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ}|$, где је $\vec{n}$ заједничка нормала правих p и q.

309. Одредити заједничку нормалу и удаљеност мимоилазних правих

$$p:\ \frac{x}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{1}\quad\wedge\quad q:\ \frac{x-6}{1}=\frac{y-12}{2}=\frac{z-8}{-1}.$$

Напомена: Може се поћи од произвољних тачака $P\in p$ и $Q\in q$, те тражити под којим условима је $\overrightarrow{PQ}$ нормала на обе праве.

310. Нека је права p добијена пресеком равни $\alpha: x-y+z-2=0$ и $\beta: x+y+3z+2=0$. Одредити једначину праве q која је паралелна са p и садржи тачку $A(-1,0,1)$.

311. Дате су праве $p:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ и $q:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z+1}{3}$.

(а) Испитати узајамни однос правих p и q;

(б) Написати једначину равни α која садржи праву p и паралелна је правој q.

312. Дата је раван $\alpha:\ 2x+3y-z=1$ и права $p:\ \frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}$. Одредити пројекцију p' праве p на раван α. Затим одредити тачку праве p' која је најближа координатном почетку.

313. Одредити једначину нормалне пројекције праве у пресеку равни $x-4y+2z-5=0$ и $3x+y-z+2=0$ на раван $2x+3y+z-6=0$.

314. Одредити једначину праве b која је симетрична правој $a:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{-5}$ у односу на раван $\pi:\ x+2y+z-3=0$.

315. Нека су дате раван $\alpha: 5x-y+2z=3$ и права $p:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$. Одредити једначину праве q која садржи координатни почетак и пресечну тачку T праве p и равни α.

316. Одредити параметар $a\in\mathbb{R}$ тако да права $p:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{a}$ буде паралелна равни $\alpha: x-2y+z-5=0$ и наћи њихово растојање.

317. Дата је раван $\alpha: 5x-y+2z-3=0$ и права $p:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$.

(а) Одредити једначину праве q која садржи координатни почетак и пресечну тачку T праве p и равни α.

(б) Одредити једначину равни β која садржи праву p и нормална је на раван α.

318. Дата је раван $\alpha: 2x-y+3z+1=0$ и права $p:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$. Одредити једначину равни β која садржи праву p и нормална је на раван α.

319. У простору су дате тачке $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ и $D(0,0,4)$. Раван α садржи тачке A,B,C, а раван β тачке A,B,D.

(а) Одредити угао између равни α и β.

(б) Одредити запремину тетраедра $ABCO$.

320. Нека је дата раван α која је нормална на јединични вектор $\vec{n}$ и садржи тачку A. Нека је са $\vec{r}_A$ обележен вектор положаја тачке A; односно $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$, где је O координатни почетак. У зависности од вектора $\vec{n}$ и $\vec{r}_A$ изразити векторе положаја $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ и $\vec{r}_D$ темена B, C и D квадрата $ABCD$ који припада равни α ако се зна да је теме C тачка равни α најближа координатном почетку.

321. Нека је дата раван α која је нормална на јединични вектор $\vec{n}$, садржи тачку Q и није нормална на $z-$осу. Нека је са $\vec{r}_Q$ обележен вектор положаја тачке Q; односно $\vec{r}_Q = \overrightarrow{OQ}$, где је O координатни почетак. Нека је дата и тачка A са својим вектором положаја $\vec{r}_A$, која не припада равни α. У зависности од вектора $\vec{n}$, $\vec{r}_Q$ и $\vec{r}_A$ изразити векторе положаја $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ и $\vec{r}_D$ темена B, C и D квадрата $ABCD$ који је такав да је $AB \perp \alpha$, $B \in \alpha$ и страница BC је паралелна са $xy-$равни.

322. Одредити темена A, B и C квадрата $OABC$, где је са O обележен координатни почетак, ако се зна да темена A и B припадају правој $p:\ x = -9 + 8t,\ y = -9 + t,\ z = 4t$, затим $\vec{r}_A \perp p$ и $\overrightarrow{AB} \cdot (8, 1, 4) > 0$. Напоменимо да је са $\vec{r}_A$ обележен вектор положаја тачке A, односно $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$.

323. Одредити једначину равни α, која садржи тачке $M_1(1, -2, 2)$ и $M_2(2, 3, -1)$ и нормална је на раван
$\beta : 3x - 2y + z - 6 = 0$.

324. Одредити једначину праве p која сече праве $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z}{1}$ и $\dfrac{x-10}{5} = \dfrac{y+7}{4} = \dfrac{z}{1}$ и паралелна је вектору $\vec{a} = (8, 7, 1)$.

325. Одредити једначину праве која садржи тачку $M(0, 1, -2)$ и заклапа са позитивним делом $x-$осе угао од 60°, са позитивним делом $y-$осе угао од 45° и са позитивним делом $z-$осе угао од 120°.

326. Раван α садржи три неколинеарне тачке $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(2, 1, 2)$ и $M_3(1, 1, 4)$. Одредити једначину равни α и затим одредити удаљеност тачке $P(2, 3, 5)$ од равни α.

327. На правој $p : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z-1}{-1}$ одредити тачку C, која је једнако удаљена од тачака $A(1, 3, 1)$ и $B(3, 1, 1)$, а затим одредити једначину равни која садржи тачку C и нормална је на праву p.

328. Написати једначину равни која садржи праву која је пресек равни $\alpha : x + y + z - 1 = 0$ и $\beta : x - y + 2z - 7 = 0$ и полови одсечак праве $p : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-2}$ између датих равни.

329. Одредити тачку M у равни $\alpha : x + 2y + 3z + 4 = 0$, која је најближа координатном почетку $O(0, 0, 0)$. Затим одредити растојање тачака O и M.

330. Дате су равни $\alpha : 4x - y + 3z - 1 = 0$ и $\beta : x - 5y - z - 2 = 0$. Одредити једначину равни γ, која садржи координатни почетак $O(0, 0, 0)$ и праву p, која је пресек равни α и β.

331. Одредити једначину равни којој припадају паралелне праве: $p_1 : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ и $p_2 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$.

332. Дата је раван $\alpha : 2x - y - 5z + 1 = 0$. Наћи једначину праве p која припада равни α и која сече x и y осу.

8 Цилиндри и квадратне површи

333. Нацртати следеће цилиндре: (а) $x^2 + z^2 = 4$; (б) $z = y^2 - 1$; (ц) $4x^2 + y^2 = 36$ и (д) $yz = 1$.

334. Нацртати следеће квадратне површи:

   (а) елипсоиде $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$ и $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$;
   (б) параболоиде $z = 18 - x^2 - 9y^2$ и $z = x^2 + 9y^2$;
   (ц) конусе $y^2 + z^2 = x^2$ и $9x^2 + 4y^2 = 36z^2$;
   (д) хиперболоиде $9y^2 + 4z^2 - 9x^2 = 36$ и $y^2 - x^2 - 4z^2 = 4$;
   (е) хиперболичне параболоиде $y^2 - x^2 = z$ и $x^2 - y^2 = z$.

335. Нацртати следеће површи:

   (а) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
   (б) $z = 1 + y^2 - x^2$;
   (ц) $y^2 - z^2 = 4$;
   (д) $y = -(x^2 + z^2)$;
   (е) $z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$;
   (ф) $z = x^2 - y^2 - 1$;
   (г) $9x^2 + 16y^2 = 4z^2$.

336. Посматрајмо буре које је постављено усправно (дуж $z-$осе) у правоуглом координатном систему. Буре је облика елипсоида и то тако да су линије нивоа паралелне $xy-$равни кружнице. Највећа кружница је полупречника R и координатни почетак је смештен у центар те кружнице (дакле, налази се у равни $z = 0$). Базе бурета (дно и поклопац) су такође кружнице полупречника $r < R$ и налазе се у равнима $z = h$ и $z = -h$. Одредити једначину површи која одређује зид датог бурета. Шта добијамо ако је $r = R$?

337. Пресек хиперболичног параболоида $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$ и равни $y = y_1$ је парабола. Одредити јој теме и фокус.

338. (а) Проверити да ли сваки пут када пресечемо квадратне површи равнима паралелним координатним равнима добијамо квадратне криве (конусне пресеке).

   (б) Проверити шта се добија када пресечемо квадратну површ произвољном равни у простору.

339. (*Стереографска пројекција*) Нека је дата центрирана јединична сфера и нека је са N обележен њен северни пол $N(0, 0, 1)$. Одредити пројекције тачака сфере (изузев тачке N) из северног пола N на $xy-$раван.

340. Доказати да кроз сваку тачку једноделног хиперболоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ пролазе две праве које читаве припадају том хиперболоиду.

341. Дата је парабола $y = 3x^2 - x + 5$. Одредити једначину ротационе површи, и скицирати је, ако настаје ротацијом дате параболе око:

$$(a)\ x - \text{осе}; \qquad (b)\ y - \text{осе}.$$

9 Цилиндричне и сферне координате

342. Дате једначине и неједначине у правоуглим координатама пребацити у цилиндричне и сферне координате и одредити које површи су њима одређене:

   (а) $z = -2$;

   (б) $x^2 + y^2 = 5$;

   (ц) $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z \leqslant 1$;

   (д) $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$;

   (е) $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1,\ z \leqslant 1$.

343. Дате једначине и неједначине у цилиндричним координатама пребацити у правоугле и сферне координате и одредити које површи су њима одређене:

   (а) $r = 0$;

   (б) $z = 0$;

   (ц) $r^2 + z^2 = 4,\ z \leqslant -\sqrt{2}$;

   (д) $z = 4 - 4r^2,\ 0 \leqslant r \leqslant 1$;

   (е) $z = 4 - r,\ 0 \leqslant r \leqslant 4$;

   (ф) $z + r^2 \cos(2\theta) = 0$;

   (г) $z^2 - r^2 = 1$.

344. Дате једначине и неједначине у сферним координатама пребацити у правоугле и цилиндричне координате и одредити које површи су њима одређене:

   (а) $\rho \sin\phi \cos\theta = 0$;

   (б) $\mathrm{tg}^2\phi = 1$;

   (ц) $\rho = 3,\ \frac{\pi}{3} \leqslant \phi \leqslant \frac{2\pi}{3}$;

   (д) $\phi = \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{7}$.

345. Одредити правоугле координате центра сфере дате:

   (а) цилиндричним координатама $r^2 + z^2 = 4r\cos\theta + 6r\sin\theta + 2z$;

   (б) сферним координатама $\rho = 2\sin\phi(\cos\theta - 2\sin\theta)$.

346. Одредити скуп у простору који задовољава следеће једначине у цилиндричним координатама:
(а) $r = -2\sin\theta$ и (б) $r = 1 - \cos\theta$.

347. Одредити скуп у простору који задовољава следеће једначине у сферним координатама:
(а) $\rho = 1 - \cos\phi$ и (б) $\rho = 1 + \cos\phi$.

348. (*Раван у цилиндричним и сферним координатама*)

   (а) Показати да раван чија је једначина $z = c,\ c \neq 0$ дата у правоуглим и цилиндричним координатама, у сферним координатама има једначину $\rho = \frac{c}{\cos\phi}$.

   (б) Одредити једначину $xy-$равни у сферним координатама.

   (ц) Показати да равни нормалне на $x-$осу у цилиндричним координатама задовољавају једначину $r = \frac{a}{\cos\theta}$.

(д) Показати да равни нормалне на $y-$осу у цилиндричним координатама задовољавају једначину $r = \frac{b}{\sin\theta}$.

(е) Одредити једначину облика $r = f(\theta)$ у цилиндричним координатама за раван $ax+by = c,\ c \neq 0$.

349. Наћи једначину облика $\rho = f(\phi)$ у сферним координатама која описује цилиндар $x^2 + y^2 = a^2$.

350. (*Симетрије*)

(а) Коју симетрију носи површ дата једначином $r = f(z)$ у цилиндричним координатама?

(б) Коју симетрију носи површ дата једначином $\rho = f(\phi)$ у сферним координатама?

351. (*Торус*) Торус је површ која настаје ротацијом кружнице дате у $yz-$равни, полупречника b, са центром у тачки $(0, a, 0),\ a > b > 0$, око $z-$осе. Одредити једначнину торуса користећи редом: правоугле, цилиндричне. те сферне координате.

352. Одредити једначину торуса у правоуглим координатама који настаје ротацијом кружнице у $yz-$ равни, са центром у $(0, 2, 0)$ полупречника 1, око $z-$осе.

353. У простору је дата површ једначином у цилиндричним координатама:
1) $r - z = 5,\ 5 \geqslant z \geqslant 0$; и 2) $r = 4\cos\theta,\ z \geqslant 0$.

(а) Одредити једначину дате површи у правоуглим координатама.

(б) Нацртати дату површ.

(ц) Одредити једначину дате површи у сферним координатама.

354. У простору је дата површ једначином у сферним координатама $\rho = \cos\phi$ (исти задатак урадити и за $\rho = 1 - \cos\phi$.)

(а) Дату површ изразити у правоуглим координатама.

(б) Дату површ изразити у цилиндричним координатама.

(ц) Нацртати дату површ.

355. У $yz-$равни је дата крива $y = z^2 + 1$. Ротацијом ове криве око $z-$осе добија се површ у простору.

(а) Одредити једначину добијене површи у правоуглим координатама.

(б) Одредити једначину добијене површи у цилиндричним и сферним координатама.

356. (а) Дату једначину $z^2 - 3x^2 - 3y^2 = 0$ у правоуглим координатама пребацити у цилиндричне и сферне координате и одредити која површ је одредјена том једначином.

(б) Дату једначину $z^2 + r^2\cos 2\theta = 1$ у цилиндричним координатама пребацити у правоугле и сферне координате и одредити која површ је одредјена том једначином.

357. У простору је дата површ једначином у сферним координатама $\rho\sin\phi = 2$.

(а) Написати једначину дате површи у правоуглим и цилиндричним координатама.

(б) Одредити пресек дате површи са $yz-$равни.

358. У простору је дата површ једначином у сферним координатама: $\rho\cos\phi + \rho^2\sin^2\phi = 1$.

(а) Одредити једначину дате површи у правоуглим координатама.

(б) Нацртати дату површ.

(ц) Одредити једначину дате површи у цилиндричним координатама.

359. Дата је површ једначином у сферним координатама $\rho \sin\phi = 2\sin\theta$.

(а) Одредити једначину дате површи у цилиндричним и Декартовим координатама.

(б) Скицирати дату површ.

360. Дата је површ једначином у цилиндричним координатама $r = \dfrac{-3}{\cos\theta}$.

(а) Одредити једначину дате површи у правоуглим и сферним координатама.

(б) Скицирати дату површ.

361. (а) Одредити једначину (у Декартовим координатама) елипсоида са центром у координатном почетку који пролази кроз тачке $A(2,0,0)$, $B(0,0,1)$ и $C(1,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$.

(б) Скицирати дати елипсоид и одредити његову једначину у цилиндричним координатама.

362. Дата је једначина површи у цилиндричним координатама $r = \dfrac{-3}{\cos\theta}$. Одредити једначине ове површи у правоуглим и сферним координатама и нацртати је.

363. Дате су површи у простору једначинама у правоуглим координатама:

$$z = 2 - x^2 - y^2,$$
$$z = x^2 + y^2.$$

(а) Одредити криву која је пресек посматраних површи.

(б) Скрицирати област у простору која је ограничена наведеним површима.

364. Дата је површ $r\sin\theta = 4$, једначином у цилиндричним координатама.

(а) Одредити једначину површи у Декартовим координатама и скицирати дату површ.

(б) Одредити која крива се налази у пресеку дате површи и површи дате једначином $x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 1$.

365. У простору су дате површи једначинама у сферним координатама $\rho\sin\phi = 2$ и $\rho\sin\phi\cos\theta = 1$.

(а) Скицирати дате површи и одредити њихове једначине у Декартовим координатама.

(б) Одредити пресек посматраних површи (једначином и описати који је то скуп тачака у простору).

366. У простору су дате површи једначинама у цилиндричним координатама

$$z = 4 - r^2 \quad \text{и} \quad z = r\cos\theta.$$

Одредити које површи су представљене овим једначинама, одредити једначине датих површи у Декартовим координатама, скицирати их и одредити која се крива налази у пресеку посматране две површи (описати која је то крива и којим једначинама је одређена).